L_p 等周不等式及其逆形式

袁 俊

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] R^n 中的所有给定体积的几何体中,球的表面积最小. 在模仿射变换意义下, 单形的表面积最大. 本文将这结果推广到 L_p 空间.

[关键词] 等周不等式, 等周商, 体积比

[中图分类号] O186.5 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)02-0022-03

L_p Isoperimetric Inequality and Its Reverse Form

Yuan Jun

(School of Mathematical Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract Among convex bodies of given volume, precisely the ball has the minimal surface area and simplice has the largest surgace area under modulo affine transformations. In this paper, we generalize it to L_p space.

Key words isoperimetric inequality, affine isoperimetric ration, volume ration

经典的等周不等式描述的是: 在 R^n 中的所有给定体积的几何体中,球的表面积最小. 等周不等式的简洁与深刻使得它一直是几何学家灵感的源泉之一. 平面情形的研究甚至可追溯到古代,而流形上各种等周不等式的研究却是现代几何学的重要内容.

等周不等式的研究有十分丰富的文献,两部专著[1,2]及综述论文[3]中有大量列举. Ball的逆向等周不等式是其中众多研究成果中的瑰宝.

上世纪 30年代,关于凸体的等周不等式的逆问题就已经提出来了. 注意到即使对于凸体也存在很小的体积但表面积很大的现象,因此提出等周不等式的逆问题的一个最自然的方式就是考虑凸体的仿射等价类. 1991年, Ball[4]对凸体的等周不等式的逆问题给出了肯定的回答. 利用一个强有力的工具 —— Brascamp和 Lieb在 1976年建立的关于卷积的一个不等式, Ball证明了他的逆等周不等式. Ball的逆等周不等式可简洁地描述为: 在模仿射变换意义下, 在给定体积的所有凸体中,单形的表面积最大. 我们用 $V(K)$、$S(K)$ 分别表示凸体 K 的体积和表面积, 则

定理 **A** 设 K 是 R^n 中的一个凸体, T 是 R^n 中的一个 n 维正则单形, 则存在 K 的一个仿射像 K 使得

$$V(K) = V(T) \text{ 且 } S(K) \leqslant S(T).$$

L_p-Brunn-Minkowski理论起源于 Firey[5] 于 1962年定义的凸体的 Firey L_p-组合 (又称为 Firey线性组合), 该理论的建立归功于著名数学家 Lutwak E. 1993年, Lutwak在文献[6]中把凸体的 Firey L_p-组合引入到经典的 Brunn-Minkowski理论, 提出了 L_p-混合体积、L_p-表面积测度和 L_p-混合表面积测度等概念,并建立了相应的积分表达式. 从而把经典的 Brunn-Minkowski理论推广到 L_p 空间中进行研究.

在该理论研究领域,国际上异常活跃的领军人物当数 Lutwak E, Yang D, Zhang G Y(华裔数学家张高勇教授) 及 Gardner R J等著名数学家, 他们先后引入了 L_p-质心体[7]、L_p-投影体[8], 并系统地研究了 L_p-Sobolev不等式[9]、L_p-仿射等周不等式[8]、L_p-Minkowski问题[10] 等. 最近 10多年来, L_p-Brunn-Minkowski理论得到飞速发展, 已成为当今国际上几何分析的热点研究领域之一[7-11].

收稿日期: 2008-10-18

基金项目: 江苏省博士后基金 (0801043C)资助项目.

通讯联系人: 袁 俊, 博士后, 讲师, 研究方向: 几何分析、凸体几何. E-mail: yuanjun_math@126.com

本文的主要工作是将等周不等式推广到 L_p 空间. 下面我们从另外的视角来理解 Ball的逆等周不等式定理. 为此引进凸体的等周商的概念.

设 K 是 R^n 中的一个凸体, $SL(n)$ 表示保体积的仿射变换的集合, 则 K 的等周商 $I(K)$ 可定义为[12]

$$I(K)=\inf_{\phi\in SL(n)}\frac{S^n(\phi K)}{V^{n-1}(\phi K)}.$$

易见, K 的等周商 $I(K)$ 是仿射不变量, 且不难看出 Ball的逆等周不等式实际上等价于命题: K 的等周商 $I(K)$ 当 K 是单形时达到最大值. 亦即对 n 维单形 T 有

$$I(K)\leqslant I(T). \tag{1}$$

设 K 是 R^n 中的一个凸体. 定义 K 的 L_p 等周商 $I_p(K)$ 为

$$I_p(K)=\inf_{\phi\in SL(n)}\frac{S_p^n(\phi K)}{V^{n-p}(\phi K)},$$

其中, $S_p(K)$ 表示 K 的 L_p 表面积 (具体定义见 (7)). 应用 L_p 等周商的概念, 我们建立了 L_p 等周不等式及其逆形式: K 的 L_p 等周商 $I_p(K)$, 当 K 是单形时达到最大值, 当 K 是球时取到最小值. 即

定理 1　设 K 是 R^n 中的一个凸体, Δ_n 是以单位球 B_n 为其内切球的一个正则单形. 则有

$$I_p(B_n)\leqslant I_p(K)\leqslant I_p(\Delta_n). \tag{2}$$

1　准备知识

我们考虑欧几里德空间 R^n, 其中 B_n 与 S^{n-1} 分别表示 R^n 中的单位球及单位球面. $V(\cdot)$ 表示相应维数中的体积.

设 K 是 R^n 中一个凸体 (具有非空内点的紧凸集), 则 K 的支撑函数 h_K 定义为

$$h_K(u)=\max\{u\cdot x: x\in K\},\ u\in S^{n-1}, \tag{3}$$

其中 $u\cdot x$ 表示 u 和 x 的标准内积.

在文献 [5] 中, Firey推广了 Minkowski加法的概念, 对凸体 K、L 和实数 $p\geqslant 1$ 引进了 L_p - Minkowski组合的概念:

$$h(K+_pL,\cdot)^p=h(K,\cdot)^p+h(L,\cdot)^p. \tag{4}$$

对于 $p\geqslant 1$, Lutwak[6] 定义了凸体 K、L 的 L_p 混合体积 $V_p(K,L)$:

$$\frac{n}{p}V_p(K,L)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{V(K+_p\varepsilon\cdot L)-V(K)}{\varepsilon}. \tag{5}$$

关于 L_p - 混合体积的 Minkowski不等式[6] 可表述为: 对于凸体 K, L, 有

$$V_p(K,L)\geqslant V(K)^{\frac{n-p}{n}}V(L)^{\frac{p}{n}}, \tag{6}$$

其中等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀.

类似于凸体 K 的表面积的定义, 我们引入 K 的 L_p - 表面积 $S_p(K)$ 如下:

$$\frac{1}{p}S_p(K)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{V(K+_p\varepsilon\cdot B_n)-V(K)}{\varepsilon}. \tag{7}$$

在文献 [6] 中有, 对应于每一个包含原点在其内部的凸体 $K\in R^n$, 都存在一个定义在 S^{n-1} 上的正的 Borel测度 $S_p(K,\cdot)$, 使得

$$V_p(K,Q)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h_Q(u)^p\,\mathrm{d}S_p(K,u), \tag{8}$$

对所有的凸体 Q 都成立. 同时在文献 [6] 中, 作者证明了 L_p - 表面积测度 $S_p(K,\cdot)$ 对应于表面积测度 $S(K,\cdot)$ 绝对连续且 Radon-Nikodym 导数为:

$$\frac{\mathrm{d}S_p(K,\cdot)}{\mathrm{d}S(K,\cdot)}=h_K(\cdot)^{1-p}. \tag{9}$$

由 (5), (6), (7) 可得:

$$S_p(K)=nV_p(K,B_n)=\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}S_p(K,u), \tag{10}$$

$S_1(K)$即为经典的 K 的表面积且通常记为 $S(K)$.

凸几何中一个重要的椭球是 John椭球:含在凸体K内的体积最大的椭球称为凸体K的 John椭球,该椭球是惟一的,记为 JK. 当 K 的 John椭球 JK 是单位球 B_n 时,我们称 K 处于 John位置.

设 K 是 R^n 中的一个凸体,则 K 的体积比 $vr(K)$ 可定义为[1]:

$$vr(K)=\left(\frac{V(K)}{V(JK)}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

2　定理的证明

为了证明定理,我们需要下面的引理:

引理 1　K 的体积比 $vr(K)$ 当 K 是单形时达到最大值,亦即对 n维单形 T 有

$$vr(K)\leqslant vr(T). \tag{11}$$

引理 2　设 Δ_n 是外切于单位球 B_n 的正则单形. 则

$$S_p(\Delta_n)=S(\Delta_n). \tag{12}$$

证明　设M 是 R^n 中的凸多胞形,$\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_N$ 是 P 的 $n-1$维面的外法向量,$a_1,\cdots,a_N$是对应面的面积,$h_1,\cdots,h_N$ 是原点到对应面的距离. 则由(9)知测度 $S_p(M,\cdot)$ 集中在点 $u_1,\cdots,u_N\in S^{n-1}$ 上,并且 $S_p(M,u_i)=a_i/h_i^{1-p}$. 因此对于凸多胞形M,我们有[8]

$$S_p(M)=\int_{S^{n-1}}\mathrm{d}S_p(M,u)=\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{h_i^{1-p}}. \tag{13}$$

令 $M=\Delta_n$,并注意到 Δ_n 外切于单位球 B_n,从而原点到各个 $n-1$维面的距离都是 1.因此

$$S_p(\Delta_n)=\sum_{i=1}^{N}a_i=S(\Delta_n).$$

定理 1的证明

我们首先证明(2)的左边:因对所有的 $u\in S^{n-1}$,$h_{B_n}(u)=1$. 从而由(9)可得 $S_p(B_n)=S(B_n)$,$nV(B_n)=S(B_n)$. 对任意的 $\phi\in SL(n)$,由 Minkowski不等式(6)可得:

$$\frac{S_p^n(\phi K)}{V(\phi K)^{n-p}}=\frac{[nV_p(\phi K,B_n)]^n}{V(\phi K)^{n-p}}\geqslant n^nV(B_n)^p=I_p(B_n).$$

两边取最小值,得到 $I_p(K)\geqslant I_p(B_n)$.

下面证明(2)的右边:对于每一个凸体 K 都存在 K 的一个仿射像 K,使得 K 处于 John位置.

设 Δ_n 是外切于单位球 B_n 的正则单形. 这时上述的体积比定理(11)可等价叙述为:若 K 处于 John位置,则 $V(K)\leqslant V(\Delta_n)$.

因为 $B_n\subseteq K$,所以有

$$S_p(K)=P\cdot\lim_{\varepsilon\to0}\frac{V(K+_p\varepsilon B_2^n)-V(K)}{\varepsilon}\leqslant P\cdot\lim_{\varepsilon\to0}\frac{V(K+_p\varepsilon K)-V(K)}{\varepsilon}=$$

$$PV(K)\lim_{\varepsilon\to0}\frac{(1+\varepsilon)^{\frac{n}{p}}-1}{\varepsilon}=nV(K),$$

又 $S_p(\Delta_n)=S(\Delta_n)=nV(\Delta_n)$,因此

$$I_p(K)=I_p(K)\leqslant\frac{S_p^n(K)}{V^{n-p}(K)}\leqslant n^nV^p(K)\leqslant n^nV^p(\Delta_n)=\frac{S_p^n(\Delta_n)}{V^{n-p}(\Delta_n)}=I_p(\Delta_n).$$

由定理 1,我们可以得到下述 L_p-型等周不等式以及它的逆向不等式:

推论 1　设 K 是 R^n 中的一个凸体且 $V(K)=V(B_n)$,则有

$$S_p(B_n)\leqslant S_p(K).$$

推论 2　设 K 是 R^n 中的一个凸体,Δ_n是以 B_n 为其内切球的一个正则单形. 则存在一个 K 的仿射像 K 满足 $V(K)=V(\Delta_n)$,且有

$$S_p(K)\leqslant S_p(\Delta_n).$$

(下转第 30页)

[参考文献]

[1] Colbourn C J, Dinitz J H. CRC Handbook of Combinatorial Designs[M]. 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.

[2] Liu J. On λ-fold equipartite Oberwolfach problem with uniform table sizes[J]. Annals of Combinatorics, 2003, 7(3): 315-323.

[3] Alspach B, Schellenberg P J, Stinson D R, et al. The Oberwolfach problem and factors of uniform odd length cycles[J]. J Combin Theory Ser A, 1989, 52(1): 20-43.

[4] Liu J. The equipartite Oberwolfach problem with uniform tables[J]. J Combin Theory Ser A, 2003, 101(1): 20-34.

[5] Assaf A, Hartman A. Resolvable group divisible designs with block size 3[J]. Discrete Math, 1989, 77(1/3): 5-20.

[6] Rees R. Two new direct product-type constructions for resolvable group divisible designs[J]. J Combin Designs, 1993, 1(1): 15-26.

[7] Stinson D R. Frames for Kirkman triple systems[J]. Discrete Math, 1987, 65(3): 289-300.

[8] Ge G, Rees R, Kirkman N S. Kirkman frames having hole type $h^u m^1$ for small h[J]. Des Codes Cryptogr, 2007, 45(2): 157-184.

[责任编辑: 丁　蓉]

(上接第 24页)

[参考文献]

[1] Burago Y D, Zalgaller V A. Geometric Inequalities[M]. New York: Springer, 1988.

[2] Chavel I. Isoperimetric Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[3] Osserman R. The isoperimetric inequality[J]. Bull Amer Math Soc, 1978, 84: 1182-1238.

[4] Ball K M. Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality[J]. J London Math Soc, 1991, 44: 351-359.

[5] Firey W J. p-means of convex bodies[J]. Math Scand, 1962, 10: 17-24.

[6] Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory I: Mixed volumes and the Minkowski problem[J]. J Differential Geom, 1993, 38(1): 131-150.

[7] Lutwak E, Zhang G Y. Blaschke-Santaló inequalities[J]. J Differential Geom, 1997, 47(1): 1-16.

[8] Lutwak E, Yang D, Zhang G Y. L_p affine isoperimetric inequalities[J]. J Differential Geom, 2000, 56(1): 111-132.

[9] Lutwak E, Yang D, Zhang G Y. Sharp affine L_p Sobolev inequalities[J]. J Differential Geom, 2002, 62(1): 17-38.

[10] Lutwak E, Yang D, Zhang G Y. On the L_p-Minkowski problem[J]. Tran Amer Math Soc, 2004, 356: 4359-4370.

[11] Werner E, Ye D. New L_p affine isoperimetric inequalities[J]. Adv Math, 2008, 218: 762-780.

[12] Zhang G Y. Affine Geometric Inequalities for Polytopes, Discrete[M]. Beijing: Combinatorial and Computational Geometry, 2004.

[责任编辑: 丁　蓉]