带时滞复金兹堡-朗道方程常数平衡解的渐近性态

张海霞, 高洪俊

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 讨论了具有时滞的复金兹堡-朗道方程的渐进性态. 当参数满足一定的条件时, 得到了复金兹堡-朗道方程具有第一边界条件时零解的线性和非线性稳定性及不稳定性; 当参数和时滞满足一定的条件时, 得到了复金兹堡-朗道方程具有第二边界条件时常数平衡解的线性化方程的渐进性态.

[关键词] 复金兹堡-朗道方程, 延迟, 稳定性, 渐近性态

[中图分类号] O175.29 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)04-0014-07

Asymptotic Behavior for Constant Equilibria for Ginzburg-Landau Equation With Delay

Zhang Haixia, Gao Hongjun

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract The asymptotic behavior for Complex Ginzburg-Landau equation with delay is discussed. Linearized and non-linear stability of zero for Complex Ginzburg-Landau equation with first boundary condition under some conditions on the parameters are obtained; also asymptotic behavior of constant solutions for Complex Ginzburg-Landau equation with second boundary condition under some conditions on the parameters and delay are obtained.

Key words Complex Ginzburg-Landau equation, delay, stability, asymptotic behavior

具有以下形式的复金兹堡-朗道方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\mu + i\alpha)\Delta u + u - (1 + i\beta)|u(t-\tau)|^2 u$$

为物理和数学中研究最多的非线性方程之一, 它描述了超导、超流和玻色-爱因斯坦凝聚中的相变现象.

当 $\tau = 0$时, 在[1, 2]中, Doering和 Ghidaglia等人研究了一维或二维空间金兹堡-朗道方程的全局吸引子的有限维及其相关动态. 在[3]中, Jimbo和 Morita讨论了如下问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u - |u|^2 u, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 u为复泛函, 得到在一维情况下问题(1)的任意非常数平衡解都不稳定.

众所周知[4], 问题的稳态解的局部稳定性由相应线性化问题的稳定性所推得. 本文将通过研究相应线性问题的特征值来讨论问题平衡解的稳定性. 下面回忆具有时滞的 PDE解的有关性质.

在[5]中, Wu J讨论了如下问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Au(t) + F(t, u_t), \ a \leqslant t \leqslant b, \\ u_a = \phi, \end{cases} \tag{2}$$

其中 F连续且满足 Lipshitz条件, A是 X上一个有界线性算子的强连续半群, 给定初值 $\phi \in X$, 则问题(2)

收稿日期: 2008-03-12

基金项目: 国家自然科学基金(10571087)、教育部博士点专项基金(20050319001)、江苏省自然科学基金(BK2006523)、南京师范大学青年教师奖奖励计划资助项目.

通讯联系人: 高洪俊, 教授, 博士生导师, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: gaohj@njnu.edu.cn

存在惟一解.

文献[6]中定理(1.1)主要讨论了在空间 $\Omega=(0,L_1)\times(0,L_2)$ 下如下问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-(1+i\varepsilon)\Delta u=(1-i\omega)u-(1+i\beta)|u|^2u+\mu e^{i\chi_0}F(u,t,\tau), & \Omega\times(0,+\infty),\\ u|_{\Gamma_j}=u|_{\Gamma_{j+2}},\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\Gamma_j}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\Gamma_{j+2}}, & \partial\Omega\times(0,+\infty),\\ u(x,s)=u_0(x,s), & \Omega\times[-\tau,0], \end{cases}$$

其中 ε、β、ω、μ、χ_0、m_i 均是实数, u 是复数.

$$F(u,t,\tau)=[m_1u(t)+m_2u(t)+m_3u(t-\tau,x)+m_4u(t-\tau)],$$

$$u(s)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(s,x)\,dx,\ \Gamma_j=\partial\Omega\times\{x_j=0\},\ \Gamma_{j+2}=\partial\Omega\times\{x_j=L_j\}.$$

令

$$u(x,t)=v(x,t)e^{-i\omega t},\ z(x,t)=v(x,t)e^{\theta t},$$

上面问题即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}-(1+i\varepsilon)\Delta z=(1+i\theta)z-(1+i\beta)|z|^2z+\mu e^{i\chi_0}F(z,t,\tau), & \Omega\times(0,+\infty),\\ z|_{\Gamma_j}=z|_{\Gamma_{j+2}},\ \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\Gamma_j}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\Gamma_{j+2}}, & \partial\Omega\times(0,+\infty),\\ z(x,s)=z_0(x,s), & \Omega\times[-\tau,0], \end{cases} \tag{3}$$

其中 $F(z,t,\tau)=m_1z+m_2z+m_3z(t-\tau,x)+m_4z(t-\tau)$. 在对参数和时滞一定限制下, 本文讨论 $v(x,t)=\rho_0e^{-\theta t}$ 是一个一致振荡解($z=\rho_0$ 是(3)的一个常数平衡解)的稳定性.

与时间无关且满足边界条件的解称为平衡解, 这些解非常重要, 因为在一定的条件下, 随着时间的增长, 对模型可能的极限起了一个重要的作用. 分析可以看出三次项带时滞的复金兹堡 –朗道方程的讨论比不带时滞或线性项带时滞的复金兹堡 –朗道方程的讨论复杂得多.

本文将讨论 $\Omega=(0,\pi)$ 中三次项带时滞的复金兹堡 –朗道方程的常数平衡解在第一类边界条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=(\mu+i\alpha)\Delta u+u-(1+i\beta)|u(t-\tau)|^2u,\\ u(t,0)=u(t,\pi)=0,\\ u(x,s)=u_0(x,s)=\phi,\quad s\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{4}$$

及第二类边界条件下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=(\mu+i\alpha)\Delta u+u-(1+i\beta)|u(t-\tau)|^2u,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0,\pi}=0,\\ u(x,s)=u_0(x,s)=\phi,\quad s\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{5}$$

的渐近性态. 其中 $u(x,t)$ 是一复值泛函, μ 为正常数, α、β 为实系数, $\tau>0$

令 $u(x,t)=v(x,t)e^{-\beta t}$, 则(4)和(5)分别对应着

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=(\mu+i\alpha)\Delta v+(1+i\beta)v-(1+i\beta)|v(t-\tau)|^2v,\\ v(t,0)=v(t,\pi)=0,\\ v(x,s)=v_0(x,s)=\phi,\quad s\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{6}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}=(\mu+i\alpha)\Delta v+(1+i\beta)v-(1+i\beta)|v(t-\tau)|^2v,\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0,\pi}=0,\\ v(x,s)=v_0(x,s)=\phi,\quad s\in[-\tau,0]. \end{cases} \tag{7}$$

1 主要结论

首先讨论问题(4)常数平衡解的渐近性态.

定理 1 如果常数 $\mu > 1$,则 $\rho_0 = 0$是线性和非线性稳定;如果 $\mu < 1$,则 $\rho_0 = 0$是线性和非线性不稳定;如果 $\mu = 1$,则 $\rho_0 = 0$局部稳定.

证明 易得(6)、(7)的第一个方程在 ρ_0处的线性化方程为:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (\mu + i\alpha) z_{xx} + (1 + i\beta) z - (1 + i\beta)\rho_0^2 z(t - \tau) - (1 + i\beta) p_0^2 z - (1 + i\beta)\rho_0^2 \overline{z(t - \tau)}.$$

令 σ_k 为问题(6)的特征值且 $\sigma_k = a_k + ib_k$,则

$$\mu z_{xx} + z - \sigma_k z = 0, \tag{8}$$

得

$$a_k = - \mu k^2 + 1,\ k = 1, 2, 3, \cdots \tag{9}$$

因为 $\mu > 1$,所以 $a_k < 0$,从而 $\rho_0 = 0$线性稳定.

因为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u \|_{L^2}^2 \leqslant (- \mu + 1)\| u \|_{L^2}^2, \tag{10}$$

根据 Gronwall不等式得:

$$\| u \|_{L^2}^2 \leqslant \mathrm{e}^{-2(\mu - 1)t}\| \phi \|_{L^2}^2,$$

所以

$$\lim_{t\to\infty}\| u \|_{L^2} = 0,$$

所以 $\rho_0 = 0$在 $X = L^2$中非线性稳定.

如果 $\mu < 1$,当 $k = 1$,$a_1 > 0$,$\rho_0 = 0$线性不稳定.

以下通过如下引理证明平衡解 $\rho_0 = 0$当 $\mu < 1$时是非线性不稳定.

引理 1[7,8] 假设:

① X, Z是 2个巴拿赫空间且 $Z \subset X$, $\| u \|_X \leqslant C_1 \| u \|_Z$.

② L生成 X空间上一个强连续半群 $\mathrm{e}^{tL}: X \to Z$, 且

$$\int_0^1 \| \mathrm{e}^{tL} \|_{X\to Z}\,\mathrm{d}t = C_4 < \infty.$$

③存在 λ,使得 $\mathrm{Re}\lambda > 0$

④ $F: Z \to X$ 连续且存在 $\rho_0 > 0$, $C_3 > 0$, $\kappa > 1$,对于 $\| u \|_Z < \rho_0$有 $\| F(u) \| \leqslant C_3 \| u \|_Z^{\kappa}$.则 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = Lu + F(u)$的零解非线性不稳定.

因为 $k = 1$时, $a_1 > 0$, 故 $\rho_0 = 0$线性不稳定, 所以条件 ③满足.

令 $X = C([-\tau, 0]; L^2(\Omega))$, $Z = C([-\tau, 0]; L^6(\Omega))$, 条件 ①显然满足. 下证条件 ④.

令 $L = \mu\Delta + 1$,下证 $F(\cdot, u) = -| u(\cdot - \tau) |^2 u$连续.令 $\| u \|_Z$、$\| v \|_Z \leqslant \rho_0$,

$$\| F(\cdot, u) - F(\cdot, v) \|_X \leqslant \| \, | u(\cdot - \tau) |^2 u - | v(\cdot - \tau) |^2 v \|_X \leqslant$$
$$\{ \| u \|_Z + \| v \|_Z \} \| u - v \|_X \leqslant 2\rho_0 \| u - v \|_Z,$$

且根据 Hölder不等式得:

$$\| F(\cdot, u) \|_X^2 = \max_{[-\tau, 0]} \int | u(\cdot - \tau) |^4 | u |^2 \mathrm{d}x \leqslant \max_{[-\tau, 0]}\left(\int | u(\cdot - \tau) |^6 \right)^{\frac{2}{3}} \mathrm{d}x \left(\int | u |^6 \right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x \leqslant$$
$$\| u \|_Z^4 \| u \|_Z^2 = \| u \|_Z^6.$$

即

$$\| F(\cdot, u) \|_X \leqslant \| u \|_Z^3,$$

所以 ④得证.下证条件 ②.

令 $w = \mathrm{e}^{tL} u_0$,则 w 满足

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \mu\Delta w + w, \tag{11}$$

将方程(11)与 w 作内积得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2 = -2\mu\|\partial_x w\|_{L^2}^2 + 2\|w\|_{L^2}^2 \leqslant 2\|w\|_{L^2}^2, \tag{12}$$

所以有

$$\|w\|_{L^2}^2 \leqslant e^{2t}\|u_0\|_{L^2}^2. \tag{13}$$

将方程(12)两边关于时间从 0到 1积分得

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t = -2\int_0^1 \mu\|\partial_x w\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1\|w\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t, \tag{14}$$

得

$$\int_0^1\|\partial_x w\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mu}\left[\int_0^1\|w\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2\right],$$

所以由(13)得

$$\int_0^1\|\partial_x w\|_{L^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{1}{2}+e^2}\,\|u_0\|_{L^2}.$$

由 Sobolev嵌入定理得:

$$\int_0^1\|w\|_{L^6}\,\mathrm{d}t \leqslant C\int_0^1\|w\|_{H^1}\,\mathrm{d}t \leqslant C\int_0^1(\|w\|_{L^2} + \|\partial_x w\|_{L^2})\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_0^1\|w\|_{L^6}\,\mathrm{d}t \leqslant C\left(\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{1}{2}+e^2}\right)\|u_0\|_{L^2},$$

即

$$\int_0^1\|e^{tL}u_0\|_{L^6} \leqslant C\left(\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{1}{2}+e^2}\right)\|u_0\|_{L^2}\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_0^1\|e^{tL}\|_{L^2\to L^6}\,\mathrm{d}t \leqslant C\left(\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{1}{2}+e^2}\right) = C\left(e + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{1}{2}+e^2}\right).$$

故②成立.

所以由引理 1得:当 $\mu<1$时, $\rho_0=0$非线性不稳定.

如果 $\mu=1$, 我们有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|z\|_{L^2}^2=0$, 所以 $\|z\|_X=\|\phi\|_X$, 所以 $\rho_0=0$当 $\mu=1$时在 X 中局部稳定.

下面讨论问题(7)常数平衡解的渐近性态. 令 ρ_0为(7)的平衡解, 则

$$\begin{cases}(\mu+\mathrm{i}\alpha)\Delta\rho_0 + (1+\mathrm{i}\beta)\rho_0 - (1+\mathrm{i}\beta)\rho_0|\rho_0|^2 = 0,\\ \left.\dfrac{\partial\rho_0}{\partial x}\right|_{x=0,\pi} = 0\end{cases} \tag{15}$$

若 ρ_0为实常数, 则 $\rho_0=0, \pm1$.

1 当 $\rho_0=0$时, 不论 μ取任意值, 平衡解 $\rho_0=0$线性不稳定. 因为当 $\rho_0=0$时,

$$a_k = -\mu k^2 + 1,\ k=0,1,2,3,\cdots$$

当 $k=0$, $a_k>0$, 所以不论 μ取任意值都有 $\rho_0=0$线性不稳定.

2 当 $\rho_0=\pm1$时, 将其代入上面(7)的线性化方程, 得:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (\mu+\mathrm{i}\alpha)z_{xx} + (1+\mathrm{i}\beta)z(t-\tau) - (1+\mathrm{i}\beta)\overline{z(t-\tau)}. \tag{16}$$

令 $z=e^{\sigma_k t}(\gamma_1\cos(kx)+\mathrm{i}\gamma_2\cos(kx))$, 其中 σ_k 为(7)的特征值, 将其代入(16)得:

$$\sigma_k(\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2) = -k^2(\mu+\mathrm{i}\alpha)(\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2) - (1+\mathrm{i}\beta)e^{-\sigma_k\tau}(\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2) - (1+\mathrm{i}\beta)e^{\sigma(t-\tau)-\sigma t}\overline{\gamma_1+\mathrm{i}\gamma_2},$$

$$\sigma_k\gamma_1 = -k^2(\mu\gamma_1-\alpha\gamma_2) - e^{-a_k\tau}[\gamma_1\cos(b_k\tau) + \gamma_2\sin(b_k\tau) +$$
$$\gamma_1\cos(b_k\tau-2b_kt) + \gamma_2\sin(b_k\tau-2b_kt) - \beta\gamma_1\sin(b_k\tau-2b_kt) +$$

$$\beta\gamma_2\cos(b_k\tau-2b_kt)-\beta\cos(b_k\tau)\gamma_2+\beta\sin(b_k\tau)\gamma_1],$$

$$\begin{aligned}\sigma_k\gamma_2=&-k^2(\mu\gamma_2+\alpha\gamma_1)-e^{-a_k\tau}[-\gamma_1\sin(b_k\tau)+\gamma_2\cos(b_k\tau)+\\&\gamma_1\sin(b_k\tau-2b_kt)-\gamma_2\cos(b_k\tau-2b_kt)-\beta\gamma_2\sin(b_k\tau-2b_kt)+\\&\beta\gamma_1\cos(b_k\tau-2b_kt)+\beta\cos(b_k\tau)\gamma_1+\beta\sin(b_k\tau)\gamma_2],\end{aligned}$$

得:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=0,$$

其中

$$a_{11}=\sigma_k+\mu k^2+e^{-a_k\tau}[\cos(b_k\tau)+\cos(b_k\tau-2b_kt)-\beta\sin(b_k\tau-2b_kt)+\beta\sin(b_k\tau)],$$

$$a_{12}=-\alpha k^2+e^{-a_k\tau}[\sin(b_k\tau)+\beta\cos(b_k\tau-2b_kt)+\sin(b_k\tau-2b_kt)+\beta\cos(b_k\tau)],$$

$$a_{21}=\alpha k^2+e^{-a_k\tau}[-\sin(b_k\tau)+\beta\cos(b_k\tau-2b_kt)+\sin(b_k\tau-2b_kt)+\beta\cos(b_k\tau)],$$

$$a_{22}=\sigma_k+\mu k^2+e^{-a_k\tau}[\cos(b_k\tau)-\cos(b_k\tau-2b_kt)+\beta\sin(b_k\tau-2b_kt)+\beta\sin(b_k\tau)].$$

由 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$所对应的行列式得:

$$\sigma_k=-k^2-e^{-a_k\tau}\cos(b_k\tau)-\beta e^{-a_k\tau}\sin(b_k\tau)\pm$$
$$[(1+\beta^2)e^{-2a_k\tau}-(\alpha k^2-e^{-a_k\tau}\sin(b_k\tau)+\beta e^{-a_k\tau}\cos(b_k\tau))^2]^{\frac{1}{2}}.$$

定理 **2**　(Ⅰ)若 $\alpha=\beta=0$或 $\alpha=0, \beta\neq 0$, 当 $\mu>0$时, $\|z\|_{L^2}\to\left|\int_0^\pi z\,dx\right|(t\to\infty)$.

(Ⅱ)若 $\alpha>0, \beta=0, 0<\mu\leqslant 3$, 当 $\tau<\pi/2\alpha$, $\|z\|_{L^2}\to\left|\int_0^\pi z\,dx\right|(t\to\infty)$. 当 $\mu>3$时, $\|z\|_{L^2}\to\left|\int_0^\pi z\,dx\right|(t\to\infty)$.

(Ⅲ)若 $\alpha\beta>0, \beta^2<3$, 当 $\mu=1$时, $\alpha^2+2\alpha\beta>1$且$[\alpha^2+2\alpha\beta-1]\beta^2<4$, 存在充分小的 τ_0, 当 $\tau\in[0, \tau_0]$时, $\|z\|_{L^2}\to\left|\int_0^\pi z\,dx\right|(t\to\infty)$.

证明　(Ⅰ)假设 $\alpha=\beta=0$.

$$\sigma_k=-\mu k^2-e^{-a_k\tau}\cos(b_k\tau)\pm[e^{-2a_k\tau}(\cos^2(b_k\tau))]^{\frac{1}{2}},$$

由 $b_k=0$可得:

$$\sigma_k=-\mu k^2-2e^{-a_k\tau}\cos(b_k\tau)=-k^2-2e^{-a_k\tau}<0,$$

或者

$$\sigma_k=-k^2,\ k=0, 1, 2, 3, \cdots$$

当 $k\geqslant 1$时, $\sigma_k=-\mu k^2-2e^{-a_k\tau}<0$

当 $k=0$时, $\sigma_0=0$或 $\sigma_0=-2e^{-a_k\tau}<0$

若当 $k=0$时, $\sigma_0<0$, 则对于 $\forall k$, 有 $\sigma_k<0$, 显然 $\rho_0=\pm 1$稳定. 所以下面所有渐近性讨论只考虑当 $k=0$时, $\sigma_0=0$的情形.

令 $\varphi_k(k=0, 1, 2, 3, \cdots)$为 L^2内一组正交基, 将 z在基$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots\}$下展开, 即

$$z=\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{\sigma_k t}\varphi_k,$$

其中 $c_0=\int_0^\pi z\,dt$, 则

$$\|z\|_{L^2}^2=\|\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{\sigma_k t}\varphi_k\|_{L^2}^2=|c_0|^2+\sum_{k=0}^{\infty}|c_k^2e^{2\sigma_k t}|,$$

因为 $\sigma_0=0, \sigma_k<0(k\geqslant 1)$, 所以当 $t\to\infty$, $\|z\|_{L^2}\to|c_0|$.

若 $\alpha=0, \beta\neq 0$

$$\sigma_k=-k^2-e^{-a_k\tau}\cos(b_k\tau)-\beta e^{-a_k\tau}\sin(b_k\tau)\pm\sqrt{(1+\beta^2)e^{-2a_k\tau}-e^{-2a_k\tau}(\sin(b_k\tau)-\beta\cos(b_k\tau))^2}.$$

因为根号内数 $\geqslant 0$, 即 $b_k=0$, 所以

$$\sigma_k = -k^2 - 2e^{-a_k\tau} - k^2.$$

由于特征值和 $\alpha=\beta=0$情况下所得的特征值一样，所以和上面具有同样的结论，即当 $t\to\infty$，$\|z\|_{L^2}\to |c_0|$.

(Ⅱ) 假设 $\alpha>0$，$\beta=0$

$$\sigma_k = -k^2 - e^{-a_k\tau}\cos(b_k\tau) \pm [e^{-2a_k\tau}\cos^2(b_k\tau) - \alpha^2k^4 + 2\alpha e^{-a_k\tau}\sin(b_k\tau)k^2]^{\frac{1}{2}}.$$

不妨先讨论当 $\mu=1$时：

若根号内数大于或等于零，即 $b_k=0$，则

$$a_k = -k^2 - e^{-a_k\tau} \pm (-\alpha^2k^4 + e^{-2a_k\tau})^{\frac{1}{2}} < 0,$$

所以，根号内的数大于或等于零不影响使得平衡解具有渐近性态的 τ的范围.

如果根号内数小于零，

$$a_k = -k^2 + e^{-a_k\tau}\cos(b_k\tau),$$

$$b_k = \sqrt{\alpha^2k^4 - e^{-2a_k\tau}\cos^2(b_k\tau) - 2\alpha k^2e^{-a_k\tau}\sin(b_k\tau)},$$

因为当 $k\geqslant 2$时，用反证法易证 $a_k<0$，当 $k=0$时，$a_k=0$或 <0，所以要保证 $a_k<0(k=0,1,2,\cdots)$的 τ的范围只需求当 $k=1$时保证 $a_1<0$的 τ的范围.

若能保证 $\cos(b_1\tau)>0$，则必能保证 $a_1<0$，下面求 $\cos(b_1\tau)>0$的 τ的范围.

$$\cos(b_1\tau)>0 \Rightarrow 0<b_1\tau<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(b_1\tau)>0,$$

$$b_1 = \sqrt{\alpha^2 - e^{-2a_1\tau}\cos^2(b_1\tau) - 2\alpha e^{-a_1\tau}\sin(b_1\tau)}.$$

因为 $\alpha>0$，所以 $b_1\leqslant\alpha$，所以只要保证 $\tau<\pi/2\alpha$，则能保证 $\tau<\pi/2b_1$，从而能保证 $a_1<0$，即 $k=1$时，当 $\tau<\pi/2\alpha$时，$a_1<0$，所以当 $\tau<\pi/2\alpha$时，$\|z\|_{L^2}\to\left|\int_0^\pi z\mathrm{d}x\right|(t\to\infty)$.

当 $0<\mu<1$或 $1<\mu\leqslant 3$时，与 $\mu=1$时，有同样结果.

若 $\mu>3$，此时

$$\sigma_k = -\mu k^2 - e^{-a_k\tau}\cos(b_k\tau) \pm [e^{-2a_k\tau}\cos^2(b_k\tau) - \alpha^2k^4 + 2\alpha e^{-a_k\tau}\sin(b_k\tau)k^2]^{\frac{1}{2}}.$$

若 $a_k\geqslant 0$，由

$$-\alpha^2k^4 + 2\alpha e^{-a_k\tau}k^2\sin(b_k\tau) \leqslant 2\alpha k^2 - \alpha^2k^4 < 1,$$

得根号内的数小于或等于 $e^{-2a_k\tau}\cos^2(b_k\tau)+1$，则

$$a_k < -\mu k^2 + 2e^{-a_k\tau}|\cos(b_k\tau)| + 1 < -\mu + 2 + 1 < 0$$

与假设矛盾. 所以 $a_k<0$，$k=1,2,3,\cdots$

当 $k=0$时，$\sigma(0)=0$或 <0，则当 $t\to\infty$，$\|z\|_{L^2}\to\left|\int_0^\pi z\mathrm{d}x\right|$.

(Ⅲ) $\alpha\beta>0$，$\beta^2<3$，$\alpha^2+2\alpha\beta>1$且 $[\alpha^2+2\alpha\beta-1]\beta^2<4$

若 $\mu=1$，此时

$$\sigma_k = -k^2 - e^{-a_k\tau}\cos(b_k\tau) - \beta e^{-a_k\tau}\sin(b_k\tau) \pm (-\alpha^2k^4 + e^{-2a_k\tau}\cos(b_k\tau)^2 - 2\alpha\beta e^{-a_k\tau}k^2$$
$$\cos(b_k\tau) + 2\alpha e^{-a_k\tau}k^2\sin(b_k\tau) + \beta e^{-2a_k\tau}\sin(2b_k\tau) + \beta^2e^{-2a_k\tau}\sin^2(b_k\tau))^{\frac{1}{2}}.$$

如果根号内数大于或等于零，即 $b_k=0$，

$$a_k = -k^2 - e^{-a_k\tau} \pm (-\alpha^2k^4 + e^{-2a_k\tau} - 2\alpha\beta e^{-a_k\tau}k^2)^{\frac{1}{2}} < 0,$$

即只要根号内数大于或等于零是不会影响稳定性的讨论，所以存在根号内数大于零或不存在根号内数大于零是不会影响讨论结果的，可以去掉根号内数大于或等于零的情况来考虑.

如果根号内数小于零，

$$a_k = -k^2 - (1+\beta^2)^{\frac{1}{2}}e^{-a_k\tau}\sin(b_k\tau+\varphi),\ \tan\varphi = \frac{1}{\beta}.$$

当 $k\geqslant 2$时，由 $\beta^2<3$，易证 $a_k<0$，而 $k=0$时 $a_0<0$或 $a_0=0$，所以只需证当 $k=1$时使 $a_k<0$的 τ的范围.

当 $k = 1$,

$$a_1 = -1 - e^{-a_1\tau}\cos(b_1\tau) - \beta e^{-a_1\tau}\sin(b_1\tau),$$

$$b_1 = [\alpha^2 - e^{-2a_1\tau}\cos^2(b_1\tau) + 2\alpha\beta e^{-a_1\tau}\cos(b_1\tau) - 2\alpha e^{-a_1\tau}\sin(b_1\tau) - \beta e^{-2a_1\tau}\sin(2b_1\tau) - \beta^2 e^{-2a_1\tau}\sin^2(b_1\tau)]^{\frac{1}{2}}.$$

当 $\tau = 0$时,

$$a_1(0) = -1 - e^{-a_1\tau} = -2 < 0$$

令

$$f = a_1 + e^{-a_1\tau} + 1,$$

$$g = b_1 - [\alpha^2 - e^{-2a_1\tau}\cos^2(b_1\tau) + 2\alpha\beta e^{-a_1\tau}\cos(b_1\tau) - 2\alpha e^{-a_1\tau}\sin(b_1\tau) - \beta e^{-2a_1\tau}\sin(2b_1\tau) - \beta^2 e^{-2a_1\tau}\sin^2(b_1\tau)]^{\frac{1}{2}},$$

$$J|_{\tau=0} = \begin{vmatrix} df/da_1 & dg/da_1 \\ df/db_1 & dg/db_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

所以存在 τ_0充分小. 当 $\tau < \tau_0$时, 可令

$$a_1 = a_{10} + a_{11}\tau + o(\tau),\ b_1 = b_{10} + b_{11}\tau + o(\tau),$$

$$a_{10} = a_1|_{\tau=0} = -2,\ b_{10} = \sqrt{\alpha^2 - 1 + 2\alpha\beta},$$

$$a_{11} = \left.\frac{da_1}{d\tau}\right|_{\tau=0} = -2 - \beta b_1|_{\tau=0} = -2 \pm \beta\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta - 1}.$$

若 $[\alpha^2 + 2\alpha\beta - 1]\beta^2 < 4$,则

$$a_{11} < 0,\ a_{10} + a_{11}\tau < 0,$$

故存在 τ_0充分小, 使得 $\tau \in [0, \tau_0]$有 $a_1 < 0$.

所以当 $\tau \in [0, \tau_0]$有 $a_k < 0 (k = 1, 2, 3, \cdots)$, 而 $a_0 = 0$或 < 0,类似可得当 $\tau \in [0, \tau_0]$时 $\|z\|_{L^2} \to \left|\int_0^\pi z dx\right| (t \to \infty)$.

[注] 对复常数平衡解来说, 有类似的渐近性态.

[参考文献]

[1] Doering C, Gibbon J D, Holm D, et al. Low-dimensional behavior in the complex Ginzburg-Landau equation[J]. Nonlinearity, 1988, 1(2): 279-309.

[2] Ghidaglia J M, Heron B. Dimension of the attractor associated to the Ginzburg-Landau equation[J]. Physics D, 1987, 28(3): 282-304.

[3] Jinbo S C, Morita Y. Theory and applications of partial functional differential equations to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Application, 1994, 22(6): 753-770.

[4] Casten R G, Holland C J. Instability results for reaction diffusion equation with Neumann boundary conditions[J]. Journal of Differential Equations, 1978, 27(2): 266-273.

[5] Wu J H. Theory and applications of partial functional differential equations[M] // Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1996.

[6] Casal A C, Diaz J I. On the complex Ginzburg-Landau equation with a delayed feedback[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2006, 16(1): 1-17.

[7] Strauss W, Wang G. Instability of traveling waves of the Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. China Annual Math B, 2002, 23(2): 267-276.

[8] Gao H J, Liu C C. Instability of traveling waves of the Convective-Diffusive Cahn-Hilliard equation[J]. Chaos, Solitions and Fractals, 2004, 20(2): 253-258.

[责任编辑: 丁　蓉]