连续格的同余

石小平，贺　伟

(南京师范大学数学科学学院，江苏 南京 210046)

[摘要]　连续格的同余可以构造商格，利用商格的性质研究格是格论常用的方法之一. 本文首先给出了连续格同余的刻画定理，并进一步利用同余讨论了连续格的同态定理.

[关键词]　连续格，同余，同态定理

[中图分类号] O153.1　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2009)04-0021-03

Congruences on Continuous Lattices

Shi Xiaoping, He Wei

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract Congruences are important to study quotients of lattices. In this paper, a characterization of congruences on continuous lattices is given. Homomorphism theorems of continuous lattices are also discussed.

Key words congruence, continuous lattice, homomorphism theorem

众所周知，连续格在格论、拓扑、拓扑代数、范畴论等诸多数学理论中有广泛应用. 连续格有许多等价的定义[1]，其中之一就是利用如下的等式刻画. 设 L 是完备格，如果 L 中满足对所有 $j\in J$，$\{x_{j,i}: i\in I(j)\}$ 都是定向的任意元素 $\{x_{j,i}: j\in J, i\in I(j)\}$，等式

$$\wedge_{j\in J}\vee_{i\in I(j)} x_{j,i} = \vee_{f\in M}\wedge_{j\in J} x_{j,f(j)}$$

恒成立，则称 L 为连续格. 这里 $M=\{f: J\to\bigcup_{j\in J} I(j)\mid j\in J, f(j)\in I(j)\}$.

设 S 和 T 都是连续格，如果映射 $f: S\to T$ 保持任意下确界和定向上确界，则称 f 为连续格同态，简称同态. 设 B 为连续格 T 的子集，如果包含映射 $B\to T$ 为同态，则称 B 为 T 的子代数. 设 L 为连续格，$\rho\subseteq L\times L$ 为等价关系. 如果商 L/ρ 为连续格且映射 $\rho^{\natural}: L\to L/\rho, x\mapsto[x]_\rho$ 为同态，则称 ρ 为 L 上的同余.

连续格的同余可以构造商格，利用商格的性质研究格是格论常用的方法之一[2-6]. 本文首先给出了连续格同余的刻画定理，这样验证连续格 L 上的等价关系是否为 L 上的同余就变得容易了. 本文还利用同余讨论了连续格的同态基本定理.

1　同余刻画

引理 1　设 L 为连续格，ρ 为 L 的同余，则

(1) 对 $x_j\in L, j\in J$，有 $\wedge_{j\in J}[x_j]_\rho=[\wedge_{j\in J}x_j]_\rho$；

(2) 对 $y_i\in L$，$i\in I$，I 为有向集，有 $\vee_{i\in I}[y_i]_\rho=[\vee_{i\in I}y_i]_\rho$.

证明　由于 $\rho^{\natural}: L\to L/\rho, x\mapsto[x]_\rho$ 为同态，所以对任意 $x_j\in L$，$j\in J$，有 $\rho^{\natural}(\wedge_{j\in J}x_j)=\wedge_{j\in J}\rho^{\natural}(x_j)$，即 $[\wedge_{j\in J}x_j]_\rho=\wedge_{j\in J}[x_j]_\rho$. 类似的方法可证 (2) 成立.

命题 1　设 L 为连续格，ρ 为 L 上的等价关系，则以下两条等价：

(1) ρ 为 L 的同余；

收稿日期：2009-04-16

基金项目：国家自然科学基金(10626012)、中国博士后科学基金(200904501113)资助项目.

通讯联系人：石小平，博士后，讲师，研究方向：序代数. E-mail: xpshin@gmail.com

(2) 对任意 $(x_j, y_j)\in\rho$, $j\in J$, 有 $\wedge_{j\in J}(x_j, y_j)\in\rho$; 对任意 $(x_i, y_i)\in\rho$, $i\in I$, I为有向集, 有 $\vee_{i\in I}(x_i, y_i)\in\rho$.

证明　(1)⇒(2). 设ρ为L的同余, 如果$(x_j, y_j)\in\rho$, 则$[x_j]_\rho=[y_j]_\rho$, $\wedge_{j\in J}[x_j]_\rho=\wedge_{j\in J}[y_j]_\rho$. 由引理1可知$[\wedge_{j\in J}x_j]_\rho=[\wedge_{j\in J}y_j]_\rho$, 即$(\wedge_{j\in J}x_j, \wedge_{j\in J}y_j)=\wedge_{j\in J}(x_j, y_j)\in\rho$. 同理可得任意$(x_i, y_i)\in\rho$, $i\in I$, I为有向集, 有$\vee_{i\in I}(x_i, y_i)\in\rho$.

(2)⇒(1). 令$\rho_x=\{y\in L\mid (x, y)\in\rho\}$. 由假设可知$\rho_x$对非空子集的下确界是封闭的, 集合$\rho_x$的最小元记为$k(x)$, 显然$k(x)\in\rho_x$, $k(x)\leqslant x$, $k^2(x)=k(x)$, 进而有映射$k: L\to k(L)$, $x\mapsto k(x)$. 下证k为同态.

若$x\leqslant y$, 则$x=x\wedge y$. 由于$(k(x), x)\in\rho$, $(k(y), y)\in\rho$, 由假设可知$(k(x)\wedge k(y), x\wedge y)\in\rho$, 即$(k(x)\wedge k(y), x)\in\rho$, 从而$k(x)=k(x)\wedge k(y)$, 故$k(x)\leqslant k(y)$, 所以$k$是保序的.

由于$(k(x_j), x_j)\in\rho$, 所以$\wedge_{j\in J}(k(x_j), x_j)\in\rho$, $(\wedge_{j\in J}k(x_j), \wedge_{j\in J}x_j)\in\rho$, 故$k(\wedge_{j\in J}x_j)=k(\wedge_{j\in J}k(x_j))\leqslant\wedge_{j\in J}k(x_j)\leqslant k(x_j)$. 这说明$\{k(x_j): j\in J\}$在$k(L)$中有下界. 设$t=k(m)\in k(L)$是$\{k(x_j): j\in J\}$在$k(L)$中的任一下界, 则$\wedge_{j\in J}k(x_j)\geqslant t=k(m)$, 所以$k(\wedge_{j\in J}k(x_j))\geqslant k(t)=k^2(m)=k(m)=t$, $k(\wedge_{j\in J}x_j)=k(\wedge_{j\in J}k(x_j))\geqslant t$, 因此$k(\wedge_{j\in J}x_j)$是$\{k(x_j): j\in J\}$的下确界, 即$k(\wedge_{j\in J}x_j)=\wedge_{j\in J}k(x_j)$.

设I为定向集, 由于$(k(x_i), x_i)\in\rho$, 所以$(\vee_{i\in I}k(x_i), \vee_{i\in I}x_i)=\vee_{i\in I}(k(x_i), x_i)\in\rho$, 故$\vee_{i\in I}k(x_i)\geqslant k(\vee_{i\in I}x_i)$. 另一方面, $k(\vee_{i\in I}x_i)\geqslant k(x_i)$, $k(\vee_{i\in I}x_i)\geqslant\vee_{i\in I}k(x_i)$. 因此, $k(\vee_{i\in I}x_i)=\vee_{i\in I}k(x_i)$.

由上述证明可知, $k(L)$对L的任意下确界和定向上确界都是封闭的, 所以$k(L)$是连续格. 易证$\tilde{k}: L/\rho\to k(L)$, $[x]\mapsto k(x)$是同构, 其逆为$\tilde{k}^{-1}: k(L)\to L/\rho$, $k(x)\mapsto[k(x)]$. 所以L/ρ为连续格. 可以验证$\rho^\natural: L\to L/\rho$, $x\mapsto[x]_\rho$是同态, 因此ρ是L的同余.

推论1　设$f: L\to T$为连续格的同态, 则f的核$\ker f=\{(x, y)\mid f(x)=f(y)\}$是$L$的同余.

推论2　设ρ和σ为连续格L的两个同余, 则等价关系$\rho\cap\sigma$也是L的同余.

推论3　设L为连续格, 等价关系$\rho\subseteq L\times L$是同余当且仅当$\{(x, y)\mid (x, y)\in\rho\}$是$L\times L$的子代数.

2　同态定理

定理1　设S和T都是连续格, $f: S\to T$为同态, 则存在惟一的同态$g: S/\ker f\to T$, $[x]\mapsto f(x)$使图1可换.

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "(\ker f)^\natural"'] & & T \\
& S/\ker f \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

图1　同态交换图

Fig.1　Commutative graph of homomorphism

证明　(1) g是有定义的. 如果$[x]=[y]$, 则$(x, y)\in\ker f$, 所以$f(x)=f(y)$.

(2) g是同态且$f=g\circ(\ker f)^\natural$. 由于$f$为同态, $g([x])=f(x)$, 所以g为同态.

(3) g是惟一的. 若h是同态且$f=h\circ(\ker f)^\natural$, 则$h([x])=f(x)=h\circ(\ker f)^\natural(x)=g([x])$.

推论4　设S和T都是连续格, $f: S\to T$为同态, 那么$S/\ker f\cong\operatorname{Im}f$.

证明　由[1]的定理2.7可知$\operatorname{Im}f$为连续格, 所以$g: S/\ker f\to\operatorname{Im}f$, $[x]\mapsto f(x)$为满同态. 显然g为单同态. 只需证明$g^{-1}: \operatorname{Im}f\to S/\ker f$, $f(x)\mapsto[x]$为同态. 对$x_j\in\operatorname{Im}f$, $j\in J$, 存在$y_j\in S$, 使得$f(y_j)=x_j$, 所以$g^{-1}(\vee_J x_j)=g^{-1}(\vee_J f(y_j))=g^{-1}(f(\vee_J y_j))=[\vee_J y_j]=\vee_J[y_j]=\vee_J(g^{-1}g[y_j])=\vee_J(g^{-1}f(y_j))=\vee_J g^{-1}(x_j)$, 即$g^{-1}$保持任意下确界. 同理可证$g^{-1}$保持定向上确界.

推论5　设S和T都是连续格, $f: S\to T$为同态, 那么$S/\ker f\cong T$.

设L为连续格, ρ, σ为L上的同余且$\rho\subseteq\sigma$, 用σ/ρ表示$L/\rho\times L/\rho$的等价关系:

$$\sigma/\rho=\{([x]_\rho, [y]_\rho)\mid (x, y)\in\sigma\}.$$

推论 6 设 L 为连续格, ρ, σ 为 L 上的同余且 $\rho\subseteq\sigma$, 则有 $\frac{L/\rho}{\sigma/\rho}\cong L/\sigma$.

证明 因为 ρ, σ 为 L 上的同余且 $\rho\subseteq\sigma$, 所以映射 $\varphi: L/\rho\to L/\sigma$, $[x]_\rho\mapsto[x]_\sigma$ 为同态. 事实上:

(1) φ 有定义. 因为 $[x]_\rho=[y]_\rho$, 所以 $[x]_\sigma=[y]_\sigma$.

(2) 显然 φ 为满同态.

(3) $\sigma/\rho=\ker\varphi$. 由于 $([x]_\rho, [y]_\rho)\in\ker\varphi\Leftrightarrow\varphi([x]_\rho)=\varphi([y]_\rho)\Leftrightarrow[x]_\sigma=[y]_\sigma\Leftrightarrow([x]_\rho, [y]_\rho)\in\sigma/\rho$. 由推论 5 可得 $\frac{L/\rho}{\sigma/\rho}\cong L/\sigma$.

[参考文献]

[1] Gierz G, Hofmann K H, Keimel K, et al. A Compendium of Continuous Lattices[M]. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1980.

[2] Hofmann K H, Mislove M V. The lattice of kernel operators and topological algebra[J]. Math Z, 1977, 154(2): 175-188.

[3] Dowker C H, Papert D. Quotient frames and subspaces[J]. Proc London Math Soc, 1966, 16(1): 275-296.

[4] Balber R, Dwinger P. Distributive Lattices[M]. Missouri: Missouri Univ Press, 1974.

[5] Wei H, Maokang L. Lattices of quorients of completely distributiVe lattices[J]. Algebra Univers, 2005, 54(1): 121-127.

[6] W Xijuan, H Wei. A not on lattices of quotients of complete Boolean algebra[J]. J Math, 2009, 29(2): 133-138.

[责任编辑: 丁 蓉]