

# 环状结构的四夸克态与 QCD 同分异构体

邓成荣

(重庆交通大学理学院, 重庆 400074)

[摘要] 在 QCD 弦模型的基础上, 基于弦和化学键的相似性, 提出了四夸克态的环状颜色结构和 QCD 同分异构体的概念. 平方囚禁势的弦模型计算表明环状颜色结构的四夸克态和其他颜色结构的四夸克态有相近的能量.

[关键词] 四夸克态, 颜色结构, 夸克模型, 颜色共振

[中图分类号] Q 412 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009-02-0060-05)

## New Color Structure of Tetraquark and QCD Isomeric Compounds

Deng Chengrong

(School of Mathematics and Physics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

**Abstract** QCD isomeric compounds and a tetra-quark state with the square-like color structure based on a color string model and the similarity between string and chemical bond are proposed and studied. Calculation with quadratic confinement with multi-string junctions shows that such a state has a ground state energy similar to that of other hidden color tetra-quark states proposed so far.

**Key words** tetra-quark state, color structure, quark model, color resonance

根据组分夸克模型 (CQM), 介子和重子分别为  $qq$  和  $qqq$  构成. 不能用组分夸克模型描述的态, 例如四夸克态, 五夸克态, 六夸克态和胶球态等等, 被称为奇特强子态. 到目前为止, 作为强相互作用基本理论的量子色动力学 (QCD) 并不否认这些奇特强子态的存在. 多夸克态是否存在是一个古老而神秘的话题, Jaffe 在 1977 年用 MIT 口袋模型预言了  $H^-$  粒子 ( $uudds\bar{s}$ )<sup>[1]</sup>, 尽管已经过去了 30 多年, 实验上至今也没有发现. 2003 年,  $\psi'$  的发现<sup>[2]</sup> 激发了人们对多夸克系统研究的极大兴趣<sup>[3]</sup>, 试图推开奇特强子世界的大门, 到目前  $\psi'$  的存在与否还是一个悬而未决的问题<sup>[4]</sup>. 最近实验上发现了许多奇特介子态<sup>[5]</sup>, 例如  $X(1875)$ ,  $X(1576)$ ,  $D_s(2137)$  等等, 其中有些态被解释为四夸克态.

格点 QCD 对介子、重子、四夸克态和五夸克态的计算揭示了色流管 (弦) 结构的存在<sup>[6,7]</sup>, 色流管把夸克连在一起形成强子. 格点 QCD 中的弦非常类似于 QED 中共价键, 共价键把原子束缚在一起形成分子. 在有机化合物中, 由于化学键的结构不同, 相同原子构成的化合物有同分异构体, 比如戊烷有正戊烷、异戊烷和新戊烷 3 种同分异构体. 类似的, 在 QCD 中相同夸克组成的多夸克系统会由于具有不同的色流管结构而出现 QCD 同分异构体吗? 实际上, 我们提出了六夸克系统的 QCD 夸克苯环<sup>[8]</sup>, 相对于六夸克系统其他的弦结构, QCD 苯环与他们互为 QCD 同分异构体. 这篇文章主要讨论在味  $SU(2)$  中四夸克态可能的颜色结构, 在 QCD 苯环的基础上, 我们把 2 个相邻的夸克分别用一个反夸克替换, 于是我们就能够得到如图 1 所示的环状弦结构的四夸克态, 在以前的文献中, 我们未见有作者讨论过这种弦结构.

## 1 弦模型

弦实际上是动力学变量, 包含了动能和势能的贡献<sup>[9]</sup>, 势能正比于弦的总长度. 弦张量可通过口袋模

收稿日期: 2009-03-10

基金项目: 重庆交通大学博士基金.

通讯联系人: 邓成荣, 博士, 副教授, 研究方向: 强子物理. E-mail: cndeng78@163.com

型估计, 或者从格点 QCD 推导出来, 也可以拟合强子质量得到, 我们选择最后一种, 即纯粹的唯一象方法, 因为我们只关心 QCD 苯环的定性性质, 所以选择平方囚禁势而不用线性囚禁势来简化计算. 比较研究表明, 线性势和平方势的差异很小<sup>[8-10]</sup>. 原因如下, 首先对弦长的空间变分差异不是很大, 所以函数形式的差异很小, 可以通过调节谐振子强度参数来弥补这种差异; 其次, 我们用的是非相对论的动力学描述, 对于运动方程的二阶约化谐振子近似是可行的, 在相对论一阶微分动力学描述中相互作用能随着费米子间的距离线性变化<sup>[11]</sup>, 具体的数值结果<sup>[8]</sup>也证实了这个预言.

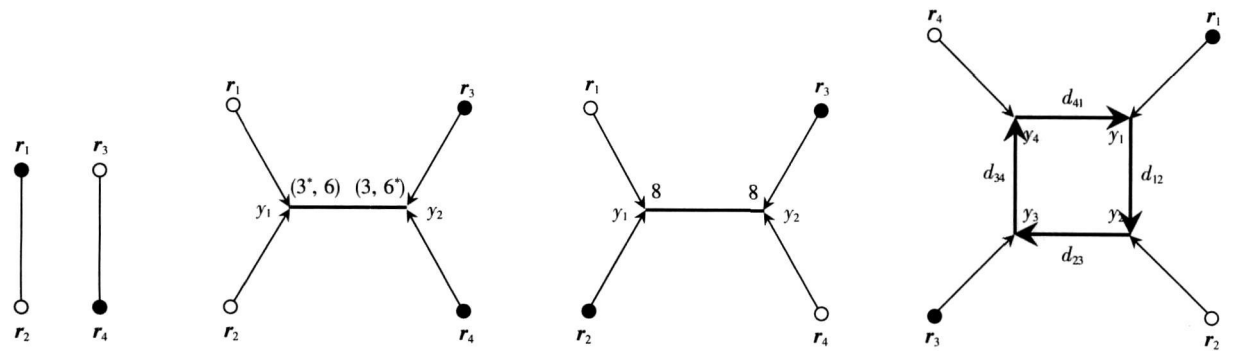


图 1 四夸克态的颜色结构  
Fig.1 Color structures of a tetra-quark state

对于四夸克系统, 有 4 种可能的弦结构, 如图 1 所示, 最后一种就是我们所提出的新颜色结构. 在图 1 中, 实心点代表夸克  $q_i$ , 空心点代表反夸克  $\bar{q}_i$ ,  $r_i$  表示相应夸克 (反夸克) 的位置坐标,  $y_i$  表示 3 条弦的结点, 夸克 (反夸克) 和节点之间的细线表示 3 维颜色弦, 结点之间的粗线表示复合弦, 即 3 和 6 维弦, 不同维数的弦具有不同的强度<sup>[12-12]</sup>. 图中逆时针线段表示颜色 SU (3) 群表示, 整体颜色单态和在每个节点处的 SU (3) 颜色耦合规则都满足, 各种 QCD 允许的颜色耦合方式都列在了弦结构中. 在图 1 中, 弦上对应的数字表示对应弦的维数. 在图 1 最后一种颜色结构中,  $(d_{12}, d_{23}, d_{34}, d_{41})$  有 6 种可能的值:  $(3, 8, 3, 8)$ 、 $(6, 8, 6, 8)$ 、 $(3, 3, 3, 3)$ 、 $(8, 3, 8, 3)$ 、 $(8, 6, 8, 6)$  和  $(3, 6, 3, 6)$ , 在四边形  $y_1y_2y_3y_4$  中, 相对的弦有相同的维数, 每种可能的颜色维数组合都能满足四夸克系统整体颜色单态的要求.

我们用平方囚禁的弦模型来研究四夸克系统, 在平方囚禁的弦模型中, 四夸克系统的势能为

$$V = \frac{1}{2}k \left( \sum_{i=1}^4 (r_i - y_i)^2 + \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 \right), \tag{1}$$

这儿  $\sum$  表示相邻坐标的求和. 通过求解晶格振动的方法, 新颜色结构的简正坐标如下

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sqrt{\frac{m}{4}} (r_1 - r_2 - r_3 + r_4), & Q_2 &= \sqrt{\frac{m}{4}} (r_1 + r_2 - r_3 - r_4), \\ Q_3 &= \sqrt{\frac{m}{4}} (r_1 - r_2 + r_3 - r_4), & Q_4 &= \sqrt{\frac{m}{4}} (r_1 + r_2 + r_3 + r_4). \end{aligned} \tag{2}$$

于是新颜色结构的势能可以重新写成

$$V = \frac{k}{2m} \left[ \frac{2}{1+2} Q_1^2 + \frac{2}{1+2} Q_2^2 + \frac{2( + )}{1+2+} Q_3^2 \right]. \tag{3}$$

系统的基态能量为

$$E_0 = 4m + \frac{3}{2} \left[ \sqrt{\frac{2}{1+2}} + \sqrt{\frac{2}{1+2}} + \sqrt{\frac{2( + )}{1+2( + )}} \right], \tag{4}$$

为了便于比较, 其他 2 种隐色弦结构的能量如下所示,

$$E_0 = 4m + \frac{3}{2} \left[ 2 + \sqrt{\frac{2}{1+2}} \right], \tag{5}$$

其中  $m$  为夸克质量,  $= \sqrt{k/m}$ .

利用求解出的波函数, 可计算出任意 2 个夸克之间和夸克与质心之间的距离, 从而确定新颜色结构四

夸克态的空间结构. 为了方便讨论, 我们定义  $r_{ij} = r_i - r_j$ ,  $R_{ij} = \frac{1}{2}(r_i + r_j)$  和  $r_{ij,kl} = R_{ij} - R_{kl}$ , 任意 2 夸克之间的距离为

$$\begin{aligned}r_{12}^2 &= r_{34}^2 = \frac{3}{2m} \left( \sqrt{\frac{1+2}{2}} + \sqrt{\frac{1+2(+)}{2(+)} } \right), \\r_{13}^2 &= r_{24}^2 = \frac{3}{2m} \left( \sqrt{\frac{1+2}{2}} + \sqrt{\frac{1+2}{2}} \right), \\r_{14}^2 &= r_{23}^2 = \frac{3}{2m} \left( \sqrt{\frac{1+2}{2}} + \sqrt{\frac{1+2(+)}{2(+)} } \right).\end{aligned}\tag{6}$$

夸克和质心之间的距离为

$$r_i^2 = \frac{3}{8n} \left( \sqrt{\frac{1+2}{2}} + \sqrt{\frac{1+2}{2}} + \sqrt{\frac{1+2(+)}{2(+)} } \right),\tag{7}$$

此外, 我们还可以证明  $r_{ij,kl}$  垂直于  $r_{ij}$  和  $r_{kl}$ ,  $r_{ij,kl}^2$  的大小为

$$\begin{aligned}r_{12,34}^2 &= \frac{3}{2n} \sqrt{\frac{1+2}{2}}, \\r_{12,23}^2 &= \frac{3}{2m} \sqrt{\frac{1+2}{2}}, \\r_{13,24}^2 &= \frac{3}{2n} \sqrt{\frac{1+2(+)}{2(+)} }.\end{aligned}\tag{8}$$

因此, 新颜色结构的四夸克态和 QCD 夸克苯环一样, 也具有空间立体结构, 如图 2 所示. 在我们的模型中, 多夸克系统一定具有空间结构, 这是由系统的动力学决定的: 要减小系统的势能, 夸克间的距离要变得尽可能的小来缩短弦长, 受降低系统的动能, 夸克间的距离要变得尽可能的大来减小动能, 立体结构能比平面结构更好地满足这个要求. 对于五夸克系统, 在格点 QCD 中平面和立体结构具有简并的能量, 然而, 三维结构比平面结构具有更大的熵<sup>[6]</sup>. 对于四夸克系统, 四面体积结构更稳定, 不容易衰变成 2 个介子<sup>[7]</sup>.

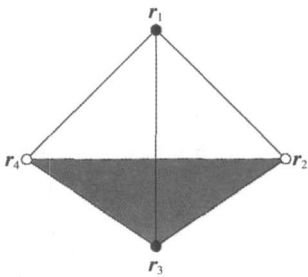


图 2 四夸克态的空间结构

Fig.2 Spatial configuration of a tetra-quark state

在我们的计算当中, 有 3 个自由参数, 非奇异夸克的质量  $m$ , 三维弦的强度  $k$  和复合弦的强度  $k_s$ , 前 2 个可以通过非奇异强子的质量来确定. 我们取  $M_3$  为  $N +$  的平均质量,  $M_2$  为非奇异介子的平均质量

$$M_3 = \frac{1}{2}(N + ) = 3n + 3 ,\tag{9}$$

$$M_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) = 2n + \frac{3}{2} .\tag{10}$$

从以上两式可得

$$m = 2M_2 - M_3 = 195 \text{ M eV}, \quad k = 139 \text{ M eV fm}^{-2}.\tag{11}$$

复合弦的强度参数  $k_s$  其中 依赖于弦的维数, 在 M II 口袋模型中, 依赖关系<sup>[13]</sup> 为

$$d = \frac{C_d}{C_3},\tag{12}$$

这里  $C_d$  是  $d$  维 SU(3 颜色表示的卡西米尔算符的本征值

$$C_3 = \frac{4}{3}, \quad C_6 = \frac{10}{3}, \quad C_8 = 3.\tag{13}$$

考虑到环状颜色结构和 QCD 苯环的相似性及化学中的结构共振效应, 环上 4 条弦应该有相同的强度,  $= =$  1 0 于是我们可以得到所有隐色道的能量, 如表 1 所示. 从

表 1 谐振子的基态能量和静止质量之和 (M eV)

Table 1 The sum of the energy of the ground state and restmass(M eV)

颜色结构	弦的维数		能量
夸克对	3	3	1 455
反夸克对	6	6	1 487
两色八重态介子	8	8	1 490
新的颜色结构	( 3 , 3, 3 , 3 )	3, 3	1 410

表 1 可以看出, 不同的颜色结构具有相近的能量 (大约从 1.4 至 1.5 GeV), 颜色维数为  $(3^*, 3, 3^*, 3)$  的环状颜色结构的四夸克态能量最低, 隐色双介子态具有最高的能量.

2 色磁相互作用

组分夸克模型成功地描述了重子和介子谱, 在组分夸克模型中色磁相互作用造成了介子谱和重子谱的能级劈裂. 描述多夸克系统颜色 自旋的超精细相互作用可以写成

$$H_{CM} = \sum_{i < j} s_i^c s_j^c \frac{1}{r_{ij}}, \tag{14}$$

这里  $s_i^c$  和  $s_j^c$  分别为颜色算符和自旋算符. 运用前面所求得轨道波函数, 拟合  $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$  和  $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)$  之间的质量差异, 可得  $s = -516 \text{ MeV fm}^{-3}$ .

要计算色磁相互作用的贡献, 事先必须写出强子态的波函数, 然而在夸克层次上构造新颜色结构的四夸克态的波函数是很困难的, 怎么构造波函数是没有解决的问题. 因此到目前为止, 我们无法准确得到新颜色结构四夸克态的超精细相互作用, 为了对其作一个粗略的估计, 我们采用了与夸克对四夸克态和反夸克对四夸克态计算超精细相互作用类似的算法: 先按照原来的耦合规则构造 2 个夸克的波函数, 再构造 2 个反夸克的波函数, 最后由夸克对和反夸克对的波函数构造四夸克态的波函数. 计算了所有不同维数弦的超精细相互作用, 其结果如表 2 所示, 第三列  $S_2$  和第四列  $S_3$  的能量是简并的. 在表 2 中, 指标  $S_i: [s_i s_i]_s$  代表自旋的耦合方式,  $S_1: [0 0]_0, S_2: [0 1]_1, S_3: [1 0]_1, S_4: [1 1]_0, S_5: [1 1]_1, S_6: [1 1]_2, (3, 3^*)$  代表颜色耦合  $[[qq]_3^* [qq]_3]_1, (6, 6^*)$  代表颜色耦合  $[[qq]_6 [qq]_{6^*}]_1$ , 下标代表颜色的维数. 对于轨道波函数, 当  $r_1$  与  $r_3$  交换或者  $r_2$  与  $r_4$  交换时,  $Q_1 \rightarrow -Q_3, Q_2 \rightarrow -Q_1, Q_3 \rightarrow Q_1, Q_1 \rightarrow Q_3$ , 当两者同时交换时,  $Q_1 \rightarrow Q_1, Q_2 \rightarrow -Q_3, Q_3 \rightarrow Q_3$ , 于是我们可以构造全同粒子的对称化轨道波函数为

$$= [G_a(Q_1)G_b(Q_2) + G_a(Q_2)G_b(Q_1)]G_c(Q_3), \tag{15}$$

其中  $G$  表示高斯函数, 下标代表高斯的宽度. 其余部分的波函数和夸克对反夸克对的完全一样.

色磁相互作用加上谐振子的基态能量和夸克的静止质量, 我们就可以得到环状颜色结构的四夸克态总能量, 如表 3 所示. 在表 3 中, 造成四夸克态能量差别的主要来源是色磁相互作用, 第三列  $S_2$  和第四列  $S_3$  的能量是简并的, 这是由于色磁作用的简并. 能量最低值是 837 MeV, 其量子数为  $f(f^c) = 0^+(0^{++})$ , 可能为  $\pi$  介子的主要成分.

3 讨论

环状颜色结构的四夸克态和六夸克苯的产生机理一样, 它可以通过 2 个介子之间的双胶子产生, 最终形成色单态而得到. 同样四夸克态的中间态的主要成分应该是隐色道, 也会形成四夸克态的颜色共振态, 它是不同于温伯格讨论的所有微观共振态<sup>[14]</sup>. 普遍的讲, 道耦合会降低系统的基态能量, 因此在 QCD 模型计算中应该考虑到耦合效应. 不幸的是, 到目前为止我们没有关于不同颜色结构之间跃迁相互作用的任何信息, 特别是从色单态强子到真正的隐色道多夸克态, 跃迁相互作用对于研究多夸克态是十分必要的. 目前的计算方法是十分粗糙的, 同种颜色结构之间色磁相互作用的耦合效应也没有考虑, 下一步我们将用包含完整哈密顿量的夸克模型夸克进行动力学计算.

环状颜色结构的四夸克态存在的可能性是基于色流管对夸克相互作用的描述, 尽管格点 QCD 对这种想法给了一些支持, 但是其正确性不是不容置疑的. 源于色流管模型的环状颜色结构的四夸克态是不是真实的 QCD 结果, 需要继续研究.

表 2 四夸克系统的超精细相互作用 (MeV)

Table 2 The hyperfine interaction of a tetra-quark state (MeV)

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
$(3, 3^*)$	-294	-98	-98	-112	-7	203
$(6, 6^*)$	147	49	49	-573	-311	213

表 3  $(3, 3^*)$  环状四夸克系统的总能量 (MeV)

Table 3 The total energy of a tetra-quark state with new color structure  $(3, 3^*)$  (MeV)

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
$(3, 3^*)$	1116	1322	1322	1298	1403	1613
$(6, 6^*)$	1557	1459	1459	837	1099	1623

[参考文献]

- [ 1] Jaffe R L. Perhaps a stable dhyperon[ J]. Phys Rev Lett 1977 38(5 : 195-198
- [ 2] Nakano T, Ahn D S, Ahn J K, et al. Evidence for a narrow  $S = +1$  baryon resonance in photoproduction from the neutron [ J]. Phys Rev Lett 2003 91(25 : 012 002-1- 012 002-5.
- [ 3] Jaffe R L, Wilczek F. Diquarks and exotic spectroscopy[ J]. Phys Rev Lett 2003 91: 232 003-1- 232 003-4.
- [ 4] Adler S S, Afanasiev S, Adlala C, et al. Single electrons from heavy-flavor decays in  $p + p$  collisions at  $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$  [ J]. Phys Rev Lett 2006 96( 3 : 032 001-1- 032 001-6
- [ 5] Ablikin M, Bail J Z, Ban11 Y, et al. Observation of a resonance  $X(1835)$  in  $J/\psi \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-$  [ J]. Phys Rev Lett 2005 95( 26 : 262 001-1- 262 001-5.
- [ 6] Aubert I, Barate I R, Boutigny D, et al. Observation of a narrow Meson state decaying to  $D_s + \pi^0$  at a mass of  $2.32 \text{ GeV} / c^2$  [ J]. Phys Rev Lett 2003 90( 24 : 242 001-1- 242 001-7.
- [ 7] Choi S K, Olsen S L, Abe K, et al. Observation of a narrow charmoniumlike state in exclusive  $B \rightarrow K^+ \pi^- J/\psi$  Decays [ J]. Phys Rev Lett 2003 91( 26 : 262 001-1- 262 001-6
- [ 8] Alexandrou C, De Forcrand P, Tsapalis A. Static three-quark  $SU(3)$  and four-quark  $SU(4)$  potentials[ J]. Phys Rev D 2002 65( 5 : 054 503-1- 054 503-7.
- [ 9] Okham F, Suganuma H, Takahashi T. Study for the pentaquark potential in  $SU(3)$  lattice QCD[ J]. Phys Rev Lett 2005 94( 19 : 192 001-1- 192 001-4.
- [ 10] Ping J L, Deng C R, Wang F, et al. Quantum chromodynamics quark benzene[ J]. Phys Lett B 2008 659 607-611.
- [ 11] Isgur N, Paton J. Flux-tube model for hadrons in QCD[ J]. Phys Rev D, 1985 31( 11 : 2 910-2 929
- [ 12] Fan W ang, Wong C W. Multi-quark states[ J]. Nuovo Cimento A, 1986 86 283-297.
- [ 13] Goldman T, Yankielwicz S. Comment on charmonium bound-state calculations using potentials[ J]. Phys Rev D, 1975 12( 9 : 2 910-2 913
- [ 14] Johnson K, Thom C B. Stringlike solutions of the bag model[ J]. Phys Rev D, 1976 13( 7 : 1 934-1 939.
- [ 15] Bali G S. Casimir scaling of  $SU(3)$  static potentials[ J]. Phys Rev D, 2000 62( 11 : 114 503-1- 114 503-11.
- [ 16] Weinberg S. The Quantum Theory of Fields[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995(VI : 159.

[责任编辑: 顾晓天]