单位圆盘与多圆柱上重调和算子的特征值估计

蔡　敏, 杨洪苍, 吴伟力

(徐州工程学院数学与物理科学学院, 江苏 徐州 221008)

[摘要]　主要对单位圆盘 ^{1} 和多圆柱 ^{n} 上的 Clamped Plate问题或 Dirichlet双调和算子的问题进行了研究. 得到了单位圆盘 ^{1} 和多圆柱 ^{n} 上 Dirichlet重调和算子 ^{2} 的两特征值不等式.

[关键词]　特征值, 不等式, 双调和算子, 单位圆盘, 多圆柱

[中图分类号] O186.16　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2009)04-0046-06

Eigenvalue Estimates of Biharmonic Operate on Unit Disk and Multi Cylinder

Cai Min, Yang Hongcang, Wu Weili

(College of Mathematics and Physical Sciences, Xuzhou Institute of Technology, Xuzhou 221008, China)

Abstract The Clamped problem or the problem about Dirichlet biharmonic operator on unit disk ^{1} and multi cylinder ^{n} are studied. Two eigenvalue inequalities of Dirichlete biharmonic operator ^{2} on unit disk ^{1} and multi cylinder ^{n} are obtained.

Key words eigenvalue, inequality, biharmonic, unit disk, multi cylinder

设 M 是 n-维紧流行, 　M 是M 中连通的有界域. 所谓 Clamped Plate问题或狄利克雷重调和算子的不等式问题是指

$$\begin{cases} {}^{2}u = \quad u, u \quad , \\ u\Big| \quad = \dfrac{u}{n}\Big| \quad = 0, \end{cases} \tag{1}$$

这里 　, ^{2} 分别是 M 中的拉普拉斯算子和拉普拉斯重调和算子. 方程(1)具有一定的物理背景, 在低维情况下, 上式来自水动力学和薄板的振动问题. 对于球面的 Clamped Plate问题, 本文第二作者将其形象地描述为 球壳振动 . 此种说法更加深了对问题的理解.

Clamped Plate问题从 20世纪 50年代至今一直是微分几何领域中研究的热题. 此问题的研究成果颇为丰富. 1956年, Payne, Polya和 Weinberger[1] 得到了 $\mathbf{R}^n$ 上重调和算子特征值的不等式:

$$_{k+1} - \quad _{k} \quad \frac{8(n+2)}{n^2}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \quad _i.$$

1984年, Hile和 Yeh[2] 推广了 Hile和 Protter在 Clamped Plate问题的方法, 并得到了 $\mathbf{R}^n$ 上改善了的结果:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{\ _i^{\frac{1}{2}}}{\ _{k+1} - \ _i} \quad \frac{n^2k^{\frac{3}{2}}}{8(n+2)}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ _i\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

1990年, Hook[3], 陈祖墀和钱椿林[4] 各自独立地得到了 $\mathbf{R}^n$ 上的不等式:

$$\frac{n^2k^2}{8(n+2)} \quad \left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\ _i^{\frac{1}{2}}}{\ _{k+1} - \ _i}\right]\sum_{i=1}^{k}\ _i^{\frac{1}{2}}.$$

2006年, 杨洪苍[5] 将文献[3], [4]的结果又向前推进了一步, 得到了 $\mathbf{R}^n$ 上的不等式:

收稿日期: 2009-06-21.
基金项目: 江苏省高校自然科学研究计划项目(07KJD110197).
通讯联系人: 蔡　敏, 硕士, 讲师. 研究方向: 微分几何. E-mail xzcmwyl@163.com

$$_{k+1} \quad \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} {}_{i} + \left[\frac{8(n+2)}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[\ {}_{i}(\ {}_{k+1} - \ {}_{i})]^{\frac{1}{2}}.$$

本文主要研究了圆盘 ^{1} 和多圆柱 ^{n} 上 Clamped Plate问题.

1　引理

引理 **1**

$$\sum_{i=1}^{k}(\ {}_{k+1} - \ {}_{i})\|u_i \quad g\|^2 \quad A, \tag{2}$$

其中

$$A = \sum_{i=1}^{k}(\ {}_{k+1} - \ {}_{i})^{\frac{1}{2}}\Big[\ {}_{1}\Big(4\| \ g \ u_i\|^2 + 2 \ | \ u_i|^2| \ g|^2 - (\ g)^2u_i^2 - 2 \ g \ gu_i - | \ g|^2u_i^2\Big) + \frac{1}{\ {}_{1}}\Big(\| \ g \ u_i\|^2 - \frac{1}{4}(\ g)^2u_i^2 - \frac{1}{2} \ g \ u_i^2\Big)\Big],$$

$_{1} > 0$是一个常数, u_i, g 是流形上的光滑函数.

证明　令

$$\begin{cases} {}_{i} = gu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}u_j, \ a_{ij} = \ gu_iu_j = a_{ji}, \\ u_j \ {}_{i} = 0, \quad {}_{i,j} = 1, k, \end{cases} \tag{3}$$

$$(\ {}_{i})^2 = \ {}_{i}^{2} \ {}_{i} = \ {}_{i}\Big(\ ^{2}(gu_i) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \ {}_{j}u_j\Big) =$$

$$_{i}(\ ^{2}gu_i + 2 \ g \ u_i + 2 \ g \ u_i + 2 (\ g \ u_i) + 2 \ g \ u_i + g \ ^{2}u_i) =$$

$$_{i} \ {}_{i}^{2} - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}b_{ij} + \ gu_i(\ ^{2}gu_i + 2 \ g \ u_i +$$

$$2 \ g \ u_i + 2 (\ g \ u_i) + 2 \ g \ u_i),$$

其中

$$b_{ij} = \ u_j(\ ^{2}gu_i + 2 \ g \ u_i + 2 \ g \ u_i + 2 (\ g \ u_i) + 2 \ g \ u_i) = - b_{ij},$$

$$_{i}^{2} = \ {}_{i}^{2}.$$

由于

$$_{i}a_{ij} = \ gu_j \ ^{2}u_i = \ gu_j \ ^{2}u_i - \ ^{2}(gu_i)u_j + \ ^{2}(gu_i)u_j =$$

$$- \ u_j(\ ^{2}(gu_i) - g \ ^{2}u_i) + \ gu_i \ ^{2}u_j = - b_{ij} + \ {}_{j}a_{ij}, \tag{4}$$

从而 a_{ij} 和 b_{ij} 有以下关系

$$b_{ij} = - b_{ij} = - (\ {}_{i} - \ {}_{j})a_{ij}. \tag{5}$$

由简单计算可知

$$2 \ gu_i \ g \ u_i = - 2 \ g \ u_i \ gu_i - 2 \ g \ g | \ u_i|^2 - \ gu_i \ g \ u_i,$$

$$2 \ gu_i (\ g \ u_i) = 4 \ g \ u_i \ ^2 + 2 \ g \ g | \ u_i|^2 + 2 \ g \ u_i \ g \ u_i,$$

$$2 \ gu_i(\ g \ u_i) = - 2 \ u_i \ g \ u_ig + 2 \ g \ g | \ u_i|^2 + 2 | \ g|^2| \ u_2|^2 -$$

$$(\ g)^2u_i^2 - 2 \ g \ gu_i^2 - \ g \ ^{2}gu_i^2 - | \ g|^2u_i^2.$$

再由 Rayleigh-Ritz不等式得

$$(_{k+1} - _i) \quad gu_i \quad ^2 \quad 4 \quad g \quad u_i \quad ^2 + 2 \quad | \quad g|^2 | \quad u_i|^2 - \quad (g)^2 u_i^2 -$$

$$g \quad gu_i^2 - \quad | \quad g|^2 u_i^2 - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{ij}. \tag{6}$$

另一方面

$$_i(-2 \quad g \quad u_i - \quad gu_i) = \left(gu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j \right) (-2 \quad g \quad u_i - \quad gu_i) =$$

$$gu_i \quad ^2 + 2 \sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_{ij}, \tag{7}$$

其中

$$c_{ij} = \quad u_j(\quad g \quad u_i + 1/2 \; gu_i) = - c_{ji}. \tag{8}$$

由(7)及 Schwarz不等式知

$$gu_i \quad ^2 + 2 \sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_{ij} = \quad _i \left(-2 \quad g \quad u_i - \quad gu_i + 2 \sum_{j=1}^{k} c_{ij} u_j \right)$$

$$_i \quad ^2 + \frac{1}{\quad} \left(\quad g \quad u_i + \frac{1}{2} gu_i \quad - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \right), \tag{9}$$

其中 > 0是常数. 再由(6)得

$$gu_i \quad ^2 + 2 \sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_{ij} \quad \frac{\quad}{_{k+1} - _i} \Big[4 \quad g \quad u_i \quad ^2 + 2 \quad | \quad g|^2 | \quad u_i|^2 - \quad (g)^2 u_i^2 -$$

$$2 \quad g \quad gu_i^2 - \quad | \quad g|^2 u_i^2 - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{ij} \Big] + \frac{1}{\quad} (_{k+1} - _i) \Big[\quad g \quad u_i + 1/2 \; gu_i \quad ^2 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \Big]. \tag{10}$$

令 $= (_{k+1} - _i)^{1/2} \; _1, \; _1 > 0$是常数, 将(10)乘以$(_{k+1} - _i)$, 则

$$gu_i \quad ^2 (_{k+1} - _i) + 2 \sum_{j=1}^{k} (_{k+1} - _i) a_{ij} c_{ij}$$

$$_1 (_{k+1} - _i)^{1/2} \Big[4 \quad g \quad u_i \quad ^2 + 2 \quad | \quad g|^2 | \quad u_i|^2 - \quad (g)^2 u_i^2 -$$

$$2 \quad g \quad gu_i^2 - \quad | \quad g|^2 u_i^2 - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{ij} \Big] +$$

$$\frac{1}{_1} (_{k+1} - _i)^{1/2} \Big[\quad g \quad u_i + 1/2 \; gu_i \quad ^2 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \Big]. \tag{11}$$

因为 $a_{ij} = a_{ji}, \; c_{ij} = - c_{ji}$, 且 $b_{ij} = - (_i - _j) a_{ij}$, 将(11)式对 i从 1加到 k, 得

$$\sum_{i=1}^{k} \quad gu_i \quad ^2 (_{k+1} - _i) - \sum_{i,j=1}^{k} (_i - _j)^2 a_{ij}^2$$

$$A - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(_{k+1} - _i)^{1/2} + (_{k+1} - _j)^{1/2}} (_i - _j)^2 a_{ij}^2 -$$

$$\frac{1}{2 \; _1} E \quad (K_{k+1} - K_i)^{1/2} + (K_{k+1} - K_i)^{1/2} c_{ij}^2, \tag{12}$$

其中

$$A = \mathop{E}_{i=1}^{k} (K_{k+1} - K_i)^{1/2} \Big[A_1 \Big(4+ \quad g \quad u_i + \quad ^2 + 2 \; Q | \quad g|^2 | \quad u_i|^2 -$$

$$Q (\$g)^2 u_i^2 - 2 \; Q \quad g \quad \$gu_i^2 - \quad Q\$ | \quad g|^2 u_i^2 \Big) +$$

$$\frac{1}{A_1} (K_{k+1} - K_i)^{1/2} + \quad g \quad u_i + 1/2\$gu_i + \quad ^2 \Big],$$

或

$$\mathop{E}_{i=1}^{k} (K_{k+1} - K_i) \| u_i \quad g \|^2 \; [\; A,$$

其中

$$A = \underset{i=1}{\overset{k}{E}} (K_{k+1} - K_i)^{\frac{1}{2}} \Big[{}_{A\,1}(4+ \quad g \quad u_i + \ ^2 + 2 \circledR | \quad u_i |^2 | \quad g |^2 - \circledR(\quad g)^2 u_i^2 - 2 \circledR \quad g \quad \$ g u_i - $$

$$\circledR \$ | \quad g |^2 u_i^2) + \frac{1}{A_1}(+ \quad g \quad u_i + \ ^2 - \frac{1}{4}\circledR(\quad g)^2 u_i^2 - \frac{1}{2}\circledR \quad g \quad \$ u_i^2) \Big],$$

$A_1 > 0$是一个常数.

2　主要结果及其证明

定理 1　设 8是单位圆盘 $\$^1$中的连通有界域, K_i, $i = 1, 2, , , k$是其上 Clamped Plate问题的第 i特征值, 则有

$$\underset{i=1}{\overset{k}{E}} (K_{k+1} - K_i) [\ \underset{i=1}{\overset{k}{E}} (K_{k+1} - K_i)^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{6}\left(K_i^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{24}\right).$$

证明　我们知道单位圆盘有双曲度量

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z}{(1 - | z |^2)^2}. \tag{13}$$

对单位圆盘实行分式线性变换

$$X = -\frac{z+1}{z-1},$$

即

$$z = \frac{X-1}{X+1}. \tag{14}$$

(14) 两边同时微分得

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(\frac{X-1}{X+1}\right) = \frac{2\mathrm{d}X}{(X+1)^2}, \tag{15}$$

$$\mathrm{d}z = \frac{2\mathrm{d}X}{(X+1)^2}. \tag{16}$$

将 (14), (15), (16) 代入 (13) 得

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{16\mathrm{d}X\mathrm{d}X}{4(X+X)^2}, \tag{17}$$

这里

$$X = x_1 + \mathrm{i}x_2.$$

将上式代入 (17) 得

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2}{x_1^1}. \tag{18}$$

(18) 是度量 (17) 在上半平面 H^+ 上的表示, 对 (18) 实行坐标变换

$$x_1 = \mathrm{e}^{Q}, \tag{19}$$

得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}Q^2 + \mathrm{e}^{-2Q} + \mathrm{e}^{-2Q}\mathrm{d}x_2^2, \tag{20}$$

这里 Q是 $\$^1$上的度量函数, 度量 (20) 相应于变量 Q的拉普拉斯算子为

$$\$ = \frac{5^2}{5Q^2} + \frac{5}{5Q}.$$

取 $g = Q$则对函数 g有

$$\$g = 1, \quad + \quad g + \ = 1. \tag{21}$$

将 (21) 代入引理得

$$\underset{i=1}{\overset{k}{E}} + g u_i + \ ^2 (K_{k+1} - K_i) [\quad E \quad (K_{k+1} - K_i)^{1/2} \Big[{}_{A\,1}(4+ \quad g+ \ ^2 + \quad u_i + \ ^2 +$$

$$2+ \quad u_i + \ ^2 - 1) + \frac{1}{A_1}\left(+ \quad g+ \ ^2 + \quad u_i + \ ^2 - \frac{1}{4}\right) \Big] \ [$$

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{1/2}\left(2\sqrt{6}\|\quad u_i\|^2-\frac{5}{12}\sqrt{6}\right).\qquad(22)$$

因为

$$\|\nabla u_i\|^2=\int_\Omega|\nabla u_i|^2=\int_\Omega u_i(-\Delta u_i)\le(\|u_i\|^2+\|\Delta u_i\|^2)^{1/2}=\lambda_i^{1/2},\qquad(23)$$

$$\|u_i\nabla g\|^2=\int_\Omega|u_i\nabla g|^2=\int_\Omega u_i^2|\nabla g|^2=1,\qquad(24)$$

由(22),(23),(24)得

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\le\sum(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{1/2}2\sqrt{6}\left(\lambda_i^{1/2}-\frac{5}{24}\right).$$

定理 **2**　设 Ω 是多圆柱 $\mathbb{H}^n$ 中的连通有界域,$\lambda_i(i=1,2,\cdots,k)$是单位复球 B^n 上 Clamped Plate问题的第 i特征值,则有

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\le\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{\frac12}\frac{\sqrt{8(2+n)}}{n}\left[\lambda_i^{\frac12}-\frac{(4+n)n}{8(2+n)}\right].$$

证明　因单位多圆柱 $\mathbb{H}^n=\mathbb{H}^1\times\mathbb{H}^1\times\cdots\times\mathbb{H}^1$($n$个 $\mathbb{H}^1$)有乘积的双曲度量

$$ds^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{4dz_i d\bar{z}_i}{(1-|z_i|^2)^2}.\qquad(25)$$

对多圆柱实行分式线性变换

$$\zeta_i=-\frac{z_i+1}{z_i-1},\quad i=1,2,\cdots,n,\qquad(26)$$

则得到度量(25)在$(H^+)^n=H^+\times H^+\times\cdots\times H^+$($n$个$H^+$)上表示

$$ds^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{dx_i^2+dy_i^2}{x_i^2},\qquad(27)$$

这里

$$\zeta_j=x_j+iy_j,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

对(27)实行坐标变换

$$x_i=e^{\varphi},\quad i=1,2,\cdots,n,\qquad(28)$$

则(27)可变为

$$ds^2=\sum_{p=1}^{n}(d\varphi_p^2+e^{-2\varphi_p}dy_p^2),\qquad(29)$$

这里 $\varphi_p,p=1,2,\cdots,n$是 $\mathbb{H}^n$ 上的度量函数,则我们得到对于度量(29)关于 $\varphi_p,p=1,2,\cdots,n$的拉普拉斯算子:

$$\Delta=\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi_p^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi_p}\right).$$

取 $g=\varphi_p,p=1,2,\cdots,n$. 对这个 n个函数 g我们有

$$\Delta g=1,\quad\|\nabla g\|=1.\qquad(30)$$

由引理 1和(30)得

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\|u_i\nabla g\|^2\le\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{1/2}\Big[\varepsilon_1\Big(4\|\nabla\varphi_p g\|\|\nabla\varphi_p u_i\|^2+$$
$$2\int_\Omega|\nabla u_i|^2|\nabla g|^2-\int_\Omega(\Delta g)^2u_i^2\Big)+\frac{1}{\varepsilon_1}\Big(\|\nabla\varphi_p g\|^2\|\nabla\varphi_p u_i\|^2-\frac14\int_\Omega(\Delta g)^2u_i^2\Big)\Big].\qquad(31)$$

(31)两边对 p从 1到 n作和得

$$n\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\|u_i\nabla g\|^2\le\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{1/2}\Big[\varepsilon_1((4+2n)\|\nabla u_i\|^2-n)\times$$
$$\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\|\nabla u_i\|^2-\frac{n}{4}\right)\Big]\le\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^{1/2}\left[\sqrt{8(2+n)}\|\nabla u_i\|^2-\frac{n(4+n)\sqrt{8(2+n)}}{8(2+n)}\right].$$

因

$$\|\nabla u_i\|^2 = \int_\Omega |\nabla u_i|^2 = \int_\Omega u_i(-\Delta u_i) \leq (\|u_i\|^2 \|\Delta u_i\|^2)^{1/2} = \lambda_i^{1/2},$$

最后我们得

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^{1/2} \frac{\sqrt{8(2+n)}}{n} \left(\lambda_i^{1/2} - \frac{(4+n)n}{8(2+n)} \right).$$

特别地, 对双圆盘 Δ^2 我们有不等式

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \| u_i g \|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^{1/2} 2\sqrt{2} \left(\lambda_i^{1/2} - \frac{3}{8} \right).$$

[参考文献]

[1] Payne L E, Polya G, Weinberger H F. On the ration of consecutive eigenvalue[J]. Math and Phis, 1956, 35: 289-298.

[2] Hile G N, R Z Y. Inequalities for eigenvales of the biharmonic operator[J]. Pac J Math, 1984, 112(1): 115-133.

[3] Hook S M. Domain independent upper bounds for eigenvalues of elliptic operator[J]. Trans Amer Math Soc, 1990, 318: 615-642.

[4] Chen Z, Qian C L. Estimates for discretes spectrum of Laplaytion operator with any order[J]. China Univ Sci Tech, 1990, 20: 256-262.

[5] Cheng Qingming, Yang Hongcang. Inequalities for eigenvalues of a clamped plate problem[J]. Trains Amer Math Soc, 2006, 358(6): 2625-2635.

[责任编辑: 丁　蓉]