一些 $OP_2(3^a, s^b)$的存在性结果

米晓兰, 曹海涛

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 主要讨论二重广义 Oberwolfach问题 $OP_2(3^a, s^b)$的存在性. 运用不完全可分解圈设计和圈支架的递推构造方法以及加法群作用的直接构造方法, 证明了对任意的 $1\leqslant b\leqslant 3$和 $s=4, 5$都存在 $OP_2(3^a, s^b)$.

[关键词] Oberwolfach问题, 圈可分组设计, 圈支架

[中图分类号] O157. 2 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)02-0025-06

Some Results on the Oberwolfach Problem $OP_2(3^a, s^b)$

Mi Xiaolan, Cao Haitao

(School of Mathematical Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract In this paper, we consider the generalization of the Oberwolfach problem $OP_2(3^a, s^b)$. We shall apply both recursive constructions using incomplete resolvable cycle desigsn and cycle frames and direct constructions using certain additive group to prove that the necessary conditions for the existence of $OP_2(3^a, s^b)$ with $1\leqslant b\leqslant 3$ and $s=4, 5$ are also sufficient.

Key words Oberwolfach problem, cycle group divisible design, cycle frame

本文中, G表示一个图, k是大于 2的正整数. K_n表示顶点数为 n的完全图, C_k表示长度为 k的圈. 设 H是 G的子图, 如果 $V(G)=V(H)$且 H中每个点的度都为 2, 就称 H为 G的一个 2-因子. 显然, 2-因子是一些互不相交的圈的并. 如果 $E(G)$可被划分为若干个 2-因子的并, 则称 G有 2-因子分解. 若 G有 2-因子分解且每个 2-因子都和 H同构, 则称此 2-因子分解为 G的 H-分解. 如果 H中只包含 C_k, 就称 H-分解是 G的 C_k-分解. $G-I$表示删去 G中一个 1-因子 I后得到的图. 如果 G的每条边都是 λ重的, 图就记为 λG.

设 $n\geqslant 3$, 当 λ是偶数或者 λn是奇数时, 令 $G=\lambda K_n$; 当 λ是奇数并且 n是偶数时, 令 $G=\lambda K_n-I$. λ重广义 Oberwolfach问题 $OP_\lambda(m_1^{\alpha_1}, m_2^{\alpha_2}, \cdots, m_t^{\alpha_t})$就是研究 λG是否有 H-分解, 使得 H中恰好包含 α_i个长度为 m_i的圈, $i=1, 2, \cdots, t$. $OP_1(m_1^{\alpha_1}, m_2^{\alpha_2}, \cdots, m_t^{\alpha_t})$简记为 $OP(m_1^{\alpha_1}, m_2^{\alpha_2}, \cdots, m_t^{\alpha_t})$.

$OP(m_1^{\alpha_1}, m_2^{\alpha_2}, \cdots, m_t^{\alpha_t})$是由 Ringel在 1967年的一次图论会议上首先提出来的, 现在已经有很丰富的研究成果[1]. 我们最近证明了: 对任意 $v=3a+sb$, $a\geqslant 0$, $s=4, 5$, $1\leqslant b\leqslant 3$, 都存在 $OP(3^a, s^b)$, 除去一个例外 $OP(3^2, 5)$. 刘九强[2] 得到了部分 $OP_2(3^a, 5^b)$的存在性结果.

定理 1[2] (1) 对任意 $v\geqslant 8$, $v\equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$, $v\neq 20$, 都存在 $OP_2(3^{(v-5)/3}, 5)$.

(2) 对任意 $v\geqslant 22$, $v\equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$, 都存在 $OP_2(3^{(v-10)/3}, 5^2)$.

本文我们讨论 $OP_2(3^a, s^b)$ $(1\leqslant b\leqslant 3, s=4, 5)$的存在性问题, 得到以下定理.

定理 2 对任意 $v=3a+sb$, $a\geqslant 0$, $s=4, 5$, $1\leqslant b\leqslant 3$, 都存在 $OP_2(3^a, s^b)$.

1 $IOP_2(\{3^a, s^b\}, v, h)$的存在性

为了引入本文的主要递推方法, 我们需要圈可分组设计和圈支架的定义, 类似定义参见[3, 4]. 首先

收稿日期: 2008-05-29.

基金项目: 国家自然科学基金(10501023, 60673070)资助项目.

通讯联系人: 曹海涛, 博士, 副教授, 研究方向: 组合设计. E-mail: caohaitao@njnu.edu.cn

介绍圈可分组设计的定义.

定义 1 设 J 是正整数集. 一个圈可分组设计记为 $(J, \lambda)-$CGDD, 是满足下述条件的三元组 $(\mathscr{V}, \mathscr{G}, \mathscr{C})$:

1. $\mathscr{V}$ 称为 K_v 的点集;

2. $\mathscr{G}$ 中的元素(称为组)均是 $\mathscr{V}$ 的子集, 并且所有组构成 $\mathscr{V}$ 的一个划分;

3. $\mathscr{C}$ 是由 K_v 的圈 C_k 组成的集合, $k \in J$, 使得任意两个不同组的点连成的边恰好包含在 λ 个圈中, 而属于同一组的两个点连成的边不包含在任何圈中.

当 $J=\{k\}$ 时, 我们就简记 $(J, \lambda)-$CGDD 为 $(k, \lambda)-$CGDD. 若 $\mathscr{G}$ 中大小为 1 的组出现了 i 次, 大小为 2 的组出现了 j 次, 大小为 3 的组出现了 k 次, …, 则用 $1^i2^j3^k\cdots$ 来表示圈可分组设计的组型, 记为 $(J, \lambda)-\mathrm{CGDD}(1^i2^j3^k\cdots)$.

如果 $\mathscr{C}$ 可被划分为若干 2-因子的并, 就称 $(J, \lambda)-$CGDD $(\mathscr{V}, \mathscr{G}, \mathscr{C})$ 是可分解的, 记作 $(J, \lambda)-$RCGDD. $(3, \lambda)-\mathrm{RCGDD}(g^u)$ 的存在性已被 Assaf, Hartman 和 Rees[5,6] 彻底解决.

定理 3[5,6] 对任意 $u \geqslant 3$, $\lambda g(u-1) \equiv 0 \pmod 2$, $gu \equiv 0 \pmod 3$, 都存在 $(3, \lambda)-\mathrm{RCGDD}(g^u)$ 除去 $\lambda=1$ 且 $g^u \in \{2^6, 6^3\}$, $\lambda \equiv 1 \pmod 2$ 且 $g^u=2^3$ 和 $\lambda \equiv 2 \pmod 4$ 且 $g^u=1^6$ 这些例外.

设 $(\mathscr{V}, \mathscr{G}, \mathscr{C})$ 为 $(k, \lambda)-$CGDD, 如果圈集 $\mathscr{C}$ 可被划分为若干洞 2-因子的并, 其中每个洞 2-因子是 $\mathscr{V} \setminus G_j$ 的一个划分, $G_j \in \mathscr{G}$, 则称此 $(k, \lambda)-$CGDD 是一个圈支架, 记为 $(k, \lambda)-$CF, 且该圈支架的型就是 $(k, \lambda)-$CGDD 的型. 若 $\lambda=1$, 则简记为 $k-$CF. Stinson[7] 已完全解决了 $(3, \lambda)-\mathrm{CF}(g^u)$ 的存在性.

定理 4[7] 对任意 $g(u-1) \equiv 0 \pmod 3$, $u \geqslant 4$, $\lambda g \equiv 0 \pmod 2$, 存在 $(3, \lambda)-\mathrm{CF}(g^u)$.

为了使用填洞的递推构造, 我们还需要以下组大小不一致的 3-CF 的存在性结果.

定理 5[8] 当 $(u, m)=(3, 12)$ 或 $u \geqslant 4$, $m \equiv 0 \pmod 6$, $0 \leqslant m \leqslant 6u-6$ 时, 存在 $3-\mathrm{CF}(12^u m^1)$, 除去 $(u, m) \in \{(7, 30), (11, 42), (11, 54), (13, 54), (13, 66), (19, 102), (23, 126)\}$ 这些可能的例外.

在给出填洞的递推构造方法之前, 我们再给出二重不完全 Oberwolfach 问题的定义, 即 $\mathrm{IOP}_2(\{3^a, s^b\}, v, h)$ 的定义.

定义 2 设 $2K_h$ 是 $2K_v$ 的一个子图, 其中 $v \equiv sb \pmod 3$, $v \equiv h \pmod 3$, $s \geqslant 4$. 令 $|\mathscr{V}|=v$, $|\mathscr{W}|=h$. 对任意 $h \geqslant 0$, $\mathrm{IOP}_2(\{3^{(v-sb)/3}, s^b\}, v, h)$ 是一个三元组 $(\mathscr{V}, \mathscr{W}, \mathscr{C})$, 满足下述条件:

1. $\mathscr{V}$ 是 $2K_v$ 的点集, $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ 是 $2K_h$ 的点集, $\mathscr{C}$ 是一个 $2K_v$ 的圈集, 且对任意 $C_k \in \mathscr{C}$, $k \in \{3, s\}$;

2. $\mathscr{C}$ 中任意一条边都属于 $E(2K_v) \setminus E(2K_h)$;

3. $\mathscr{C}$ 可被划分为 $v-h$ 个 $2K_v$ 的 2-因子和 $h-1$ 个 $2K_v \setminus 2K_h$ 的 2-因子, 其中每个 $2K_v$ 的 2-因子是由 b 个 C_s 和 $(v-sb)/3$ 个 C_3 组成, 而每个 $2K_v \setminus 2K_h$ 的 2-因子是由 $(v-h)/3$ 个 C_3 组成.

现在我们可以给出利用圈支架和 $\mathrm{IOP}_2(\{3^a, s^b\}, v, h)$ 来构造 $\mathrm{OP}_2(\{3^a, s^b\})$ 的递推方法. 它的证明类似于众多填洞构造的证明, 我们仅给出构造方法, 证明过程省略.

构造 1 若存在一个 $(3, \lambda)-\mathrm{CF}(g_1^{u_1}g_2^{u_2}\cdots g_m^{u_m})$, $\mathrm{IOP}_2(\{3^{(g_i+h-sb)/3}, s^b\}, g_i+h, h)$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$, $\mathrm{IOP}_2(\{3^{(g_m+h-sb)/3}, s^b\}, g_m+h, h)$ (当 $u_m \geqslant 2$ 时) 和 $\mathrm{OP}_2(3^{(g_m+h-sb)/3}, s^b)$, 则存在 $\mathrm{OP}_2(3^{(\sum_{i=1}^{m} g_iu_i+h-sb)/3}, s^b)$.

下面我们给出一些 $\mathrm{IOP}_2(\{3^a, s^b\}, v, h)$ 的直接构造, 它们将作为输入设计用于定理 2 的证明. 我们仅仅给出初始洞 2-因子和初始 2-因子中包含的全部圈, 所有的洞 2-因子和 2-因子可以在某个加法群 G 的作用下得到. 为了简洁, 以下我们将 (a, i) 简记为 a_i, 用 Q_i 表示洞 2-因子, 用 F_j 表示 2-因子.

引理 1 存在一个 $\mathrm{IOP}_2(\{4^2\}, 8, 2)$.

证明 设点集为 $Z_6 \cup \{\infty_1, \infty_2\}$. 所需的 1 个洞 2-因子 Q 包含 2 个 C_3: 0 2 4 0 和 1 3 5 1. 全部的 6 个 2-因子 F_j $(0 \leqslant j \leqslant 5)$ 可通过初始 2-因子 $F_0+1 \bmod 6$ 得到. F_0 包含 2 个圈: 0 1 3 ∞_1 0 和 2 5 4 ∞_2 2. 容易验证, 这些圈组成了 $\mathrm{IOP}_2(\{4^2\}, 8, 2)$.

引理 2 存在一个 $\mathrm{IOP}_2(\{3^2, 4\}, 10, 4)$.

证明 设点集为 $Z_6 \cup \{\infty_1, \infty_2, \infty_3, \infty_4\}$. 全部的 6 个 2-因子 F_j $(0 \leqslant j \leqslant 5)$ 可通过初始 2-因子 $F_0+1 \bmod 6$ 得到. 以下分别列出 3 个洞 2-因子 Q_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 和 2-因子 F_0 中包含的圈.

Q_1: 0 1 2 0　　3 4 5 3

Q_2: 1 2 3 1　　4 5 0 4

Q_3: 2 3 4 2　　5 0 1 5

F_0: $1\ \infty_1\ 5\ \infty_2\ 1$　　$0\ \infty_3\ 3\ 0$　　$2\ \infty_4\ 4\ 2$

引理 **3**　存在一个 $DP_2(\{3^2, 4^3\}, 18, 6)$.

证明　设点集为 $V = (Z_4 \times Z_3) \cup H, H = \{\infty_1, \infty_2, \cdots \infty_6\}$. 洞 2 - 因子 $Q_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 包含 4 个 C_4, 由初始圈 $C_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 通过 $(+1 \bmod 4, -)$ 得到.

Q_1: $C_1 = 0_0 1_1 2_2 0_0$

Q_2: $C_2 = 0_0 2_1 0_2 0_0$

Q_3: $C_3 = 0_0 3_1 3_2 0_0$

Q_4: $C_4 = 0_0 0_1 1_2 0_0$

Q_5: $C_5 = 0_0 0_1 0_2 0_0$

全部的 12个 2 - 因子可由 3个初始 2 - 因子 F_1, F_2, F_3 通过 $(+1 \bmod 4, -)$ 得到.

F_1: $0_0 1_0 2_0 0_0$　$0_1 2_2 \infty_1 0_1$　$3_0 0_2 1_1 \infty_2 3_0$　$2_1 \infty_3 1_2 \infty_4 2_1$　$3_1 \infty_5 3_2 \infty_6 3_1$

F_2: $0_1 1_1 2_1 0_1$　$0_0 2_2 \infty_1 0_0$　$3_1 1_0 0_2 \infty_2 3_1$　$3_0 \infty_3 3_2 \infty_4 3_0$　$2_0 \infty_5 1_2 \infty_6 2_0$

F_3: $0_2 1_2 2_2 0_2$　$0_0 1_1 \infty_1 0_0$　$1_0 0_1 3_2 \infty_2 1_0$　$2_0 \infty_3 2_1 \infty_4 2_0$　$3_0 \infty_5 3_1 \infty_6 3_0$

引理 **4**　存在一个 $DP_2(\{3, 5^3\}, 18, 6)$.

证明　设点集为 $V = (Z_4 \times Z_3) \cup H, H = \{\infty_1, \infty_2, \cdots \infty_6\}$. 洞 2 - 因子 $Q_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 包含 4 个 C_4, 由初始圈 $C_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 通过 $(+1 \bmod 4, -)$ 得到.

Q_1: $C_1 = 0_0 1_1 2_2 0_0$

Q_2: $C_2 = 0_0 2_1 0_2 0_0$

Q_3: $C_3 = 0_0 3_1 3_2 0_0$

Q_4: $C_4 = 0_0 0_1 1_2 0_0$

Q_5: $C_5 = 0_0 0_1 0_2 0_0$

全部的 12个 2 - 因子可由 3个初始 2 - 因子 F_1, F_2, F_3 通过 $(+1 \bmod 4, -)$ 得到.

F_1: $0_1 1_1 2_0 0_1$　$2_1 3_1 \infty_1 3_2 \infty_2 2_1$　$0_0 1_2 \infty_3 3_0 \infty_4 0_0$　$0_2 2_2 \infty_5 1_0 \infty_6 0_2$

F_2: $0_0 1_0 2_0 0_0$　$0_1 3_2 \infty_1 3_0 \infty_2 0_1$　$1_1 0_2 \infty_4 2_2 \infty_3 1_1$　$3_1 1_2 \infty_5 2_1 \infty_6 3_1$

F_1: $0_2 1_2 2_0 0_2$　$0_1 2_1 \infty_1 1_0 \infty_3 0_1$　$2_2 3_2 \infty_2 3_0 \infty_6 2_2$　$0_0 1_1 \infty_4 3_1 \infty_5 0_0$

2　直接构造

在这一节中, 我们给出一些 $OP_2(\{3^a, s^b\})$ 的直接构造, 它们将作为输入设计用于下一节的证明. 类似于上一节的直接构造, 我们仅仅给出初始 2 - 因子中包含的全部圈, 所有的 2 - 因子 可以用某个加法群 G 作用得到.

引理 **5**　对每个 $v \in \{4, 10, 16, 22\}$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-4)/3}, 4)$.

证明　设 $G = Z_n, n = v - 1$, 点集为 $Z_n \cup \{\infty\}$. 所需的全部 2 - 因子可通过初始 2 - 因子 $F_0 + 1 \bmod n$ 得到.

$v = 4$: F_0:　0 1 2 ∞ 0

$v = 10$: F_0:　0 1 5 3 0　　2 4 8 2　　6 7 ∞ 6

$v = 16$: F_0:　0 5 11 1 0　　3 7 10 3　　6 8 14 6　　9 12 13 9　　2 4 ∞ 2

$v = 22$: F_0:　0 19 1 ∞ 0　　2 3 6 2　　4 9 15 4　　5 14 16 5　　7 13 20 7

8 12 17 8　　10 11 18 10

引理 **6**　对每个 $v \in \{8, 14, 20\}$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-8)/3}, 4^2)$.

证明　设 $G = Z_n, n = v - 1$, 点集为 $Z_n \cup \{\infty\}$. 所需的全部 2 - 因子可由初始 2 - 因子 $F_0 + 1 \bmod n$ 得到.

$v = 8$: F_0:　0 1 5 ∞ 0　　2 3 6 4 2

$v=14$: F_0: 0 1 3 6 0　　2 7 8 11 2　　4 10 12 4　　5 9 ∞ 5

$v=20$: F_0: 3 14 4 17 3　　6 7 9 13 6　　0 1 15 0　　2 5 12 2
10 16 18 10　　8 11 ∞ 8

引理 7　存在一个 $OP_2(3^2, 5)$.

证明　设点集为 $Z_{10}\cup\{\infty\}$, 10个 2-因子可由初始 2-因子 $F_0+1 \bmod 10$得到.

F_0:　5 7 9 6 ∞ 5　　0 1 4 0　　2 3 8 2

引理 8　存在一个 $OP_2(3^5, 5)$.

证明　设点集为 $Z_{19}\cup\{\infty\}$, 全部的 19个 2-因子可由初始 2-因子 $F_0+1 \bmod 19$得到.

F_0:　0 1 9 18 12 0　　2 4 5 2　　3 14 17 3　　6 10 16 6　　8 13 15 8　　7 11 ∞ 7

引理 9　对每个 $v\in\{10, 16, 22\}$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-10)/3}, 5^2)$.

证明　设 $G=Z_n$, $n=v-1$, 取点集为 $Z_n\cup\{\infty\}$. 全部 2-因子可由初始 2-因子 $F_0+1 \bmod n$得到.

$v=10$: F_0: 0 1 3 7 4 0　　2 5 6 8 ∞ 2

$v=16$: F_0: 0 3 9 11 4 0　　1 6 7 13 14 1　　2 5 10 2　　8 12 ∞ 8

$v=22$: F_0: 6 8 11 20 12 6　　0 11 5 4 ∞ 0　　2 13 19 2　　3 16 17 3
5 7 10 5　　9 14 18 9

引理 10　对每个 $v\in\{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-12)/3}, 4^3)$.

证明　设 $G=Z_n$, $n=v-1$, 取点集为 $Z_n\cup\{\infty\}$. 全部 2-因子可通过初始 2-因子 $F_0+1 \bmod n$得到.

$v=12$: F_0:	0 1 3 6 0	4 8 9 2 4	5 10 7 ∞ 5		
$v=18$: F_0:	0 1 16 7 0	4 10 13 9 4	2 3 11 14 2	6 8 12 6	5 15 ∞ 5
$v=24$: F_0:	0 1 22 ∞ 0	3 8 15 7 3	6 9 19 10 6	2 14 16 2	4 11 21 4
	5 17 20 5	12 13 18 12			
$v=30$: F_0:	0 1 28 ∞ 0	3 6 19 26 3	2 10 21 17 2	4 15 13 4	7 9 24 7
	8 20 27 8	11 16 22 11	12 15 25 12	14 18 23 14	
$v=36$: F_0:	0 1 34 ∞ 0	3 7 14 9 3	5 30 19 22 5	2 4 8 2	6 16 25 6
	10 23 28 10	11 20 27 11	12 24 32 12	13 21 33 13	15 26 29 15
	17 18 31 17				
$v=42$: F_0:	0 1 40 ∞ 0	3 20 26 36 3	2 5 9 38 2	4 6 7 4	8 17 29 8
	10 19 33 10	11 24 31 11	12 27 35 12	13 23 30 13	14 25 39 14
	15 28 34 15	16 21 32 16	18 22 37 18		
$v=48$: F_0:	0 1 46 ∞ 0	4 10 17 27 4	2 5 40 35 2	18 31 45 18	6 42 43 6
	7 23 34 7	14 29 36 14	13 22 39 13	15 41 44 15	3 12 37 3
	8 20 38 8	9 28 33 9	11 26 30 11	16 24 32 16	19 21 25 19

引理 11　对每个 $v\in\{18, 24, 30, 36, 42, 48\}$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-15)/3}, 5^3)$.

证明　设 $G=Z_n$, $n=v-1$, 取点集为 $Z_n\cup\{\infty\}$. 全部 2-因子可通过初始 2-因子 $F_0+1 \bmod n$得到.

$v=18$: F_0:	0 1 16 13 8 0	2 6 12 5 3 2	7 10 14 9 15 7	4 11 ∞ 4	
$v=24$: F_0:	3 14 5 16 ∞ 3	2 7 13 20 10 2	0 1 22 19 15 0	4 6 9 4	8 12 21 8
	11 17 16 11				
$v=30$: F_0:	0 1 7 28 ∞ 0	3 10 20 8 19 3	5 14 16 21 2 5	4 9 24 4	6 13 17 6
	11 15 27 11	12 18 26 12	22 23 25 22		
$v=36$: F_0:	0 1 5 34 ∞ 0	4 11 19 22 17 4	2 12 24 15 13	3 6 14 3	7 25 26 7
	8 23 29 8	9 28 32 9	10 20 27 10	16 21 30 16	18 31 33 18
$v=42$: F_0:	0 1 40 35 ∞ 0	7 11 20 38 15 7	2 9 3 19 22 2	4 5 8 4	6 16 30 6

		10 24 36 10	12 27 29 12	13 26 32 13	14 23 34 14	17 28 33 17
		18 25 37 18	21 31 39 21			
$v=48$:	F_0:	4 11 17 26 ∞ 4	0 1 46 30 3 0	2 25 35 39 7 2	5 6 8 5	9 13 20 9
		10 22 36 10	12 24 40 12	14 31 37 14	15 28 41 15	16 34 45 16
		18 33 38 18	19 27 44 19	21 29 43 21	23 32 42 23	

3 主要结果

在这一节中, 我们将证明本文的主要结果, 即定理 2 首先从 $s=4$开始.

引理 12 对任意 $v\equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$ 且 $v\geqslant 4$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-4)/3}, 4)$.

证明 当 $v=4, 10, 16, 22$时, 可以由引理 5得到. 根据定理 4, 对任意 $u=(v-4)/6$且 $v\geqslant 28$, 存在一个 $(3, 2)-CF(6^u)$. 对 $h=4$运用构造 1, 我们可以得到 $OP_2(3^{(v-4)/3}, 4)$, 其中输入设计 $IOP_2(\{3^2, 4\}, 10, 4)$ 来自引理 2, $OP_2(3^2, 4)$ 来自引理 5.

引理 13 对任意 $v\equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$ 且 $v\geqslant 8$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-8)/3}, 4^2)$.

证明 $v=8, 14, 20$可以由引理 6得到. 根据定理 4, 对任意 $u=(v-2)/6$且 $v\geqslant 26$, 存在一个 $(3, 2)-CF(6^u)$. 对 $h=2$运用构造 1, 我们可以得到 $OP_2(3^{(v-8)/3}, 4^2)$, 其中输入设计 $IOP_2(\{4^2\}, 8, 2)$来自引理 1, $OP_2(4^2)$来自引理 6.

引理 14 对任意 $v\equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$ 且 $v\geqslant 6$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-12)/3}, 4^3)$.

证明 我们分两种情形证明: $v\equiv 0(\mathrm{mod}\ 12)$ 和 $v\equiv 6(\mathrm{mod}\ 12)$.

1. $v\equiv 0(\mathrm{mod}\ 12)$. $v=12, 24, 36, 48$可以由引理 10得到. 根据定理 4, 对任意 $u=(v-6)/12$且 $v\geqslant 54$, 存在一个 $(3, 2)-CF(12^u)$. 对 $h=6$运用构造 1, 我们可以得到 $OP_2(3^{(v-12)/3}, 4^3)$, 其中输入设计 $IOP_2(\{3^2, 4^3\}, 18, 6)$ 来自引理 3, $OP_2(3^2, 4^3)$ 来自引理 10.

2. $v\equiv 6(\mathrm{mod}\ 12)$. $v=18, 30, 42$可以由引理 10得到. 根据定理 5, 对任意 $u=(v-12)/12$且 $v\geqslant 60$ 存在一个 $3-CF(12^u 6^1)$. 把它的每个圈复制一次, 可得一个 $(3, 2)-CF(12^u 6^1)$. 对 $h=6$运用构造 1, 我们可以得到 $OP_2(3^{(v-12)/3}, 4^3)$, 其中输入设计 $IOP_2(\{3^2, 4^3\}, 18, 6)$ 来自引理 3, $OP_2(4^3)$ 来自引理 10.

引理 15 (1) 对任意 $v\equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$ 且 $v\geqslant 8$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-5)/3}, 5)$. (2) 对任意 $v\equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$ 且 $v\geqslant 10$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-10)/3}, 5^2)$.

证明 根据定理 1, 只需要证明当 $v=20$时 $OP_2(3^{(v-5)/3}, 5)$ 存在和当 $v=10, 16, 22$时 $OP_2(3^{(v-10)/3}, 5^2)$ 存在即可. 由引理 8和引理 9这些数值都得到了解决.

引理 16 对任意 $v\equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$ 且 $v\geqslant 6$, 存在一个 $OP_2(3^{(v-15)/3}, 5^3)$.

证明 我们分两种情形证明: $v\equiv 0(\mathrm{mod}\ 12)$ 和 $v\equiv 6(\mathrm{mod}\ 12)$.

1. $v\equiv 0(\mathrm{mod}\ 12)$. $v=24, 36, 48$可以由引理 11得到. 根据定理 4, 对任意 $u=(v-6)/12$且 $v\geqslant 54$ 存在一个 $(3, 2)-CF(12^u)$. 对 $h=6$运用构造 1, 我们可以得到 $OP_2(3^{(v-15)/3}, 5^3)$, 其中输入设计 $IOP_2(\{3, 5^3\}, 18, 6)$ 来自引理 4, $OP_2(3, 5^3)$ 来自引理 11.

2. $v\equiv 6(\mathrm{mod}\ 12)$. $v=18, 30, 42$可以由引理 11得到. 根据定理 5, 对任意 $u=(v-24)/12$且 $v\geqslant 72$ 存在一个 $3-CF(12^u 18^1)$. 把它的每个圈复制一次, 可得一个 $(3, 2)-CF(12^u 18^1)$. 对 $h=6$运用构造 1, 我们可以得到 $OP_2(3^{(v-15)/3}, 5^3)$, 其中输入设计 $IOP_2(\{3, 5^3\}, 18, 6)$来自引理 4, $OP_2(3^3, 5^3)$来自引理 11.

定理 2的证明 对 $s=4, 5$, $b=1, 2, 3$, 我们分两种情形证明: $v\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ 和 $v\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$. 若 $v\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, $OP_2(3^{(v-sb)/3}, s^b)$ 可由 $OP(3^{(v-sb)/3}, s^b)$ 的圈集直接复制一次得到, 其中 $OP_2(3^2, 5)$ 可由引理 7得到; 若 $v\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, $OP_2(3^{(v-sb)/3}, s^b)$ 可由引理 12 ~ 引理 16得到.

[参考文献]

[1] Colbourn C J, Dinitz J H. CRC Handbook of Combinatorial Designs[M]. 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.

[2] Liu J. On λ-fold equipartite Oberwolfach problem with uniform table sizes[J]. Annals of Combinatorics, 2003, 7(3): 315-323.

[3] Alspach B, Schellenberg P J, Stinson D R, et al. The Oberwolfach problem and factors of uniform odd length cycles[J]. J Combin Theory Ser A, 1989, 52(1): 20-43.

[4] Liu J. The equipartite Oberwolfach problem with uniform tables[J]. J Combin Theory Ser A, 2003, 101(1): 20-34.

[5] Assaf A, Hartman A. Resolvable group divisible designs with block size 3[J]. Discrete Math, 1989, 77(1/3): 5-20.

[6] Rees R. Two new direct product-type constructions for resolvable group divisible designs[J]. J Combin Designs, 1993, 1(1): 15-26.

[7] Stinson D R. Frames for Kirkman triple systems[J]. Discrete Math, 1987, 65(3): 289-300.

[8] Ge G, Rees R, Kirkman N S. Kirkman frames having hole type $h^u m^1$ for small h[J]. Des Codes Cryptogr, 2007, 45(2): 157-184.

[责任编辑: 丁　蓉]

(上接第 24页)

[参考文献]

[1] Burago Y D, Zalgaller V A. Geometric Inequalities[M]. New York: Springer, 1988.

[2] Chavel I. Isoperimetric Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[3] Osserman R. The isoperimetric inequality[J]. Bull Amer Math Soc, 1978, 84: 1182-1238.

[4] Ball K M. Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality[J]. J London Math Soc, 1991, 44: 351-359.

[5] Firey W J. p-means of convex bodies[J]. Math Scand, 1962, 10: 17-24.

[6] Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory I. Mixed volumes and the Minkowski problem[J]. J Differential Geom, 1993, 38(1): 131-150.

[7] Lutwak E, Zhang G Y. Blaschke-Santal inequalities[J]. J Differential Geom, 1997, 47(1): 1-16.

[8] Lutwak E, Yang D, Zhang G Y. L_p affine isoperimetric inequalities[J]. J Differential Geom, 2000, 56(1): 111-132.

[9] Lutwak E, Yang D, Zhang G Y. Sharp affine L_p Sobolev inequalities[J]. J Differential Geom, 2002, 62(1): 17-38.

[10] Lutwak E, Yang D, Zhang G Y. On the L_p-Minkowski problem[J]. Tran Amer Math Soc, 2004, 356: 4359-4370.

[11] Werner E, Ye D. New L_p affine isoperimetric inequalities[J]. Adv Math, 2008, 218: 762-780.

[12] Zhang G Y. Affine Geometric Inequalities for Polytopes, Discrete[M]. Beijing: Combinatorial and Computational Geometry, 2004.

[责任编辑: 丁　蓉]