

# 势阱中的混沌及其量子对应

汪 昭, 杨双波

(南京师范大学物理科学与技术学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 通过数值计算, 研究了势阱谐振子耦合系统的经典动力学, 发现随着能量  $E$  越低, 或势阱阱宽  $2a$  越宽, 或耦合系数  $\lambda$  越大, 系统混沌程度越强. 通过不同条件下最近邻能级间距分布与对应的经典动力学比较发现量子-经典结果符合得很好. 对一些低能疤痕量子态找到了与其对应的经典周期轨道.

[关键词] 势阱, 混沌, 经典量子对应

[中图分类号] O413.1 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)03-0031-06

## Chaos in Potential Well and Classical-Quantum Correspondence

Wang Zhao, Yang Shuangbo

(School of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract** This paper numerically studied the classical dynamics for the coupled potential well and the Harmonic oscillator system. It is found that the lower the system energy, or the wider the width of the potential well, or the larger the coupling constant, the stronger the chaos. By comparing with the nearest neighbor spacing distribution of energy levels, we found that the quantum results agree with the classical results very well. For some low energy quantum scarring states, we found the corresponding classical periodic orbits.

**Key words** potential well, chaos, classic-quantum correspondence

近些年来, 经典混沌在量子力学下的表现, 以及不可积系统的量子化吸引着物理学和数学研究者的注意力. 经典混沌的量子表现主要集中在以下 3 个方面<sup>[1]</sup>: (1) 非定态波函数的时间演化特征; (2) 能量本征函数的形态, 如等高线图中节线的避免相交性及疤痕态等; (3) 能谱统计特征, 如能级按最近邻间距的分布对可积系统为泊松分布, 对完全不可积系统为 Wigner 分布. 为了理解混沌系统的量子表现, 开发了半经典量子化方法把经典轨道与量子态联系起来, 如 Gutzwiller 的求迹公式<sup>[2]</sup>将量子能态密度与对经典系统的周期轨道求和联系起来. 最近我们建议了量子化康托环模型<sup>[3]</sup>, 认为与量子态对应的量子化结构是康托环, 用 EBK 形量子化条件对其进行量子化得到了能量本征值, 构造了半经典波函数, 结果与量子力学符合得很好.

混沌理论中, 束缚态混沌系统最常见的模型是耦合振子系统. 如二维耦合 Morse 振子系统, Henon-Heiles 系统<sup>[4]</sup>, 耦合四次方振子系统<sup>[5]</sup>. 近年来由于混沌势阱系统进行计算、实验测量相对比较简便, 学者开始关注势阱中混沌系统的特点<sup>[5]</sup>. 本文构造了 1 个耦合的势阱谐振子二维近可积系统, 通过改变各独立参量, 研究了其混沌性质及其量子对应.

### 1 经典情况下势阱混沌系统情况

近可积系统的哈密顿量可以写成可积部分和不可积扰动部分之和. 我们构造的哈密顿系统如下: 当  $|x| < A$  时:

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}y^2 + \left( x^2 y - \frac{1}{3}y^3 \right), \quad (1)$$

收稿日期: 2008-06-20

基金项目: 国家自然科学基金 (10674073) 资助项目.

通讯联系人: 杨双波, 教授, 研究方向: 理论物理及非线性物理. E-mail: yangshuangbo@njnu.edu.cn

在  $x = A$  和  $x = -A$  处为势阱壁的位置 ( $A > 0$ ). 在势阱壁上粒子做完全弹性碰撞.

利用正则方程组:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ -y - x^2 + y^2 \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

及初始条件我们可以得到系统轨道.

系统不可积扰动部分采用 Henon-Heiles 的扰动项. 我们构造的系统主要有 3 个变量: 系统耦合强度  $\lambda$ , 系统能量  $E$ , 势阱宽度 ( $2A$ ). 分别改变这 3 个参量, 利用庞家莱截面, 我们研究了其轨道混沌情况.

(1) 系统混沌特性随  $\lambda$  值变化情况

我们选定能量  $E = 1$  改变  $\lambda$  的值. 当  $\lambda = 0$  时, 系统的  $x, y$  方向变量可以分离, 系统完全可积. 如图 1 所示, 此时庞家莱截面是一些嵌套的圆环. 随着  $\lambda$  的增大, 外围的规则环破裂, 形成混沌区域. 随着  $\lambda$  进一步增大, 系统完全进入混沌.

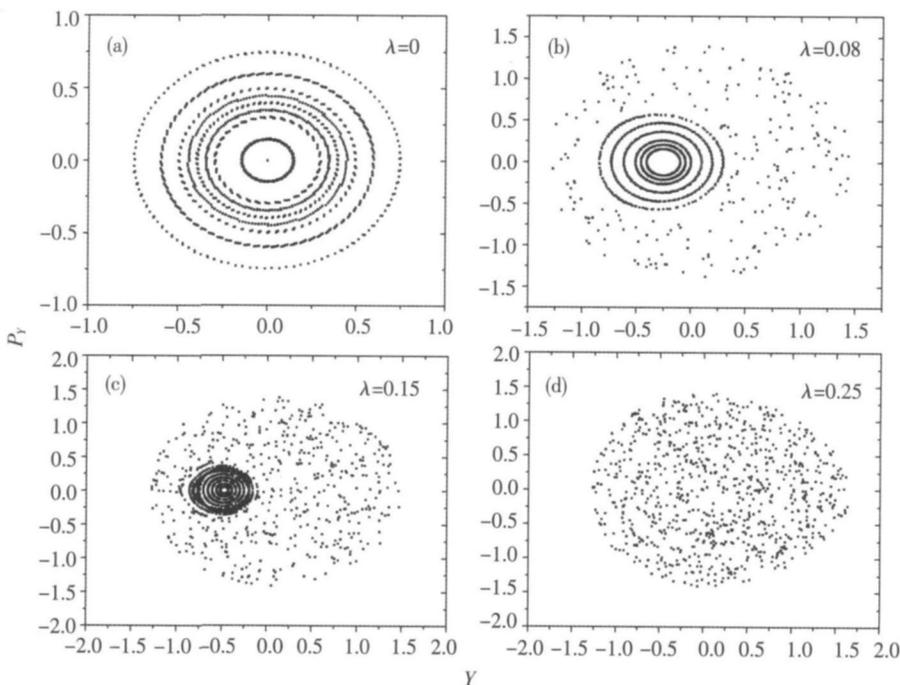


图 1 对固定的  $A=2.5, E=1.0$ , 不同  $\lambda$  下的庞家莱截面: (a) $\lambda=0.0$ ; (b) $\lambda=0.08$ ; (c) $\lambda=0.15$ ; (d) $\lambda=0.25$   
 Fig.1 For fixed  $A=2.5, E=1.0$ , SOS' s for different  $\lambda$ : (a) $\lambda=0.0$ ; (b) $\lambda=0.08$ ; (c) $\lambda=0.15$ ; (d) $\lambda=0.25$

(2) 系统混沌特性随系统能量  $E$  的变化情况

如图 2 所示, 从庞家莱截面上, 我们看出, 当能量比较小时, 系统处于完全混沌状态. 随着能量的增加, 当  $E = 1.2$  时, 在混沌区域之间位置出现了一个规则小岛. 当  $E = 1.6$  时, 中心区域的小岛随着能量增加而扩张. 同时, 我们发现, 在中心区域四周, 出现了一些不稳定区域, 如同从中心规则岛分裂出来, 这是一种明显的自相似结构. 随着能量的进一步扩大, 规则岛控制的区域进一步扩大. 而中心区域原有的不稳定自相似结构也逐渐缩小并消失. 中心区域明显稳定性增加. 当  $E = 4.5$  时, 系统完全进入规则状态. 对 Henon-Heiles 系统, 以及类似的二维耦合振子来说, 如耦合 4 次方振子, 通常情况下, 混沌程度随着能量的增大而加强. 但是通过庞家莱截面我们发现, 随着能量的增大, 势阱中的混沌系统的混沌特性反而削弱了. 这一点和耦合振子系统完全相反.

(3) 系统混沌特性随着势阱壁位置  $A$  的变化情况

利用庞家莱截面, 通过改变势阱位置  $A$ , 我们发现, 当  $A = 1.5$  时, 系统相空间轨道是完全混沌的. 随着  $A$  值的减小, 保持其他参数不变, 庞家莱截面从混沌到规则, 这说明, 对于一个给定的耦合系统, 势阱宽度的减小, 可以使混沌程度减小, 如图 3 所示.

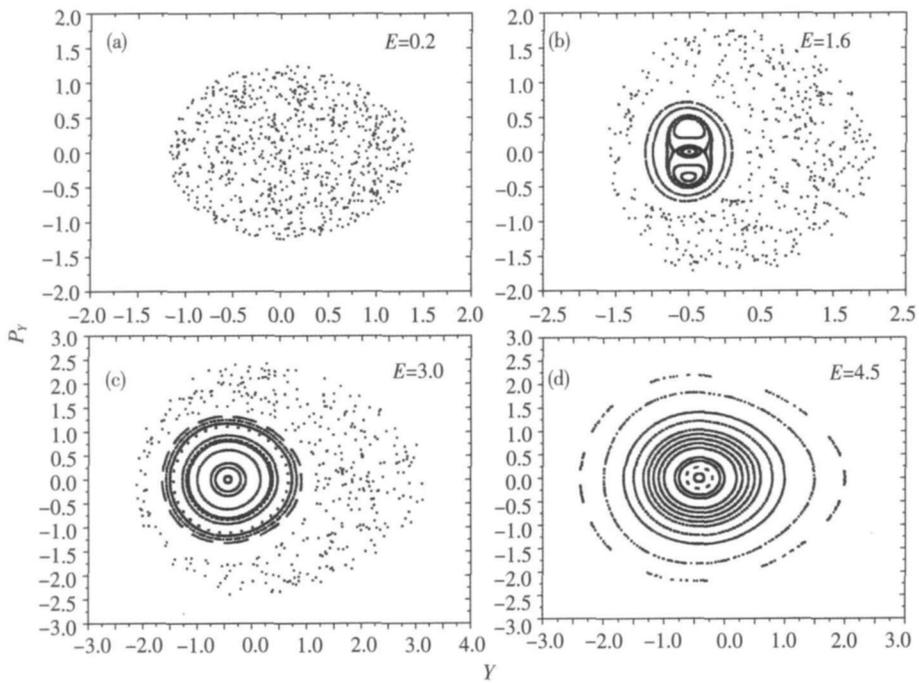


图 2 对固定的  $A=2.5, \lambda=0.2$ , 不同  $E$  下的庞加莱截面: (a) $E=0.2$ ; (b) $E=1.6$ ; (c) $E=3.0$ ; (d) $E=4.5$   
 Fig.2 For fixed  $A=2.5, \lambda=0.2$ , SOS' s for different  $E$ : (a) $E=0.2$ ; (b) $E=1.6$ ; (c) $E=3.0$ ; (d) $E=4.5$

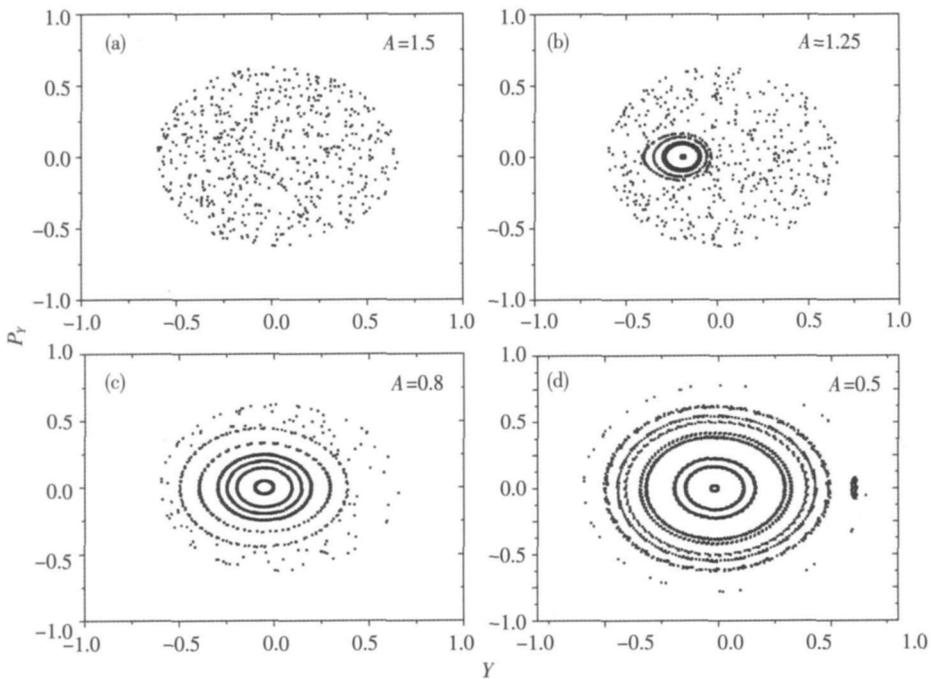


图 3 对固定的  $E=1.0, \lambda=0.2$ , 不同  $A$  下的庞加莱截面: (a) $A=1.5$ ; (b) $A=1.25$ ; (c) $A=0.8$ ; (d) $A=0.5$   
 Fig.3 For fixed  $E=1.0, \lambda=0.2$ , SOS' s for different  $A$ : (a) $A=1.5$ ; (b) $A=1.25$ ; (c) $A=0.8$ ; (d) $A=0.5$

## 2 势阱中近可积系统的能谱统计特征

本文采用一维无限深势阱波函数  $\psi_m(x)$  与一维谐振子波函数  $\psi_n(y)$  的乘积作为基函数, 对角化系统哈密顿量得到本征能量 (能谱) 及本征波函数. 在不同参数下计算系统最近邻能级间距分布  $P(S)$ , 结果如下.

(1) 系统能谱统计特性随  $\lambda$  值变化情况

从能谱统计图 4 可以看出, 当  $\lambda = 0$  时, 能谱统计显得毫无规律, 此时系统变量可以完全分离, 系统能级可以利用解析方式计算. 在其他参量不变的条件下, 随着  $\lambda$  值的增大, 在相同能区的能级统计分布, 逐渐

由泊松分布转向高斯正交分布.

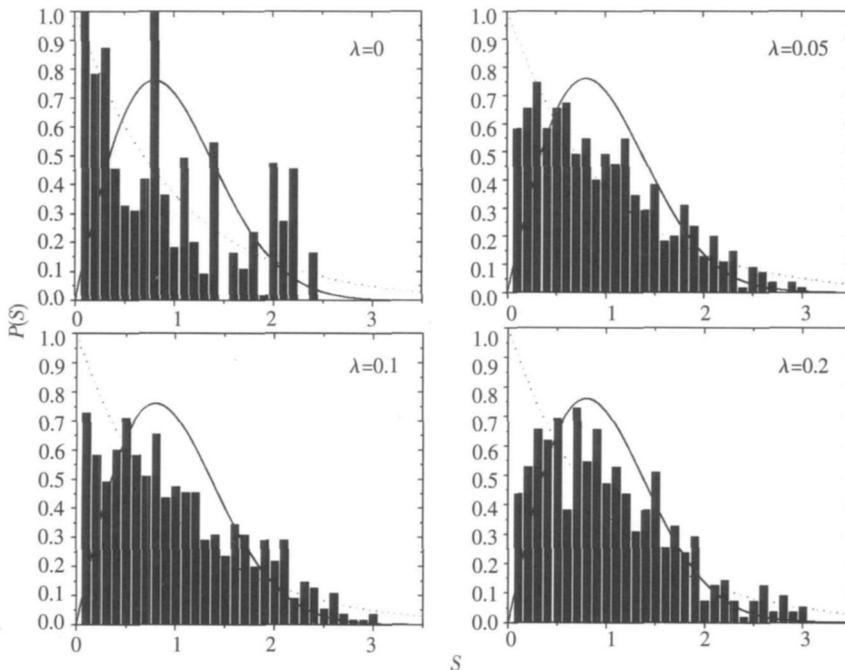


图 4 对固定的  $A=2.5, h=0.075$ , 在不同  $\lambda$  值下, 相同能谱区域的最近邻能级间距分布情况. (a) $\lambda=0.0$ ; (b) $\lambda=0.05$ ; (c) $\lambda=0.1$ ; (d) $\lambda=0.2$   
 Fig.4 For fixed  $A=2.5, h=0.075$ , the nearest neighbor spacing distribution for energy levels within the same energy range for different  $\lambda$  values: (a) $\lambda=0.0$ ; (b) $\lambda=0.05$ ; (c) $\lambda=0.1$ ; (d) $\lambda=0.2$

(2) 系统能谱统计特征在不同能区的变化情况

利用能谱统计进行混沌特性研究时, 我们希望在同一能谱的不同能量大小的区段的统计行为进行比较. 图 5 为  $\lambda=0.2$  时不同能谱区间的最近邻能级间距分布. 左为低能级区域, 近似高斯正交分布, 右为高能级区域, 表现为泊松分布.

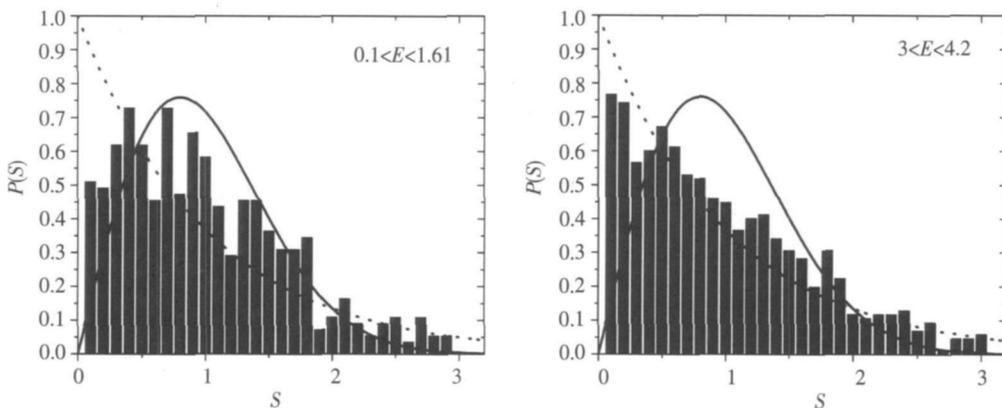


图 5  $\lambda=0.2$  时, 同一能谱不同区间的能级统计情况, 左图为  $0.1 < E < 1.61$ , 右图为  $3.0 < E < 4.2$   
 Fig.5 For fixed  $\lambda=0.2$ , the statistics of the energy levels within different regions of the same energy spectra: the left figure for  $0.1 < E < 1.61$ , and the right figure for  $3.0 < E < 4.2$

(3) 系统能谱统计特征在不同势阱宽度情况下的变化

从上文的研究, 我们得到结论: 经典情况下, 势阱的宽度减小, 系统的混沌程度削弱. 在量子情况下, 我们通过改变矩阵元中  $A$  的值, 对角化矩阵, 获得能谱最近邻能级间距分布的情况. 从能谱分布图, 我们看出, 随着  $A$  值, 即势阱宽度 ( $2A$ ) 值的减小, 能谱统计从接近高斯正交分布, 趋向于泊松分布, 参照前文中相应改变势阱宽度的混沌性质研究, 我们可以认为, 两者同样具有对应关系.

根据以上的数值计算结果, 我们认为, 势阱中量子混沌特性和经典情况一致. 随着能量的增大或势阱宽度的减小, 或  $A$  值的减小, 系统最近邻能级间距统计分布从接近高斯正交分布向接近泊松分布转移, 即系统的混沌特性减弱, 由不规则转向规则. 我们也发现, 在能谱统计中, 我们很难真正得到刚性混沌对应的

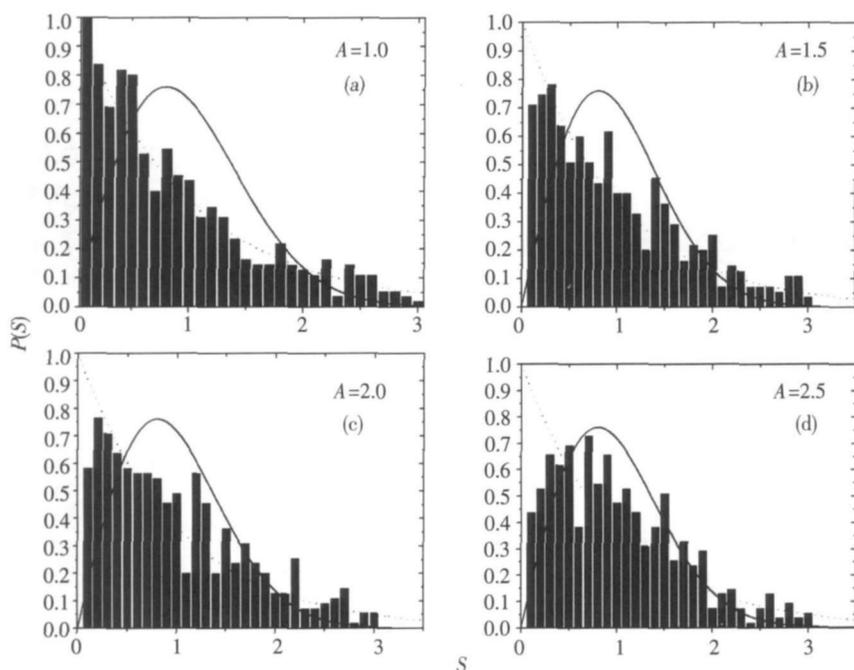


图 6 在不同  $A$  值下, 相同能谱区域的最近邻能级间距分布情况, 参数为:  $\hbar=0.075$ ,  $A$  的值依次为 1.0, 1.5, 2.0, 2.5  
 Fig.6 For fixed  $\hbar=0.075$ , the nearest neighbor spacing distributions for energy levels within the same energy region for different  $A$  values. (a)  $A=1.0$ ; (b)  $A=1.5$ ; (c)  $A=2.0$ ; (d)  $A=2.5$

高斯正交分布. 原因是统计需要大量的采样, 才能如实反映系统性质, 但是, 对于我们研究的系统, 混沌情况只存在于一个特定能谱范围内, 而这个范围内的能级数目并不足以体现体系的混沌特性.

### 3 混沌系统经典-量子对在波函数形态的特征表现

经典混沌在量子领域表现的另外一个方向是研究对应经典混沌的量子系统的波函数特征. 疤痕现象是不可积量子系统的主要表现. 其特征是在经典周期轨道附近的高几率密度分布. 通过计算, 我们找到了一些波函数, 可以同经典周期轨道相对应.

图 7 为我们找到的波函数几率密度分布等高线, 同不稳定周期轨道之间存在的对应关系. 图中, 黑色实线为经典状态下的周期轨道. 环线为势阱中几率密度分布的等高线. 从图中可以看到, 沿着图中不稳定周期轨道的路径, 存在着高几率密度分布. 我们计算了一定能量范围内的庞家莱截面, 确认当  $\lambda = 0.2$  能量  $E$  在 0.1 到 0.4 之间时, 系统始终处于混沌状态. 所以, 我们认为图 7 是我们研究系统存在的疤痕现象.

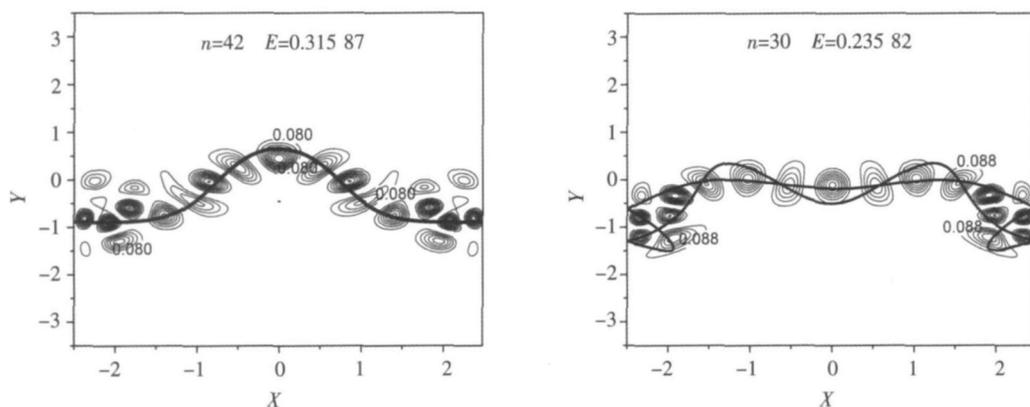


图 7 势阱中几率密度分布函数  $|\Psi(x,y)|^2$  的等高线及其对应的不稳定周期轨道.  $\lambda=0.2$ , 左:  $n=42$ ,  $E=0.31587$ , 右:  $n=30$ ,  $E=0.23582$   
 Fig.7 The contour plot for the probability density function  $|\Psi(x,y)|^2$  and the corresponding unstable periodic orbits for  $\lambda=0.2$ ; the left figure for  $n=42$ ,  $E=0.31587$ , and the right figure for  $n=30$ ,  $E=0.23582$

## 4 结论

从我们的研究工作,得到以下结论:(1)在我们构造的系统中  $\lambda$  值控制着系统混沌的强弱,  $\lambda$  值增大,系统混沌程度增加;(2)随着能量  $E$  的增大,系统混沌减弱,这种情况同耦合振子混沌系统情况相反,在量子情况下,GOE分布存在于低能级区域;(3)随着势阱宽度的缩小,系统混沌减弱,量子情况与经典情况一致;(4)疤痕现象存在于较低的激发态.在以往的文献中,通常疤痕现象存在于比较高的激发态,并且由于这个原因造成数值计算的困难,通过研究我们发现,由于量子阱中混沌存在于相对较低的激发态,所以疤痕现象也存在于较低的激发态.由于势阱中与混沌有关的相关现象可以存在于低能态,势阱是研究量子混沌理论的一个很好的载体.

### [参考文献]

- [1] 顾雁. 量子混沌[M]. 上海: 上海科技出版社, 1996: 97-159.
- [2] Gutzwiller M. C. Chaos in Classical and Quantum Mechanics [M]. New York: Springer-Verlag, 1990: 282-300.
- [3] Yang S B, Keilmann M E. Semiclassical wave function in the chaotic region from a quantizing contour[J]. Chemical Physics, 2006, 322(1): 30-40.
- [4] Henon M, Heiles C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments[J]. Astron J, 1964, 69(1): 73-79.
- [5] Waterland R L, Yuan J M, Martens C C, et al. Classical-quantum correspondence in the presence of global chaos[J]. Phys Rev Lett, 1988, 61(24): 2733-2736.
- [6] Fromhold T M, Wilkinson P B, Sheard F W, et al. Manifestations of classical chaos in the energy level spectrum of a quantum well[J]. Phys Rev Lett, 1995, 75(6): 1142-1145.

[责任编辑: 顾晓天]