

非薄板腐蚀探测问题的数值解法

陈 宇, 黄建国

(上海交通大学数学系, 上海 200240)

[摘要] 腐蚀探测问题是一个数学物理方程反问题, 它通过外边界上可获知的电场数据反演求解腐蚀系数. 通常所涉及的数据是带有噪声误差的. 在无需假设板或管的厚度很薄的条件下, 提出了一个基于 Dirichlet-Neumann 条件求解腐蚀系数的变分模型. 该模型最终由最优化领域中的拟牛顿迭代法实现数值求解. 给出若干理论分析, 并用数值实验结果说明求解方法的可行有效性.

[关键词] 有限元, 拟牛顿法, 反问题, 正则化

[中图分类号] O 242 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008) 04-0029-04

Numerical Method for Corrosion Detection Problem in Non-Sheet Case

Chen Yu, Huang Jianguo

(Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract The problem of recovering the corrosion coefficient in an inaccessible interior part from the electric information in an accessible part of a physical domain is studied, which is a typical inverse problem in mathematical physics. Usually, the prescribed data have noise error. A variational formulation is proposed to derive the corrosion coefficient based on the Dirichlet-Neumann data on the accessible part. The quasi-Newton iterative method in optimization is used to solve the numerical solution of this variational problem. Some theoretical analysis is provided, and the numerical experiment shows that the method is effective.

Key words finite element, Quasi-Newton Method, inverse problems, regularization

探测固体材料 (内部) 不可接触区域腐蚀程度的问题具有重要理论意义和直接应用价值. 特别地, 此类问题是无损伤探测研究的基本问题. 本文所考虑的是具有传导性的金属材料区域. 若在可接触区域施加一定的电流, 这时会在区域内部产生一个电场, 且其电位势满足 Laplace 方程. 本文给出了一种通过可测量的电位势和电流数据, 判断不可见区域腐蚀情况的数值方法.

1 问题的描述

考虑文献 [1] 中的腐蚀探测问题模型:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0 \quad (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= g_C(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_C, \\ \partial_n u(x, y) &= \phi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_C, \\ u(x, y) &= g_D(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_D, \\ \partial_n u(x, y) + \gamma(x, y)u(x, y) &= 0 \quad (x, y) \in \Gamma_b,\end{aligned}$$

其中, Ω 是 R^d ($d = 2, 3$) 中的 Lipschitz 区域, n 是指向边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 的单位外法向量, u 是电位势, $\phi(x, y)$ 是已知电流密度. 当 Ω 是长方形时, 已有不少数值方法, 包括薄板逼近法 (TPA)、Galerkin 方法和准可逆法等等^[1, 2, 3], 用于求解腐蚀系数 γ . 其中 TPA 是一个参数展开方法, 当矩形的宽十分小的时候, 它有很好的

收稿日期: 2007-11-18

通讯联系人: 陈 宇, 博士, 研究方向: 计算数学. E-mail: dabouxy@sjtu.edu.cn

的拟合效果^[1]. 该文也做出了相关的误差估计. 当 Ω 是一个圆环域时, 类似文献 [1] 中的技巧, 文献 [4] 也提出了基于小参数展开的数值计算方法, 其理论估计在文献 [5] 中详细展开. 本文则提出了一种新的数值解法来求解一般情形, 即无需假设板或管的厚度十分小, 同时也不局限于矩形这一类规则区域. 我们借助于文献 [6-7] 提出的 Dirichlet-Neumann 映射 (又称 Steklov-Poincaré 算子) 的思想将原问题改写为一个优化问题, 然后用拟牛顿迭代法实现数值求解, 从而获得求解腐蚀探测问题的一个新型数值方法.

2 基本理论

考虑问题的一般情形如下:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= g_c(x,y), & (x,y) \in \Gamma_c, \\ \partial_n u(x,y) &= \phi_c(x,y), & (x,y) \in \Gamma_c, \\ u(x,y) &= g_D(x,y), & (x,y) \in \Gamma_D, \\ \partial_n u(x,y) + \gamma(x,y)u(x,y) &= \phi_I(x,y), & (x,y) \in \Gamma_I. \end{aligned} \tag{1}$$

我们假设 Γ 分成 3 部分 Γ_D 、 Γ_c 和 Γ_I , 每个部分都是非零测度, 并假设 Γ_c 和 Γ_I 没有公共端点 (2 维) 或公共边 (3 维), 也就是说它们被 Γ_D 分开 (见图 1).

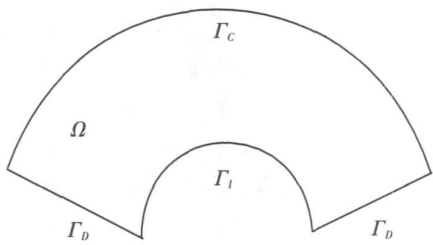


图 1 几何区域的一个举例
Fig.1 An example of the geometry

为求解该问题, 首先引进空间 $V = H^1(\Omega)$ 及其子空间 $V_{\Gamma_c} = \{v \in V \mid v = 0 \text{ a.e. in } \Gamma_c\}$, $V_{\Gamma_D} = \{v \in V \mid v = 0 \text{ a.e. in } \Gamma_D\}$. 对任意的 γ 我们定义 $u_D(\gamma)$ 为对应 Γ_c 上 Dirichlet 条件的解, 即为以下问题的解:

$$\begin{aligned} \Delta u_D(x,y) &= f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u_D(x,y) &= g_c(x,y), & (x,y) \in \Gamma_c, \\ u_D(x,y) &= g_D(x,y), & (x,y) \in \Gamma_D, \\ \partial_n u_D(x,y) + \gamma(x,y)u_D(x,y) &= \phi_I(x,y), & (x,y) \in \Gamma_I. \end{aligned} \tag{2}$$

其变分形式为: 找 $u \in (g_D + V_{\Gamma_D}) \cap (g_c + V_{\Gamma_c})$, 满足

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy + \int_{\Gamma} \gamma u v \, ds = \int_{\Gamma} \phi_I v \, ds - \int_{\Omega} f v \, dx \, dy, \quad \forall v \in V_{\Gamma_D} + V_{\Gamma_c} \tag{3}$$

另一方面, 记 $u_N(\gamma)$ 为对应 Γ_c 上 Neumann 条件的解, 即为以下问题的解

$$\begin{aligned} \Delta u_N(x,y) &= f(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ \partial_n u_N(x,y) &= \phi_c(x,y), & (x,y) \in \Gamma_c, \\ u_N(x,y) &= g_D(x,y), & (x,y) \in \Gamma_D, \\ \partial_n u_N(x,y) + \gamma(x,y)u_N(x,y) &= \phi_I(x,y), & (x,y) \in \Gamma_I, \end{aligned} \tag{4}$$

其变分形式为: 找 $u \in g_D + V_{\Gamma_D}$, 满足

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy + \int_{\Gamma} \gamma u v \, ds = \int_{\Gamma} \phi_c v \, ds + \int_{\Gamma} \phi_I v \, ds - \int_{\Omega} f v \, dx \, dy, \quad \forall v \in V_{\Gamma_D}. \tag{5}$$

我们考虑求解如下优化问题:

$$\min_{\gamma \in V_{ad}} J(\gamma) = \|u_D(\gamma) - u_N(\gamma)\|_{H^1(\Omega)}^2, \tag{6}$$

其中 $V_{ad} = L^\infty(\Gamma_I)$ 定义为 γ 的一个容许空间, $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ 表示 $H^1(\Omega)$ 半范数.

先来研究腐蚀问题 (1) 和优化问题 (6) 之间的关系.

定理 1 假设存在腐蚀系数 $\gamma \in V_{ad}$ 使问题 (2) 有惟一解 u , 那么柯西问题 (2) 等价于优化问题 (6).

证明 设 u 是腐蚀问题 (1) 的解, 记 $\gamma^* = \frac{\phi_I(x) - \partial_n u}{u}$. 那么 $u_D = u_N = u$ 显然是问题 (2) (或 (3))

和 (4) (或 (5)) 对应于此 γ^* 的解. 在这样的选择下, 有 $J(\gamma^*) = 0$ i.e. γ^* 是问题 (6) 的解.

如果 γ 是问题 (6) 的解, 则有

$$0 \leq J(\gamma) \leq J(\gamma^*) = 0$$

所以, 令 $v = u_D - u_N$, 可知

$$\Delta v(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$v(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_D,$$

$$\partial_n v(x, y) + \gamma(x, y)v(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_L.$$

再结合 $|v|_{H^1(\Omega)} = 0$ 可以得到 v 在 Ω 中恒为 0 于是 $u = u_D = u_N$ 就是问题 1 的解. 命题得证.

注 1 由于测量数据通常是带有噪声的, 也可以考虑通过添加正则化项来开展研究. 譬如说定义优化泛函为:

$$\min_{\lambda \in V_{ad}} J(\lambda) = |u_D - u_N|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha |\lambda|_{H^1(\Gamma_L)}^2,$$

其中 α 为正则化参数. 该方法的进一步求解类似无正则化情形, 这里不详细展开.

3 方向梯度计算公式和数值实验结果

考虑用拟牛顿法来求解优化问题 (6), 首先需要计算非线性泛函 J 的方向梯度. 由方向导数的定义知泛函 J 在 λ 处沿方向 μ 的梯度为

$$\langle \dot{J}(\lambda), \mu \rangle = \frac{d}{dt} J(\lambda + t\mu) \big|_{t=0}, \quad (7)$$

于是有

$$\frac{d}{dt} J(\lambda + t\mu) = 2 \int_{\Omega} \dot{J}(u_D(\lambda + t\mu) - u_N(\lambda + t\mu)) \cdot \dot{J}(u_D(\lambda) - u_N(\lambda)).$$

记 $u'_D(\lambda)\mu = \frac{d}{dt} u_D(\lambda + t\mu) \big|_{t=0}$ 可知 $u'_D(\lambda)\mu$ 满足以下问题:

$$\Delta(u'_D(\lambda)\mu) = 0 \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u'_D(\lambda)\mu = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_C,$$

$$u'_D(\lambda)\mu = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_D,$$

$$\partial_n(u'_D(\lambda)\mu) + \lambda(u'_D(\lambda)\mu) + \mu u_D(\lambda) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_L.$$

类似地, 记 $u'_N(\lambda)\mu = \frac{d}{dt} u_N(\lambda + t\mu) \big|_{t=0}$, 则 $u'_N(\lambda)\mu$ 满足以下问题:

$$\Delta(u'_N(\lambda)\mu) = 0 \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\partial_n(u'_N(\lambda)\mu) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_C,$$

$$u'_N(\lambda)\mu = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_D,$$

$$\partial_n(u'_N(\lambda)\mu) + \lambda(u'_N(\lambda)\mu) + \mu u_N(\lambda) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_L.$$

于是

$$\langle \dot{J}(\lambda), \mu \rangle = 2 \int_{\Omega} (u'_D(\lambda)\mu - u'_N(\lambda)\mu) \cdot \dot{J}(u_D(\lambda) - u_N(\lambda)).$$

这样可以通过求解 4 个椭圆问题得到泛函 J 的方向梯度, 从而利用 Matlab 软件自带的拟牛顿法工具包来实现问题的求解. 我们应用有限元方法来求解这些椭圆型方程并进行数值模拟. 设 T^h 是 Ω 的一族正规有限元剖分, 它与 $\partial\Omega = \Gamma_I \cup \Gamma_D \cup \Gamma_C$ 相容. 记 V^h 是对应的连续型分片线性元空间, 并且记 $\gamma^h \in V_{ad}^h$ 是与之对应的分片常数空间. 那么问题 (2)、(4) 和 (6) 都可以转化成相应有限元空间中的离散化问题.

现给出具体的数值例子以说明算法的计算效果. 为了便于算法实现, 特取 $\Omega = (0, 1) \times (0, a)$, $\Gamma_C = [0, 1] \times \{1\}$, $\Gamma_I = [0, 1] \times \{0\}$, $\Gamma_D = \{0, 1\} \times [0, 1]$. 此时, 腐蚀系数 $\gamma(x, y)$ 就可以简化表示为 $\gamma(x)$. 函数不妨取为 $u(x, y) = (x-1)^2 + y^2$, 真解为 $\gamma(x) = e^{-100 \times (x-0.25)^2}$, 通过计算很容易得到 $f, g_C, g_D, \phi_C, \phi_I$ 的值. 这里并不一定要求 a 充分小. 图 2 列举了不同 a 所对应的数值结果, 说明该方法的确有效地解决了此类腐蚀系数问题. 然而随着 a 的增大, 数值拟合的效果确实会变差.

注 2 为了加快优化迭代的速度, 对腐蚀系数 γ 的拟合采用了分片常数而不是一般的线性元. 在寻优结束后, 可以将所得结果看成是 γ 在给定区间上带有噪声的均值条件. 于是利用文献 [8] 中的样条函数方法便得到最终结果.

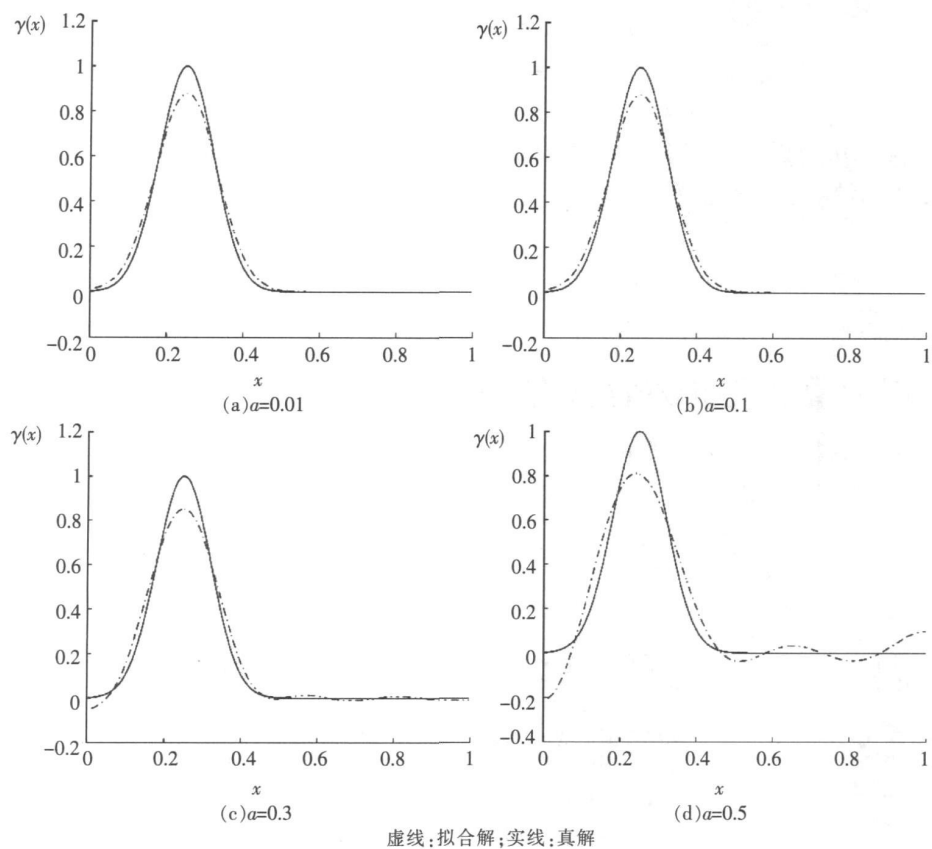


图 2 腐蚀系数 $\gamma(x)$ 的数值解

Fig.2 The solutions to the corrosion coefficient $\gamma(x)$

4 结论

本文所给出的数值算法适用于各种区域, 并且通过利用基于带噪声均值条件的样条函数拟合方法, 大大加快了优化的速度. 数值实验的结果证明了该方法是可行且有效的.

[参考文献]

[1] Inglese G. An inverse problem in corrosion detection[J]. Inverse Problems, 1997, 13(4): 977-994.

[2] Fasino D, Inglese G. Discrete methods in the study of an inverse problem for Laplace's equation[J]. MA J Numerical Analysis, 1999, 19(1): 105-118.

[3] Fasino D, Inglese G. An inverse Robin problem for Laplace's equation: theoretical results and numerical methods[J]. Inverse Problems, 1999, 15(1): 41-48.

[4] Yang X, Cheng J. An inverse problem in detecting corrosion in a pipe[J]. Journal of Ningxia University: Natural Science Edition, 2003, 24(3): 215-217.

[5] Huang X, Huang J, Chen Y. Error analysis of a parameter expansion method for corrosion detection in a pipe[J]. Computers and Mathematics With Applications, 2008, 56(10): 2539-2549.

[6] Belgacem F B, Fekih H E. On Cauchy's problem: I. A variational Steklov-Poincare theory[J]. Inverse Problems, 2005, 21(6): 1915-1936.

[7] Azaiez M, Belgacem F B, Fekih H E. On Cauchy's problem: II. Completion, regularization and approximation[J]. Inverse Problems, 2006, 22(4): 1307-1336.

[8] Huang J, Chen Y. A regularization method for the function reconstruction from approximate average fluxes[J]. Inverse Problems, 2005, 21(5): 1667-1684.

[责任编辑: 丁 蓉]