一类拟线性脉冲时滞抛物方程组的强迫振动性

罗李平，杨　柳，王艳群

(衡阳师范学院数学与计算科学系，湖南 衡阳 421008)

[摘要]　考虑一类拟线性脉冲时滞抛物型偏微分方程组的振动性和强振动性，直接利用振动的定义、Green公式和 Newmann边值条件将这类具强迫项的脉冲时滞抛物型方程组的振动问题转化为脉冲时滞微分不等式不存在最终正解的问题，并利用最终正解的定义和脉冲时滞微分不等式，获得了该类方程组所有解振动和强振动的若干充分条件. 所得结果充分反映了脉冲和时滞在振动中的影响作用.

[关键词]　拟线性，脉冲，时滞抛物型偏微分方程组，振动性，强振动性

[中图分类号] O175.26　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2009)04-0007-05

Forced Oscillation for Systems of a Class of Quasilinear Impulsive Delay Parabolic Equations

Luo Liping　Yang Liu　Wang Yanqun

(Department of Mathematics and Computational Science, Hengyang Normal University, Hengyang 421008, China)

Abstract: The oscillation and strong oscillation of the systems of a class of quasilinear impulsive delay parabolic partial differential equations is considered. By using the oscillatory definition, Green's formula and Newmann boundary condition directly, the oscillatory problem of solution to the systems of impulsive delay parabolic equations with the forcing term is reduced to the problem of which impulsive delay differential inequality hasn't eventually position solution, and thereby some sufficient conditions are obtained for the oscillation and strong oscillation of all solutions of such systems via the definition of eventually position solution and impulsive delay differential inequality. The obtained results fully reflect the influence action of impulsive and delay in oscillation.

Key words: quasilinear, impulse, systems of delay parabolic equations, oscillation, strong oscillation

众所周知，在自然科学和社会科学的许多学科一些问题中出现了大量的含时滞的偏微分方程(组). 而脉冲现象作为一种瞬时突变现象，在现代科技领域的实际问题中普遍存在. 因而，近年来对脉冲偏泛函微分方程(组)的研究越来越受到人们的关注，其振动理论作为其中的一个重要研究领域，也得到了一定的发展，已陆续有许多好的研究工作发表[1-10]. 但关于脉冲偏微分方程组解的强振动的研究还很少见，目前仅见文献[11]. 在本文中，我们讨论一类特殊的拟线性脉冲时滞抛物型偏微分方程组，加上一定的非线性脉冲条件，在 Newmann边值条件下的振动性及强振动性，直接从振动的定义出发，借助 Green公式和 Newmann边值条件把这类方程组解的振动判别问题转化为脉冲时滞微分不等式最终正(负)解的存在性问题，建立了判别其所有解振动及强振动的若干充分性判据，所得结果充分反映了脉冲和时滞在振动中的影响作用.

考虑如下的拟线性脉冲时滞抛物型偏微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}(t,u_j(t,x))\Delta u_j(t,x) + \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij}(t,u_j(t-\sigma,x))\Delta u_j(t-\sigma,x) - \\ \qquad p_i(t,x)u_i(t-\tau,x) - c_i(t,x,(u_j(t,x))_{j=1}^{m},(u_j(t-\tau,x))_{j=1}^{m}) + f_i(t,x), \quad t\neq t_k, \\ u_i(t_k^+,x) - u_i(t_k^-,x) = b_i(t_k,x,u_i(t_k,x)), \\ i\in I_m,\ k\in I_\infty,\ (t,x)\in \mathbf{R}_+\times G, \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2009-03-12
基金项目: 湖南省教育厅科研资助项目(07C164)、湖南省自然科学基金(06JJ5001)资助项目.
通讯联系人: 罗李平，教授，研究方向: 偏泛函微分方程振动理论. E-mail: luo8486659@163.com

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中 $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}, I = \{1, 2, \ldots\}, \mathbf{R}_+ = [0, \ )$, $\mathbf{R}^n$ 是具有逐片光滑边界 的有界区域, 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 维 Laplace算子, , , 均为正常数, $0 < t_1 < t_2 < \ < t_k <$ 是固定点列且 $\lim_k t_k =$.

同时考虑如下的 Newmann边值条件:

$$\frac{u_i(t, x)}{N} = 0, \quad x \quad , t \quad t_k, \quad i \quad I_m, k \quad I, \tag{2}$$

其中 N 表示 的单位外法向量.

对于上述边值问题, 在本文中, 我们总假定下列条件成立:

$(H_1)\ p_i \quad PC(G; \mathbf{R}_+), p_i(t) = \min_x \{p_i(t, x)\}, i \quad I_m$, 这里 PC 表示具有如下性质的分片连续函数类: 仅在 $t = t_k, k = 1, 2, $ 为第一类间断点, 但在 $t = t_k (k = 1, 2,)$ 左连续;

$(H_2)\ a_{ij}, \ b_{ij} \quad PC(\mathbf{R}_+ \quad \mathbf{R}; (0, \ ))$ 且 $u_i \frac{a_{ii}(t, u_i)}{u_i} \quad 0, u_i \frac{b_{ii}(t, u_i)}{u_i} \quad 0, i \quad j \quad I_m$;

$$\frac{a_{ij}(t, u_j)}{u_j} = 0, \frac{b_{ij}(t, u_j)}{u_j} = 0, \quad i \quad j, i, j \quad I_m;$$

$(H_3)\ c_i \quad PC(G \quad \mathbf{R}^{2n}; \mathbf{R})$, 并且

$$c_i(x, t, {}_1, \ , {}_i, \ , {}_m, {}_1, \ , {}_i, \ , {}_m) \begin{cases} 0, & 当 \ {}_i, \ {}_i \quad (0, \ ) 时, \\ 0, & 当 \ {}_i, \ {}_i \quad (- \ , 0) 时, \end{cases}$$

$c_i(x, t, {}_1, \ , - {}_i, \ , {}_m, {}_1, \ , - {}_i, \ , {}_m) = - c_i(x, t, {}_1, \ , {}_i, \ , {}_m, {}_1, \ , {}_i, \ , {}_m), i \quad I_m$;

$(H_4)\ b_i: G \quad \mathbf{R} \quad \mathbf{R}$, 对任意函数 $u_i(t, x) \quad PC(G; \mathbf{R}_+)$ 有

$$b_i(t_k, x, - u_i(t_k, x)) = - b_i(t_k, x, u_i(t_k, x)),$$

且

$$b_i(t_k, x, u_i(t_k, x))\mathrm{d}x \quad {}_{ik} \quad u_i(t_k, x)\mathrm{d}x,$$

其中 ${}_{ik} > 0$ 为常数, $i \quad I_m, k \quad I$;

$(H_5)\ f_i \quad C(G; \mathbf{R}_+), i \quad I_m$.

1　有关定义及其引理

定义 1　称向量函数 $\boldsymbol{u}(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \ , u_m(t, x))^{\mathrm{T}}$ 为边值问题(1), (2)的解, 若对 i I_m, $u_i(t, x)$ 满足:

对固定的 x, $u_i(t, x)$ 是以 t_k 为第一类间断点的分片连续函数; $u_i(t_k, x) = u_i(t_k^-, x), k \quad I$, 且满足(1)式的第二式;

对 $t \quad t_k, x \quad$, $\frac{u_i(t, x)}{t}$ 存在, 且满足(1)式的第一式; 对固定的 $t, t \quad t_k$, $\frac{{}^2 u_i(t, x)}{x_r^2}$ 存在, r I_n;

对 $t \quad t_k, x \quad$, $\frac{u_i(t, x)}{N}$ 存在且满足(2).

定义 2　称数值函数 $(t, x): G \quad \mathbf{R}$ 为非振动的, 若它最终为正或最终为负; 反之, 称 (t, x) 为振动的. 称向量函数 $\boldsymbol{u}(t, x): G \quad \mathbf{R}^m$ 为非振动的, 若它的每一分量都是非振动的; 称向量函数 $\boldsymbol{u}(t, x): G \quad \mathbf{R}^m$ 为振动的, 若它至少有一分量作为数值函数是振动的. 称向量函数 $\boldsymbol{u}(t, x): G \quad \mathbf{R}^m$ 为强振动的, 若它的每一个分量作为数值函数都是振动的.

引理 1[12]　假设

$$m(t) \quad h(t)m(t) + w(t), \quad t \quad t_k, \quad t \quad t_0,$$
$$m(t_k^+) \quad d_k m(t_k) + b_k, \quad k = 1, 2, \ ,$$

其中 $0 \quad t_0 < t_1 < t_2 < \ < t_k <$ 且 $\lim_k t_k =$; $m(t) \quad PC^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}), h(t), w(t) \quad PC(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}); d_k$ 和 b_k 都为常数且 $d_k \quad 0, k = 1, 2, \ $, 则

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$m(t)\quad m(t_0)\ {}_{t_0<t_k<t}\ d_k\exp\left(\ {}_{t_0}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s\right)+\ {}_{t_0 s<t_k<t}^{t}\ d_k\exp\left(\ {}_{s}^{t} h(\ )\mathrm{d}\ \right)w(s)\,\mathrm{d}s+$$

$$ {}_{t_0<t_k<t}\ \ {}_{t_k<t_j<t}\ d_j\exp\left(\ {}_{t_0}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s\right)b_k,\qquad t\quad t_0.$$

为叙述方便, 引入如下记号:

$$U_i(t)=\quad u_i(t,x)\,\mathrm{d}x,\qquad F_i(t)=\quad f_i(t,x)\,\mathrm{d}x,\qquad t\quad 0,\ i\quad I_m.$$

2 主要结果及其证明

定理 **1** 若存在某一 $i_0\quad I_m$, 使得脉冲时滞微分不等式

$$\begin{cases} U_{i_0}(t)+p_{i_0}(t)U_{i_0}(t-\ \ )\quad F_{i_0}(t), & t\quad t_k,\\ U_{i_0}(t_k^+)-U_{i_0}(t_k^-)\quad {}_{i_0 k}U_{i_0}(t_k), & t\quad I\end{cases}\tag{3}$$

和

$$\begin{cases} U_{i_0}(t)+p_{i_0}(t)U_{i_0}(t-\ \ )\quad -F_{i_0}(t), & t\quad t_k,\\ U_{i_0}(t_k^+)-U_{i_0}(t_k^-)\quad {}_{i_0 k}U_{i_0}(t_k), & t\quad I\end{cases}\tag{4}$$

均无最终正解, 则边值问题(1), (2)的每个非零解在 G 内振动.

证明 (用反证法) 假设边值问题(1), (2)有一个非振动解 $\boldsymbol{u}(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),\quad,u_m(t,x))^{\mathrm{T}}$, 则 $u_{i_0}(t,x)$ 在 G 内非振动. 不失一般性, 设 $u_{i_0}(t,x)$ 最终为正, 于是存在 $T>0$, 使得 $(t,x)\quad [T,\ \ )\quad$, 有 $u_{i_0}(t,x)>0$, $u_{i_0}(t-\ ,x)>0$, $u_{i_0}(t-\ ,x)>0$, $u_{i_0}(t-\ ,x)>0$

考虑下面的方程:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i_0}(t,x)}{t}=\ \sum_{j=1}^{m}\ a_{i_0 j}(t,u_j(t,x))\quad u_j(t,x)+\ \sum_{j=1}^{m}\ b_{i_0 j}(t,u_j(t-\ ,x))\quad u_j(t-\ ,x)-\\ \qquad p_{i_0}(t,x)u_{i_0}(t-\ ,x)-c_{i_0}(t,x,(u_j(t,x))_{j=1}^{m},(u_j(t-\ ,x))_{j=1}^{m})+f_{i_0}(t,x),\quad t\quad t_k,\\ u_{i_0}(t_k^+,x)-u_{i_0}(t_k^-,x)=b_{i_0}(t_k,x,u_{i_0}(t_k,x)),\\ k\quad I,\ (t,x)\quad \mathbf{R}_+\qquad G,\end{cases}\tag{5}$$

( ) 当 $t\quad t_k$, $k\quad I$ 时, 对(5)式的第一式两边关于 x 在 上积分, 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\quad u_{i_0}(t,x)\,\mathrm{d}x\right)&=\ {}_{j=1}^{m}\quad a_{i_0 j}(t,u_j(t,x))\quad u_j(x,t)\,\mathrm{d}x+\\ &{}_{j=1}^{m}\quad b_{i_0 j}(t,u_j(t-\ ,x))\quad u_j(t-\ ,x)\,\mathrm{d}x-\quad p_{i_0}(t,x)u_{i_0}(t-\ ,x)\,\mathrm{d}x-\\ &c_{i_0}(t,x,(u_j(t,x))_{j=1}^{m},(u_j(t-\ ,x))_{j=1}^{m})\,\mathrm{d}x+\quad f_{i_0}(t,x)\,\mathrm{d}x,\qquad t\quad T.\end{aligned}\tag{6}$$

由 Green公式, 边值条件(2)及条件(H_2)有

$$a_{i_0 i_0}(t,u_{i_0}(t,x))\quad u_{i_0}(t,x)\,\mathrm{d}x=$$

$$a_{i_0 i_0}(t,u_{i_0}(t,x))\frac{u_{i_0}(t,x)}{N}\mathrm{d}S-\quad\frac{a_{i_0 i_0}(t,u_{i_0}(t,x))}{u_{i_0}}\,|\quad u_{i_0}(t,x)\,|^2\mathrm{d}x=$$

$$-\quad\frac{a_{i_0 i_0}(t,u_{i_0}(t,x))}{u_{i_0}}\,|\quad u_{i_0}(t,x)\,|^2\mathrm{d}x\quad 0,\quad t\quad T,$$

$$a_{i_0 j}(t,u_j(t,x))\quad u_j(t,x)\,\mathrm{d}x=\quad a_{i_0 j}(t,u_j(t,x))\frac{u_j(t,x)}{N}\mathrm{d}S-$$

$$\frac{a_{i_0 j}(t,u_j(t,x))}{u_j}\,|\quad u_j(t,x)\,|^2\mathrm{d}x=0,\quad t\quad T,\ j\quad i_0,\ j\quad I_m,$$

其中 dS是 上的面积元素. 即

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$a_{i_0 j}(t, u_j(x, t))\ u_j(x, t)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \quad 0, & 当\ j = i_0\ 时, \\ = 0, & 当\ j \quad i_0\ 时, \end{cases} \quad t \quad T,\ j \quad I_m. \tag{7}$$

同理

$$b_{i_0 j}(t, u_j(x, t - \quad))\ u_j(x, t - \quad)\,\mathrm{d}x \begin{cases} \quad 0, & 当\ j = i_0\ 时, \\ = 0, & 当\ j \quad i_0\ 时, \end{cases} \quad t \quad T,\ j \quad I_m. \tag{8}$$

由条件(H_3)易知

$$c_{i_0}(t, x, (u_j(t, x))_{j=1}^{m}, (u_j(t - \quad, x))_{j=1}^{m}) \quad 0, \quad t \quad T. \tag{9}$$

因此由(6)~(9)式及条件(H_1)可得

$$U_{i_0}(t) + p_{i_0}(t) U_{i_0}(t - \quad) \quad F_{i_0}(t), \quad t \quad T. \tag{10}$$

(　)当 $t = t_k, k \quad I$ 时, 由(5)式的第二式, 结合条件(H_4)及定义 1中的条件　可得

$$U_{i_0}(t_k^+) - U_{i_0}(t_k^-) = \quad u_{i_0}(t_k^+, x)\,\mathrm{d}x - \quad u_{i_0}(t_k^-, x)\,\mathrm{d}x =$$

$$b_{i_0}(t_k, x, u_{i_0}(t_k, x))\,\mathrm{d}x \qquad {}_{i_0 k} \quad u_{i_0}(t_k, x)\,\mathrm{d}x = \quad {}_{i_0 k} U_{i_0}(t_k). \tag{11}$$

于是由(10), (11)可知 $U_{i_0}(t)$ 是脉冲时滞微分不等式(3)的最终正解, 而这与已知不等式(3)无最终正解矛盾.

若 $u_{i_0}(t, x)$ 最终为负, $t \quad T$, 类似于上面的证明, 可证得 $-U_{i_0}(t)$ 是脉冲时滞微分不等式(4)的最终正解, 而这与已知不等式(4)无最终正解矛盾. 证毕.

利用引理 1和定理 1, 可推得如下关于边值问题(1), (2)的非零解振动的进一步结果.

定理 2　若存在某一 $i_0 \quad I_m$, 使得对每个充分大的　及任意的常数 $c_1 > 0$ 和 $c_2 < 0$ 有

$$\liminf_{t} \Big[c_1 \prod_{< t_k < t} (1 + \quad {}_{i_0 k}) + \int^{t} \prod_{s < t_k < t} (1 + \quad {}_{i_0 k}) F_{i_0}(s)\,\mathrm{d}s \Big] < 0, \tag{12}$$

$$\limsup_{t} \Big[c_2 \prod_{< t_k < t} (1 + \quad {}_{i_0 k}) + \int^{t} \prod_{s < t_k < t} (1 + \quad {}_{i_0 k}) F_{i_0}(s)\,\mathrm{d}s \Big] > 0, \tag{13}$$

则边值问题(1), (2)的每个非零解在区域 G 内是振动的.

证明　由定理 1知, 只需要证明在定理 2的条件下, 脉冲时滞微分不等式(3)和(4)均无最终正解即可. 假设 $U_{i_0}(t)$ 是脉冲时滞微分不等式(3)的一个最终正解, 则易知存在 $T > 0$, 使得当 $t \quad T$ 时有

$$\begin{cases} U_{i_0}(t) \quad F_{i_0}(t), & t \quad t_k, \\ U_{i_0}(t_k^+) \quad (1 + \quad {}_{i_0 k}) U_{i_0}(t_k), & k \quad I. \end{cases}$$

于是由引理 1可得

$$U_{i_0}(t) \quad U_{i_0}(T) \prod_{T < t_k < t} (1 + \quad {}_{i_0 k}) + \int_T^{t} \prod_{s < t_k < t} (1 + \quad {}_{i_0 k}) F_{i_0}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \quad T.$$

在上式中, 令 t　　, 并注意到条件(12)可得 $\lim_{t} U_{i_0}(t) < 0$, 此与 $U_{i_0}(t) > 0$ 矛盾. 于是脉冲时滞不等式(3)无最终正解.

利用定理 2中的条件(13), 类似可证脉冲时滞不等式(4)也无最终正解. 证毕.

利用上面的结论, 很容易得到下面的关于边值问题(1), (2)强振动的结论.

定理 3　若对每一个 $i \quad I_m$, 使得脉冲时滞微分不等式

$$\begin{cases} U_i(t) + p_i(t) U_i(t - \quad) \quad F_i(t), & t \quad t_k, \\ U_i(t_k^+) - U_i(t_k^-) \quad {}_{ik} U_i(t_k), & t \quad I \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} U_i(t) + p_i(t) U_i(t - \quad) \quad - F_i(t), & t \quad t_k, \\ U_i(t_k^+) - U_i(t_k^-) \quad {}_{ik} U_i(t_k), & t \quad I \end{cases}$$

均无最终正解, 则边值问题(1), (2)的每个非零解在 G 内强振动.

定理 4　若对每一个 $i\,I \quad I_m$, 使得对每个充分大的 D及任意的常数 $c_1 > 0$ 和 $c_2 < 0$ 有

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\liminf_{t\to\infty}\left[c_1\prod_{0<t_k<t}(1+A_{ik})+\int_0^t\prod_{s<t_k<t}(1+A_{ik})F_i(s)\,\mathrm{d}s\right]<0,$$

$$\limsup_{t\to\infty}\left[c_2\prod_{0<t_k<t}(1+A_{ik})+\int_0^t\prod_{s<t_k<t}(1+A_{ik})F_i(s)\,\mathrm{d}s\right]>0,$$

则边值问题 (1), (2) 的每个非零解在区域 G 内强振动.

[参考文献]

[1] 罗李平, 欧阳自根. 脉冲中立型时滞抛物偏微分方程组的振动准则 [J]. 应用数学学报, 2007, 30(5): 822-830.

[2] 罗李平, 欧阳自根. 一类非线性脉冲中立型时滞抛物方程组的振动准则 [J]. 工程数学学报, 2007, 24(4): 639-644.

[3] 罗李平, 欧阳自根. 非线性脉冲中立型时滞抛物方程组解的振动性 [J]. 生物数学学报, 2007, 22(3): 496-502.

[4] Luo Liping, Ouyang Zigen. Oscillation theorem to systems of impulsive neutral delay parabolic partial differential equations [J]. Ann of Diff Eqs, 2007, 23(3): 297-303.

[5] Luo Liping. Oscillation theorem of systems of quasilinear impulsive delay hyperbolic equations [J]. Northeast Math J, 2007, 23(3): 255-262.

[6] Luo Liping, Peng Baiyu, Yang Liu. Oscillation of systems of impulsive delay parabolic equations about boundary value problems [J]. Ann of Diff Eqs, 2007, 23(4): 470-476.

[7] 罗李平, 欧阳自根. 非线性脉冲时滞双曲型方程组的振动准则 [J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2006, 29(4): 27-31.

[8] 罗李平. 非线性脉冲时滞抛物型偏微分方程的强迫振动性 [J]. 应用数学, 2007, 20(2): 357-360.

[9] 罗李平, 欧阳自根. 非线性脉冲中立型时滞抛物偏微分方程的振动性 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2007, 45(1): 23-28.

[10] 罗李平, 谭琼华, 欧阳自根. 一类非线性脉冲时滞抛物型方程的强迫振动性 [J]. 武汉理工大学学报, 2006, 28(8): 138-142.

[11] Zhang Y T, Luo Q. On the forced oscillation of solutions for systems of impulsive neutral parabolic differential equations with several delays [J]. J of Math (PRC), 2006, 26(3): 272-276.

[12] Bainov D D, Lakshmikantham V, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[责任编辑: 丁 蓉]

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net