第 32卷第 4期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 32 No. 4
2009年 12月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition) Dec, 2009

非对称不定问题 Mortar型旋转 Q_1 元的多重网格方法

黄佩奇[1,2]

(1. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)
(2. 南京林业大学应用数学系, 江苏 南京 210037)

[摘要] 讨论了 mortar型旋转 Q_1 元求解非对称不定问题, 给出了求解离散问题的多重网格算法, 证明了多重网格方法的最优收敛性, 即收敛速度与网格大小和层数无关. 最后, 数值结果验证了本文的理论分析.

[关键词] 多重网格, mortar元, 旋转 Q_1 元, 非对称不定问题
[中图分类号] O241. 82 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2009)04-0001-06

Multigrid for Mortar-Type Rotated Q_1 Element Method for Nonsymmetric and Indefinite Problems

Huang Peiqi[1,2]

(1. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)
(2. Department of Applied Mathematics, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China)

Abstract A mortar-type rotated Q_1 element method is discussed for nonsymmetric and indefinite problems. A multigrid algorithm is proposed for the discrete systems which gives an optimal convergence factor, i.e., the convergence rate is independent of the mesh size and mesh level. Numerical results confirm our theoretical analysis.

Key words multigrid, mortar element, rotated Q_1 element, nonsymmetric and indefinite problems

关于非协调元的多重网格法, 已有很多学者[1,2] 用其求解非对称不定问题. 我们考虑下列模型问题:

$$\begin{cases} Lu = - \quad (a \quad u) + b \quad u + du = f, & \text{in} \quad , \\ u = 0, & \text{on} \quad , \end{cases} \tag{1}$$

此处 是 $\mathbf{R}^2$ 中的四边形区域, $\boldsymbol{a}(x) = (a_{ij})$ 为定义在 上一致对称正定的张量, $a_{ij}(x) \quad C^1(\quad)$, $b(x) \quad (C^1(\quad))^2$, $d(x) \quad C^0(\quad)$, $f \quad L^2(\quad)$.

(1) 的变分形式为: 求 $u \quad H_0^1(\quad)$ 使得

$$a(u, v) = (f, v), \qquad v \quad H_0^1(\quad), \tag{2}$$

其中 $a(u, v) = (a \quad u, \quad v) + (b \quad u, v) + (du, v)$.

假设对 $f \quad L^2(\quad)$, (2) 有惟一解 $u \quad H_0^1(\quad) \quad H^2(\quad)$, 且满足

$$u \quad _2 \quad C \quad f \quad _0. \tag{3}$$

下面介绍 mortar元方法. 首先将区域 分解成 N 个互不重叠的四边形子区域, $= \bigcup_{k=1}^{N} \quad _k$, 其中两个闭子区域的交集 $_i \quad _j$ 是空集或是一公共顶点或是一公共边. 界面 $\mathscr{S} = \bigcup_{k=1}^{N} \quad _k \setminus$ 被分解成一组不相交的直线段 $_m (1 \quad m \quad M)$, 显然这些直线段为相邻子区域的交集. 我们定义 $_i$ 与 $_j$ 的公共边为 $_m$. 令 $_{m(i)}$

收稿日期: 2009-01-12
基金项目: 国家自然科学基金(10871100)、国家重点基础研究专项经费(2005CB321704)、江苏省自然科学基金(BK2008426)资助项目.
通讯联系人: 黄佩奇, 博士研究生, 讲师, 研究方向: 有限元理论. E-mail: pqhuang1979@163.com

$=\ {}_m|_{\partial}$, ${}_{m(j)} =\ {}_m|_{\partial}$, 我们选其中的一条边作为 mortar边, 此处不妨取 ${}_{m(i)}$ 为 mortar边, 相应的 ${}_{m(j)}$ 为非 mortar边.

设 $\mathcal{T}_1^k$ 是 ${}_k$ 最粗的拟一致的四边形剖分, $h_{1,k}$ 是 $\mathcal{T}_1^k$ 的剖分尺寸, 且 $h_1 = \max_{1\ k\ N} h_{1,k}$, $\mathcal{T}_1 = \ {}_{k=1}^{N} \mathcal{T}_1^k$. 通过连接 $\mathcal{T}_1$ 中的每个四边形的对边中点来加密剖分 $\mathcal{T}_1$ 得到拟一致的剖分 $\mathcal{T}_2$, 且其剖分尺寸为 $h_2 = h_1/2$ 重复这个过程, 我们得到一系列拟一致的剖分 $\mathcal{T}_l$, $l = 1, 2, \ , L$, 且 $h_l = h_1/2^{l-1}$. 对每个剖分 $\mathcal{T}_l^k(\ {}_k)$, 旋转 Q_1 元空间为:

$$V_l^k(\ {}_k) = \Big\{ v \quad L^2(\ {}_k) \mid \ v|_E = a_E^1 + a_E^2 x + a_E^3 y + a_E^4 (x^2 - y^2),\ a_E^i \quad \mathbf{R},$$

$$ {}_E \ v \mid \ \mathrm{d}s = 0, \quad E \quad \mathcal{T}_l^k(\ {}_k);\quad 对 E_1, E_2 \quad \mathcal{T}_l^k(\ {}_k),$$

$$如果 \ E_1 \quad E_2 = e, 则 \ {}_e v|_{E_1} \mathrm{d}s = \ {}_e v|_{E_2} \mathrm{d}s \Big\}.$$

令 $V_l = \ {}_{k=1}^{N} V_l^k = \{ v_l \mid v_l^k = v_l|_{\ k} \quad V_l^k(\ {}_k) \}$. 显然, $V_1 \quad V_2 \qquad V_L$.

在任一界面 ${}_m = \ {}_{m(i)} = \ {}_{m(j)}$, $1 \quad m \quad M$ 上, 有两个不同的独立一维剖分 $\mathcal{T}_l(\ {}_{m(i)})$ 和 $\mathcal{T}_l(\ {}_{m(j)})$. 定义辅助的检验函数空间 $M_l(\ {}_{m(j)})$ 为:

$M_l(\ {}_{m(j)}) = \{ v \quad L^2(\ {}_{m(j)}) \mid v$ 在非 mortar剖分 $\mathcal{T}_l(\ {}_{m(j)})$ 的单元上为分片常数$\}$.

在每个非 mortar边 ${}_{m(j)}$ 上, 我们定义一个 L^2 正交投影算子 $Q_{l,\ m(j)}: L^2(\ {}_m) \quad M_l(\ {}_{m(j)})$,

$$(Q_{l,\ m(j)} v, w)_{L^2(\ m(j))} = (v, w)_{L^2(\ m(j))}, \qquad w \quad M_l(\ {}_{m(j)}).$$

现在定义 mortar型旋转 Q_1 元空间

$$V_l = \{ v \quad V_l \mid Q_{l,\ m(j)}(v|_{\ m(j)}) = Q_{l,\ m(j)}(v|_{\ m(i)}),\ 对 \quad {}_{m(i)} = \ {}_{m(j)} \quad S \}.$$

定义 $\ v \ {}_{l,k} \hat{=} \ {}_{E \ \mathcal{T}_l^k} \ {}_E \ v \quad v \, \mathrm{d}x$, $\quad v \quad V_l^k$, 令 $\ v \ {}_l^2 \hat{=} \ {}_{k=1}^{N} \ v \ {}_{l,k}^2$, $\quad v \quad V_l$, 由[3]知 $\quad {}_l$ 是 V_l 上的范数.

关于变分问题(2)的 mortar型旋转 Q_1 元的逼近形式为: 求 $u_l \quad V_l$, 使得

$$a_l(u_l, v_l) = (f, v_l), \qquad v_l \quad V_l, \tag{4}$$

其中 $a_l(u_l, v_l) = a_l^s(u_l, v_l) + b_l(u_l, v_l)$, $a_l^s(u_l, v_l) = \ {}_{E \ \mathcal{T}_l} (a \quad u_l, \quad v_l)_E$, $b_l(u_l, v_l) = \ {}_{E \ \mathcal{T}_l} (b \quad u_l, v_l)_E + (d u_l, v_l)$.

对上述离散问题, 由[4, 引理 4 4], [3, 引理 4 2]及[5]中的方法可得如下误差估计:

定理 1[6]　设 u, u_l 分别是(2)和(4)的解, 则当 h_l 充分小时有

$$\ u - u_l \ {}_l \quad C \left(\ {}_{k=1}^{N} h_{l\,k}^2 \ u \ {}_{2,\ k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1　多重网格方法

在 V_l 空间中定义如下算子:

$$(A_l v, w) = a_l(v, w), \qquad v, w \quad V_l,$$
$$(\hat{A}_l v, w) = a_l^s(v, w), \qquad v, w \quad V_l,$$
$$(B_l v, w) = b_l(v, w), \qquad v, w \quad V_l.$$

易验证 $A_l = \hat{A}_l + B_l$, 则(4)式可写为 $A_l u_l = f_l$, 其中 $(f_l, v) = f(v)$, $\quad v \quad V_l$.

在给出算法之前, 我们对不嵌套的有限元空间 V_l 给出一个网格转移算子. 首先, 我们定义算子 ${}_l^k$: $V_{l-1}^k \quad V_l^k$, $\quad v^k \quad V_{l-1}^k$.

$$\frac{1}{|e|}{}_{e}\ {}^{k}_{l}(v^{k})\,\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & e \quad {}_{k}\quad ,\\ \frac{1}{|e|}{}_{e}v^{k}\,\mathrm{d}s, & e \quad {}_{k}\backslash\quad ,\\ \frac{1}{|e|}{}_{e}v^{k}\,\mathrm{d}s, & e \quad E,E \quad \mathscr{T}^{k}_{l-1},\\ \frac{1}{2|e|}{}_{e}(v^{k}|_{E_1}+v^{k}|E_2)\,\mathrm{d}s, & e \quad E_1 \quad E_2,\ E_1,\ E_2 \quad \mathscr{T}^{k}_{l-1},\end{cases}\tag{5}$$

其中 $e \quad E, E \quad \mathscr{T}^{k}_{l}$.

基于算子 ${}^{k}_{l}$, 我们定义转移算子 ${}_{l}: V_{l-1} \quad V_l$ 为 ${}_{l}v=({}^{1}_{l}v^{1},\ {}^{2}_{l}v^{2},\ ,\ {}^{N}_{l}v^{N}),\quad v=(v^{1},v^{2},\ ,v^{N})$ V_{l-1}. 定义算子 ${}_{l}\ {}_{m(j)}: V_l \quad V_l$,

$$_{e}\ {}_{l}\ {}_{m(j)}v\,\mathrm{d}s=\begin{cases}{}_{e}Q_{l,\ m(j)}(v|_{m(i)}-v|_{m(j)})\,\mathrm{d}s, & e \quad \mathscr{T}(\ {}_{m(j)}),\\ 0, & 其他,\end{cases}\tag{6}$$

其中 $e \quad E, E \quad T_l$. 对任给的 $v \quad V_l$, 令 $v^{*}=v+\sum_{m=1}^{M}\ {}_{l}\ {}_{m(j)}(v)$, 则 $v^{*} \quad V_l$.

有了上述准备之后, 我们可定义网格转移算子 $I_l: V_{l-1} \quad V_l$. 对 $v \quad V_{l-1}$, 令

$$I_l v= {}_{l}v+\sum_{m=1}^{M}\ {}_{l,\ m(j)}(\ {}_{l}v) \quad V_l.\tag{7}$$

我们现在给出 l 层上的多重网格算法. 设 $MG(l, z_0, G)$ 是方程 $a_l(z, v)=G(v), \quad v \quad V_l$ 的多重网格迭代解, 此处初值为 z_0.

多重网格算法[6]:

(1) 当 $l=1$ 时, $MG(1, z_0, G)$ 由直接法解得.

(2) 当 $l>1$ 时, $MG(l, z_0, G)$ 递推定义如下:

光滑: 置

$$z_i=z_{i-1}+\ {}_{l}^{-1}(G-A_l z_{i-1}),\quad 1 \quad i \quad n,\tag{8}$$

其中 ${}_{l}$ 是算子 $\hat{A}_l$ 的最大特征值.

校正: 对 $v \quad V_{l-1}$, 定义 $G \quad V_{l-1}$ 为 $G(v)\hat{=}G(I_l v)-a_l(z_n, I_l v)$, 置

$$q_0=0,\quad q_i=MG(l-1, q_{i-1}, G),\quad 1 \quad i \quad p,\quad p \quad 2\tag{9}$$

$MG(l, z_0, G)=z_n+I_l q_p$.

由上述算法的校正步可知 $q_p \quad V_{l-1}$ 是方程 $a_{l-1}(q_{l-1}, v)=G(v), \quad v \quad V_{l-1}$ 的逼近解.

注 **1** 此处定义的光滑子为 Richardson 迭代, 对于其他的迭代法如 Jacobi, Gauss-Seidel 等, 本文的结论仍然成立[1].

令 $\{\ {}_{i}\}_{i=1}^{N_l}$ 和 $\{\ {}_{i}\}_{i=1}^{N_l}$ 分别是算子 $\hat{A}_l$ 的特征值和特征函数, 满足 $\hat{A}_l\ {}_{i}=\ {}_{i}\ {}_{i},\ (\ {}_{i},\ {}_{j})=\ {}_{ij}$. 对 $v=\sum_{i=1}^{N_l}c_i\ {}_{i} \quad V_l$, 我们在 V_l 上定义离散范数 $|||v|||_{s,l}=(\sum_{i}c_i^{2}\ {}_{i}^{s})^{\frac{1}{2}}$. 易验证 $|||v|||_{0,l}=\ v\ _0$, $|||v|||_{1,l}^{2}=a_l^{s}(v, v)$.

为了得到我们算法的收敛性, 我们先给出下列引理:

引理 **1**[7] 令 $e_n=z-z_n,\quad e_0=z-z_0$, 则

(1) $|||e_n|||_{1,l} \quad C(1+Ch_1)^{n}\ e_0\ _{h}$

(2) $|||e_n|||_{2,l} \quad Ch_l^{-1}n^{-\frac{1}{2}}(1+Ch_1)^{n}\ e_0\ _{l}$.

引理 **2**[2]

$$|b_l(v, w)| \quad C\ v\ _0\ w\ _h \quad v, w \quad V_l.$$

现在, 我们将空间 $H_0^1(\ )\quad H^2(\ )$ 分解成 N 个子区域 $H_0^1(\ )\quad H^2(\ )=\sum_{k=1}^{N}W^k(\ {}_{k})$, 其中 $W^k(\ {}_{k})=\{v|_{k}|v \quad H_0^1(\ )\quad H^2(\ )\}$. 接着, 我们定义一个插值算子 ${}^{k}_{l}: W^k(\ {}_{k}) \quad V_l^k(\ {}_{k})$ 为 ${}_{e}\ {}^{k}_{l}v^{k}\,\mathrm{d}s={}_{e}v^{k}\,\mathrm{d}s$,

$v^k \quad W^k(\ _k),\ e \quad E,\ E \quad \mathscr{T}^k_l$. 基于算子 ^k_l, 我们定义一个转移算子 $_l: H^1_0(\ ) \quad H^2(\ ) \quad V_l$ 为 $_l v = (\ ^1_l v^1,\ ^2_l v^2,\ \ ,\ ^N_l v^N),\quad v = (v^1, v^2,\ \ , v^N) \quad H^1_0(\ ) \quad H^2(\ )$. 对 $\quad H^1_0(\ ) \quad H^2(\ )$, 我们在空间 V_l 中给出一个逼近函数为:

$$J_l \quad = \quad _l \ + \sum_{m=1}^{M} \ _{l,\ m(j)}(\ _l\ ). \tag{10}$$

我们再定义一个投影算子 $P_{l-1}: V_l \quad V_{l-1}$,

$$a_{l-1}(P_{l-1}v, w) = a_l(v, I_l w),\qquad v \quad V_l, w \quad V_{l-1}. \tag{11}$$

引理 3　对算子 P_{l-1}, 有

$$v_l - I_l P_{l-1} v_l \quad _l \quad Ch_l \quad A_l v_l \quad _0,\qquad v_l \quad V_l.$$

证明　考虑辅助问题

$$\begin{cases} \mathscr{L} \quad = g, & \text{in}\ \ , \\ \quad = 0, & \text{on}\ \ , \end{cases} \tag{12}$$

其中 $g =\hat{}\ A_l v_l$. 显然 v_l 是问题(12)在 mortar型有限元空间 V_l 中的离散解. 由定理 1和正则性(3), 我们有

$$- v_l \quad _l = Ch_l \qquad _2 \quad Ch_l \quad A_l v_l \quad _0. \tag{13}$$

由三角不等式可得

$$v_l - I_l P_{l-1} v_l \quad _l \qquad v_l - I_l v_{l-1} \quad _l + \quad I_l(v_{l-1} - P_{l-1} v_l) \quad _l =\hat{}\ F_1 + F_2, \tag{14}$$

其中 $v_{l-1} \quad V_{l-1}$ 是下列问题的解

$$a_{l-1}(v_{l-1},\ \ ) = (g,\ \ ),\qquad \quad V_{l-1}. \tag{15}$$

利用[8]中引理 3 1的证明方法可得

$$F_1 \leqslant \ Ch_l \| A_l v_l \|_0. \tag{16}$$

对 F_2, 我们有

$$F_2 \leqslant C \| v_{l-1} - P_{l-1} v_l \|_{l-1} \leqslant C \sup_{\varphi \in V_{l-1}} \frac{| a^s_{l-1}(v_{l-1} - P_{l-1} v_l, \varphi) |}{\| \varphi \|_{l-1}} \leqslant$$

$$C\left(\sup_{\varphi \in V_{l-1}} \frac{| a_{l-1}(v_{l-1} - P_{l-1} v_l, \varphi) |}{\| \varphi \|_{l-1}} + \sup_{\varphi \in V_{l-1}} \frac{| b_{l-1}(v_{l-1} - P_{l-1} v_l, \varphi) |}{\| \varphi \|_{l-1}} \right) =\hat{}\ K_1 + K_2. \tag{17}$$

由(15)和 P_{l-1} 的定义以及[4]中的定理 311, 有

$$K_1 = C \sup_{\varphi \in V_{l-1}} \frac{| (g, \varphi - I_l \varphi) |}{\| \varphi \|_{l-1}} \leqslant Ch_l \| g \|_0 = Ch_l \| A_l v_l \|_0. \tag{18}$$

对 K_2, 由引理 2可得

$$K_2 \leqslant C \| v_{l-1} - P_{l-1} v_l \|_0. \tag{19}$$

结合(17)~(19), 我们有

$$F_2 \leqslant \| v_{l-1} - P_{l-1} v_l \|_{l-1} \leqslant Ch_l \| A_l v_l \|_0 + C \| v_{l-1} - P_{l-1} v_l \|_0. \tag{20}$$

现在我们来估计 $\| v_{l-1} - P_{l-1} v_l \|_0$. 考虑辅助问题: 求 $\Psi \in H^1_0(\Omega)$ 使得

$$\begin{cases} \mathscr{L}^* \Psi = v_{l-1} - P_{l-1} v_l, & \text{in}\ \Omega, \\ \Psi = 0, & \text{on}\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{21}$$

由格林公式有

$$\| v_{l-1} - P_{l-1} v_l \|^2_0 = (\mathscr{L}^* \Psi, v_{l-1} - P_{l-1} v_l) =$$

$$a_{l-1}(v_{l-1} - P_{l-1} v_l, \Psi) - \sum_{E \in \mathscr{T}_l} \int_{\partial E} (a \nabla \Psi + b \Psi) \cdot n (v_{l-1} - P_{l-1} v_l)\, \mathrm{d}s =$$

$$a_{l-1}(v_{l-1} - P_{l-1} v_l, \Psi - J_{l-1} \Psi) + a_{l-1}(v_{l-1} - P_{l-1} v_l, J_{l-1} \Psi) -$$

$$\sum_{E \in \mathscr{T}_l} \int_{\partial E} (a \nabla \Psi + b \Psi) \cdot n (v_{l-1} - P_{l-1} v_l)\, \mathrm{d}s =\hat{}\ G_1 + G_2 + G_3. \tag{22}$$

下面我们来依次估计 G_i. 对 G_1, 由[4]中的引理 414和(3)得

$$| G_1 | \leqslant C \| v_{l-1} - P_{l-1} v_l \|_{l-1} \| \Psi - J_{l-1} \Psi \|_{l-1} \leqslant Ch_l \| \Psi \|_2 \| v_{l-1} - P_{l-1} v_l \|_{l-1} \leqslant$$

$$Ch_l \| v_{l-1} - P_{l-1} v_l \|_0 \| v_{l-1} - P_{l-1} v_l \|_{l-1}. \tag{23}$$

对 G_2, 由 P_{l-1} 的定义和 [4] 中的引理 414 ~ 415 以及 (3) 有

$$| G_2 | = a_{l-1}(v_{l-1} - P_{l-1}v_l, J_{l-1}w) = (g, J_{l-1}w - I_l J_{l-1}w) [$$
$$Ch_l^2 + g +_0 + w +_2 [\quad Ch_l^2 + A_l v_l +_0 + v_{l-1} - P_{l-1}v_l +_0. \tag{24}$$

最后对 G_3, 根据 [3] 中的引理 412 和 (3) 可得

$$| G_3 | [\quad Ch_l + w +_2 + v_{l-1} - P_{l-1}v_l +_{l-1} [\quad Ch_l + v_{l-1} - P_{l-1}v_l +_0 + v_{l-1} - P_{l-1}v_l +_{l-1}. \tag{25}$$

结合 (22) ~ (25), 我们有

$$+ v_{l-1} - P_{l-1}v_l +_0 [\quad Ch_l + v_{l-1} - P_{l-1}v_l +_{l-1} + Ch_l^2 + A_l v_l +_0. \tag{26}$$

由 (20)、(26) 可得

$$(1 - Ch_l) + v_{l-1} - P_{l-1}v_l +_{l-1} [\quad Ch_l + A_l v_l +_0. \tag{27}$$

所以, 当 h_l 充分小时, 根据 (20) 和 (27), 我们有

$$F_2 [\quad C + v_{l-1} - P_{l-1}v_l +_{l-1} [\quad Ch_l + A_l v_l +_0. \tag{28}$$

将 (16)、(28) 代入 (14) 式即得结论.

引理 4 对算子 P_{l-1}, 有

$$+ P_{l-1}v +_{l-1} [\quad C + v +_l, \quad P v I \quad V_l.$$

证明 类似于引理 3 中 F_2 的估计, 我们可证

$$+ v - P_{l-1}v +_l [\quad Ch_l + A_l v +_0 = Ch_l + (\hat{A}_l + B_l)v +_0, \tag{29}$$

且

$$+ (\hat{A}_l + B_l)v +_0 [\quad (|||v|||_{2,l} + + v +_l) [\quad (1 + Ch_l^{-1}) + v +_l.$$

从而由三角不等式即证得结论.

下面由引理 1, 3, 4 及 [4, 定理 311], 我们给出本文的主要结果.

定理 2[6] 令 $p \setminus 2$ 若光滑次数充分多且最初网格尺寸 h_1 充分小, 则存在一不依赖于层数 l 的常数 D I (0, 1), 使得当

$$+ q_{l-1} - q_p +_{l-1} [\quad CD^p + q_{l-1} +_{l-1}$$

时有

$$+ z - MG(l, z_0, G) +_l [\quad D + z - z_0 +_l.$$

2 数值例子

在这一节, 给出一些数值结果来验证前面的理论. 我们对下列方程做数值算例:

$$\begin{cases} -\dfrac{5^2 u}{5x^2} - \dfrac{5u^2}{5y^2} + \dfrac{5u}{5x} + \dfrac{5u}{5y} + u = f, & \text{in } 8 = (0, 1)^2, \\ u = 0, & \text{on } 58. \end{cases} \tag{30}$$

我们把区域 8 分成两个子区域: 令 $8_1 = (0, 1) @ \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 为 mortar 区域, $8_2 = (0, 1) @ \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 为非 mortar 区域. 最粗网格的尺寸分别定义为 $h_{1,1}$ 和 $h_{1,2}$. 我们用 Gauss-Seidel 法做光滑迭代, 并取 (30) 的真解为: $u(x, y) = x(1 - x)y(1 - y)$.

我们考虑 W 循环多重网格法的收敛率. 用 L 表示网格层数, $iter_n$ 为当残量的相对误差不超过 10^{-6} 时所进行的多重网格迭代的次数, 其中 n 为每一层光滑的次数, 且迭代初始值取为零.

表 1 $h_{1,1} = \dfrac{1}{4}$, $h_{1,2} = \dfrac{1}{2}$ 时的迭代次数

Table 1 Iterative numbers with $h_{1,1} = \dfrac{1}{4}$ and $h_{1,2} = \dfrac{1}{2}$

L	2	3	4	5	6
$iter_1$	14	16	18	17	18
$iter_5$	5	6	6	5	5
$iter_{10}$	4	5	4	5	4
$iter_{15}$	4	4	4	4	4

表 2 $h_{1,1} = \dfrac{1}{6}$, $h_{1,2} = \dfrac{1}{2}$ 时的迭代次数

Table 2 Iterative numbers with $h_{1,1} = \dfrac{1}{6}$ and $h_{1,2} = \dfrac{1}{2}$

L	2	3	4	5	6
$iter_1$	16	17	18	18	18
$iter_5$	7	8	8	7	7
$iter_{10}$	6	6	6	6	5
$iter_{15}$	5	5	5	5	5

由表1、2,我们发现当光滑次数充分大时,其收敛率完全跟层数 L 无关.

[参考文献]

[1] Chen Z X, Kwak D Y, Yon Y J. Multigrid algorithms for nonconforming and mixed methods for nonsymmetric and indefinite problems[J]. SIAM J Sci Comput, 1998, 19(2): 502-515.

[2] 石钟慈,许学军. 非对称不定问题的非协调多重网格方法[J]. 计算数学, 1999, 21(4): 507-512.

[3] Chen J, Xu X. The mortar element method for rotated Q_1 element[J]. J Comput Math, 2002, 20(3): 313-324.

[4] 黄佩奇,陈金如. Mortar型旋转 Q_1 元的多重网格方法[J]. 计算数学, 2008, 30(1): 1-16.

[5] Schatz A H. An observation concerning Ritz-Galerkin methods with indefinite bilinear forms[J]. Math Comp, 1974, 28(128): 956-962.

[6] Shi Z, Xu X, Chen J. Multigrid for the mortar-type nonconforming element method for nonsymmetric and indefinite problems[C]//Thirteenth International Conference on Domain Decomposition Mthods. Barcelona: CIMNE, 2002: 277-284.

[7] Bank R E. A comparison of two multilevel iterative methods for nonsymmetric and indefinite elliptic finite element equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1981, 18(4): 724-743.

[8] 黄佩奇,王锋,陈金如. Mortar型旋转 Q_1 元的瀑布型多重网格方法[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2007, 30(4): 20-27.

[责任编辑: 丁　蓉]