第 32卷第 3期
2009年 9月
南京师大学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)
Vol. 32 No. 3
Sep. 2009

一类拟线性常微分方程奇异边值问题的可解性

曹玉升[1], 杨作东[2,3]

(1. 商丘职业技术学院汽车建筑工程系, 河南 商丘 476000)
(2. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)
(3. 南京师范大学中北学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 研究一类拟线性常微分方程两点奇异边值问题的可解性, 其中非线性项没有单调性条件, 应用首次积分法, 得到了此类两点奇异边值问题存在惟一解的充分必要条件.

[关键词] 奇异边值问题, 可解性, 首次积分法
[中图分类号] O175.6 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)03-0015-04

The Solvability of Singular Boundary Value Problems for a Class of Quasilinear Ordinary Differential Equations

Cao Yusheng[1], Yang Zuodong[2,3]

(1. Department of Automobile and Architecture Engineering, Shangqiu Vocational and Technical College, Shangqiu 476000, China)
(2. School of Mathematical Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)
(3. College of Zhongbei, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract: We study the solvability of solutions of a class of two points singular boundary value problem, where the nonlinearity is not need to be monotonous. By the first integral method, we obtain the necessary and sufficient condition of uniqueness of solutions to the problem.

Key words: singular boundary value problem, solvability, the first integral method

本文考虑如下拟线性常微分方程模型问题

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda f(u), \quad u > 0, \quad x \in (-1, 1), \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\lambda > 0$, $p \neq 1$, $f \in C^1(0, \infty)$, $\lim\limits_{s \to 0} f(s) = +\infty$.

关于半线性常微分方程问题

$$\begin{cases} -u'' = \lambda f(u), \quad u > 0, \quad x \in (-1, 1), \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

张志军在[1]中研究过其解的存在性, 该问题相关的模型也出现在一些实际问题中. 在 20世纪 80~90年代, 国内外均有大量深入的研究[2-5], 相应的椭圆型方程以及拟线性椭圆型方程也有深入的研究[6-8]. 本文主要应用首次积分法研究问题(1)的可解性, 把半线性问题推广到拟线性问题.

定义 $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$, $J := \{s > 0, F(\tau) > F(s), \forall \tau > s\}$.

本文的结论:

定理 1 给定 $\lambda > 0$, (1)存在惟一解 $u \in C^1(-1, 1) \cap C[-1, 1]$, 使得 $M = u(0) = \max\limits_{x \in (-1, 1)} u(x)$

收稿日期: 2009-03-30
基金项目: 国家自然科学基金(10871060)、江苏省高校自然科学基金(08KJB110005)资助项目.
通讯联系人: 杨作东, 教授, 博士生导师, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: yangzuodong@njnu.edu.cn

>0, 且 $M\in J$ 的充分必要条件是: 存在 $M\in J$, 使得

$$I(\lambda,M):=\int_0^M\frac{\mathrm{d}s}{(F(M)-F(s))^{\frac{1}{p}}}=(p\lambda/(p-1))^{\frac{1}{p}}.$$

1　定理的证明

首先给出方程(1)的解关于 $x=0$ 是对称的.

假如 u 是问题(1)的一个非负解. 令 $\rho=\min_{x\in(-1,1)}u(x)$, 下面证明 u 关于 $x=0$ 是对称的. 假如 u 是问题(1)的一个正解, 则在 $(-1,1)$ 内 u 只有一个最小值点(即在 $(-1,1)$ 内 u 没有局部最大值点), 并且 u 是下述问题的惟一解

$$v''=\frac{f(y)}{(p-1)|v'|^{p-2}},$$
$$v(\varepsilon)=v_0,$$
$$v'(\varepsilon)=u'(\varepsilon).$$

在 $[\varepsilon,\xi_0)$, ε 是一个给定的常数, 由常微分方程理论可知 ξ_0 是 u 的最小值点(假如在 $(-1,1)$ 内 u 有2个最小值点, 对(1)直接积分可得矛盾, 同理可得在 $(-1,1)$ 内 u 没有最大值点). 令 $y=-x$, $x\in(\xi_0,-\varepsilon]$ 且 $u(y)=u(-x)$. 则 $u(y)$ 满足问题

$$u_{yy}=-\frac{f(u)}{(p-1)|u|^{p-2}},\ 在\ [\varepsilon,\xi_0),$$
$$u(\varepsilon)=v_0,$$
$$u'(\varepsilon)=u'(\varepsilon).$$

则, $u(x)$ 和 $u(y)$ 满足同样的初值问题. 令 η 是 u 的最小值点, 则 $\eta=\xi_0$. 又因在 (ε,ξ_0) 内 $u(x)=u(y)$, 并且 $u_x(\xi_0)=-u_y(-\xi_0)=0$, 则 $\eta=-\xi_0$, 从而 $\xi_0=0$ 并且对于 $x\in(\varepsilon,0)$, $u(x)=u(-x)$. 由 ε 的任意性可知 u 关于 $x=0$ 对称, 且在 $(-1,0)$ 上 $u'<0$, 在 $(0,1)$ 上 $u'>0$, 即 $u(x)$ 在 $x=0$ 点取到最小值.

必要性　由对称性可知, (1)的解为偶函数且 $M=u(0)=\max_{x\in(-1,1)}u(x)>0$, $u'(0)=0$. 进一步, 当 $x\in[0,1)$ 时, $u(x)$ 严格单调递减; 而当 $x\in(-1,0)$ 时, $u(x)$ 严格单调递增, 因此由(1)可知,

$$-(|u'|^{p-2}u')'u'=\lambda f(u)u',\ x\in(-1,1),$$
$$\frac{p-1}{p}|u'|^p=\lambda[F(M)-F(u(x))],$$
$$u'(x)=\left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{\frac{1}{p}}(F(M)-F(u(x)))^{\frac{1}{p}},\ x\in(-1,0],$$
$$u'(x)=-\left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{\frac{1}{p}}(F(M)-F(u(x)))^{\frac{1}{p}},\ x\in[0,1),$$
$$\int_0^{u(x)}\frac{\mathrm{d}s}{(F(M)-F(s))^{\frac{1}{p}}}=\left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{\frac{1}{p}}(x+1),\ x\in(-1,0].$$

特别地, 取 $x=0$, 得

$$I(\lambda,M):=\int_0^M\frac{\mathrm{d}s}{(F(M)-F(s))^{\frac{1}{p}}}=\left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{\frac{1}{p}}.$$

充分性　既然 $I(\lambda,M):=\int_0^M\frac{\mathrm{d}s}{(F(M)-F(s))^{\frac{1}{p}}}=\left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$, 则对任意的 $x\in(-1,0]$, 都存在惟一的 $u\in(0,M]$, 使得

$$\int_0^{u(x)}\frac{\mathrm{d}s}{(F(M)-F(s))^{\frac{1}{p}}}=\left(\frac{p}{p-1}\lambda\right)^{\frac{1}{p}}(x+1).$$

由含参量积分的性质可知, 当 $x\in(-1,0]$, $u(x)$ 严格单调递增, 且 $u\in C^2(-1,0]$, $u(0)=M$, $u'(x)=1/x'(u)=\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\lambda(F(M)-F(s))^{\frac{1}{p}}$. 从而再微分1次, 即知 u 在 $(-1,0]$ 上满足方程.

令

$$u(x)=\begin{cases}0, & x=\pm 1,\\ u(-x), & x\in(-1,0),\end{cases}$$

则容易验证 $u\in C^1(-1,1)\cap C[-1,1]$ 且 u 是 (1) 的解. 证毕.

2 实例

例 **1** 考虑如下问题

$$\begin{cases}-(|u'|^{p-2}u')'=\dfrac{1}{u^{\alpha}}, & u>0,\ x\in(-1,1),\\ u(-1)=u(1)=0,\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\alpha>0$

应用定理 1 可知, (2) 存在解 $u\in C^1(-1,1)\cap C[-1,1]$ 的充分必要条件是存在 $M>0$, 使得

$$I(M):=\int_0^M\frac{\mathrm{d}s}{(F(M)-F(s))^{\frac{1}{p}}}=\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中, 当 $\alpha=1$ 时, $F(s)=\ln s$; 而当 $\alpha\neq 1$ 时, $F(s)=\dfrac{1}{\alpha-1}s^{\alpha-1}$.

可以证明:

(Ⅰ) $\forall M>0$, $I(M)$ 有限, 即 $I(M)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$;

(Ⅱ) $\lim\limits_{M\to 0^+}I(M)=0$, $\lim\limits_{M\to\infty}I(M)=\infty$;

(Ⅲ) $I(M)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格单调递增;

(Ⅳ) $I(M)$ 在 $(0,\infty)$ 内无穷次可微.

因此, 存在惟一的 $M_0>0$ 使得 $I(M_0)=(p/(p-1))^{\frac{1}{p}}$. 从而 (2) 存在惟一解 $u\in C^{\infty}(-1,1)\cap C[-1,1]$.

令

$$\Phi(u)=\int_0^u\frac{\mathrm{d}s}{(F(M_0)-F(s))^{\frac{1}{p}}},\quad \forall u\in(0,M_0].$$

明显地, 有

$$u(x)=\begin{cases}\Phi^{-1}\left(\left(\dfrac{p}{p-1}(x+1)\right)^{\frac{1}{p}}\right), & x\in(-1,0],\\ \Phi^{-1}\left(\left(\dfrac{p}{p-1}(1-x)\right)^{\frac{1}{p}}\right), & x\in[0,-1),\\ 0, & x=\pm 1.\end{cases} \tag{3}$$

例 **2**

$$\begin{cases}-(|u'|^{p-2}u')'=\mathrm{e}^{-u}, & u>0,\ x\in(-1,1),\\ u(-1)=u(1)=0\end{cases} \tag{4}$$

应用定理 1 可知, (4) 存在解 $u\in C^1(-1,1)\cap C[-1,1]$ 的充分必要条件是存在 $M>0$, 使得

$$I(M):=\int_0^M\frac{\mathrm{d}s}{(F(M)-F(s))^{\frac{1}{p}}}=\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $F(s)=-\mathrm{e}^{-s}$.

类似于例 1, 可以证明:

(Ⅰ) $\forall M>0$, $I(M)$ 有限, 即 $I(M)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$;

(Ⅱ) $\lim\limits_{M\to 0^+}I(M)=0$, $\lim\limits_{M\to\infty}I(M)=\infty$;

(Ⅲ) $I(M)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格单调递增;

(Ⅳ) $I(M)$ 在 $(0,\infty)$ 内无穷次可微.

因此,存在惟一的 $M_0 > 0$ 使得 $I(M_0) = (p/(p-1))^{\frac{1}{p}}$. 从而(4)存在惟一解 $u \in C^\infty(-1,1) \cap C[-1,1]$.

令

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{ds}{(F(M_0) - F(s))^{\frac{1}{p}}}, \quad \forall u \in (0, M_0].$$

明显地,有(3)成立.

[参考文献]

[1] 张志军. 一类奇异边值问题的可解性[J]. 烟台大学学报:自然科学与工程版, 1999, 12(4): 235-237.

[2] Dalmasso R. Positive solutions of singular boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 1996, 27: 645-652.

[3] Erbe L H, Wang H. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120: 743-748.

[4] Lan K, Wbee J R L. Positive solutions of semilinear differential equations with singularties[J]. J Diff Eqns, 1998, 148: 407-421.

[5] Nachman A, Callegari A. A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids[J]. SIAM J Appl Math, 1986, 28: 271-281.

[6] 周杰, 杨作东. 一类拟线性椭圆型方程正奇异解的能量估计[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2006, 29(1): 21-24

[7] Zhao Jianqing, Yang Zuodong. Nonlinear boundary value problems for a class of quasilinear integro differential equations[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2006, 29(3): 20-24

[8] 杨含生, 杨作东. 一类拟线性常微分方程爆破解的存在性[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2004, 27(2): 5-9.

[责任编辑: 丁　蓉]

(上接第14页)

[参考文献]

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory With Applications[M]. London: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[2] Wu B, Meng J. Basic properties of total transformation graph[J]. J Math Study, 2001, 34(2): 109-116

[3] Chen Jinyang, Meng Jixiang. Super edge-connectivity of transformation graph G^{--+}[J]. Journal of Shanxi Normal University: Natural Science Edition, 2006, 34(1): 123-124

[4] Wang Lu. On the planarity of some transformation graphs[J]. Journal of Huaihua University, 2007, 26(8): 5-7.

[5] Behzad M, Radjavi H. The total group of a graph[J]. Proc Amer Math Soc, 1968(19): 159-163

[6] Wu B, Zhang Li, Zhang Zhao. The transformation graph G^{xyz} when $xyz = -++$[J]. Discrete Math, 2005(296): 263-270

[7] Lin Qi, Shu Jinlong. Regularity and spectral radius of transformation graphs[J]. Operations Research Transactions, 2007, 11(1): 102-110.

[责任编辑: 丁　蓉]