股价受分数布朗运动驱动的混合期权定价模型

赵 巍

(淮海工学院商学院,江苏 连云港 222001)

[摘要] 分数布朗运动由于具有自相似和长期相关等分形特性,已成为数理金融研究中更为合适的工具. 本文通过假定股票价格服从几何分数布朗运动,构建了 Itô分数 Black-Scholes市场;接着在分数风险中性测度下,利用随机微分方程和拟鞅(quasi-martingale)定价方法给出了分数 Black-Scholes定价模型;进而讨论了股价受分数布朗运动驱动的混合期权定价模型. 研究结果表明,与标准期权价格相比,分数期权价格要同时取决于到期日和Hurst参数.

[关键词] 分数布朗运动,拟鞅定价,分数 Black-Scholes模型,混合期权

[中图分类号] F830.9 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)01-0006-05

Pricing of Compound Option Model With Stock Price Driven by FBM

Zhao Wei

(School of Business, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang 222001, China)

Abstract: The self-similarity and long-range dependence properties make the Fractional Brownian motion a suitable tool in different applications like mathematical finance. This paper used the hypotheses that assert price followed geometric FBM to construct the Itô fractional Black-Scholes market. Using of quasi-martingale method based on the fractional risk neutral measure, this paper solved fractional Black-Scholes model. Moreover pricing of compound option model with stock price driven by FBM was discussed. The result showed fractional option price, compared to classical option price, depends on maturity time and Hurst parameter.

Key words: fractional brownian motion, quasi-martingale pricing, fractional Black-Scholes model, compound option

自从 Bachelier关于债券价格运动的研究以来,产生了许多描述股票价格收益行为的模型[1]. 针对Bachelier的算术布朗运动模型出现价格的负值,Samuelson提出了几何布朗运动模型[2],Osborne也建议用正态分布随机变量来建模对数股票价格[3]. 随后,布朗运动以其良好的随机计算性质而广泛应用于期权定价中. 然而大量的实证研究表明,大多数股票市场中的随机现象都体现出了很强的肥尾、自相似和长期相关等分形特征,这导致了大量的由布朗运动驱动的定价模型不符合真实的市场.

Mandelbrot和 Van Ness[4]提出的分数布朗运动,已成为弥补上述模型缺陷最为简单的方法. 许多研究者以不同方法给出了分数布朗运动的离散逼近,还在分数轨道积分(fractional pathwise integrals)意义下用多种途径证明了分数 Black-Scholes模型下的欧式期权定价存在套利[5-7],这使得分数布朗运动似乎不适宜用于驱动期权定价模型. 而 Hu和 Øksendal在分数伊藤积分意义下证明,分数 Black-Scholes市场不存在套利且完备[8].

Necula[9]在此基础上,通过随机积分的计算证明了分数 Black-Scholes公式;刘韶跃等[10]利用这一结论对可降低权利金的权证进行了定价. 本文立足通常鞅定价的研究思路,在分数风险中性测度下,利用随机微分方程和拟鞅(quasi-martingale)定价方法对分数 Black-Scholes定价模型进行了求解;并将此种思想推广到股价受分数布朗运动驱动的混合期权定价模型中,最后对得到的分数期权价格和标准期权价格进

收稿日期: 2009-03-06

基金项目: 淮海工学院引进人才科研启动基金(KQ09012).

通讯联系人: 赵 巍,博士,讲师,研究方向: 金融复杂性和金融工程. E-mail: njzhaow@126.com

行了比较.

1　Itô型分数 Black-Scholes市场

考虑金融市场上存在两种投资可能性, 一种是无风险资产债券, 满足:

$$dM(t) = rM(t)dt, \tag{1}$$

其中, 无风险利率 r 为常数.

另一种是风险资产如股票, 满足:

$$dS(t) = \mu(t)S(t) + \sigma(t)S(t)dB_H(t), \tag{2}$$

称 $S(t)$ 满足几何分数布朗运动. 若 $\mu(t)=\mu$, $\sigma(t)=\sigma$ 为常数, 根据文献[9]中引理 1.5有

$$S(t) = S\exp(\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} + \sigma B_H(t)), \tag{3}$$

其中, $S(0)=S$.

若保持其余 Black-Scholes模型条件不变, 则此时的市场为 Itô型分数 Black-Scholes市场. Hu和 Øksendal证明分数 Black-Scholes市场不存在套利, 且是完全市场[8]. 则在风险中性测度 Q 下

$$S(t) = S\exp(rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} + \sigma B_H^Q(t)). \tag{4}$$

设 $\{F_t^H, 0\leqslant t\leqslant T\}$ 表示由 $B_H(t)$ 产生的 $F_t^H = \sigma(B_H(u), 0\leqslant u\leqslant t)$ 关于 P 完备的 σ-流. 考虑时间区间 $[0,T]$, 投资者在时刻 t 的财富用 $F(t)$ 表示, 即

$$F(t) = a(t)S(t) + b(t)M(t), \tag{5}$$

其中, $a(t)$、$b(t)$ 分别对应股票和债券的数目. 若 $F(t)$ 满足下面的方程

$$dF(t) = a(t)dS(t) + b(t)dM(t), \tag{6}$$

则称投资策略 $\{a(t), b(t)\}$ 是自融资策略. 此时, 财富过程满足线性随机微分方程

$$dF(t) = a(t)dS(t) + (F(t) - a(t)S(t))r\,dt = rF(t)dt + a(t)S(t)\sigma dB_H^Q(t),$$

有

$$e^{-rt}F(t) = F(0) + \int_0^t e^{-r\tau}\sigma a(\tau)S(\tau)dB_H^Q(\tau).$$

另一方面, 由分数 Clark-Clone定理[9]

$$e^{-rT}F(T) = E[F(T)] + e^{-rT}\int_0^T e^{r(T-\tau)}a(\tau)S(\tau)dB_H^Q(\tau) = E[F(T)] + \int_0^T e^{-r\tau}a(\tau)S(\tau)dB_H^Q(\tau),$$

再由分数 Girsanov公式[9]

$$E_t^Q[e^{-rT}F(T)] = E_t^Q(E[F(T)]) + E_t^Q\left[\int_0^T e^{-r\tau}a(\tau)S(\tau)dB_H^Q(\tau)\right] =$$

$$E[F(T)] + \int_0^t e^{-r\tau}a(\tau)S(\tau)dB_H^Q(\tau),$$

可得到下面的定理.

定理 1　(分数风险中性定价公式)任意自然 σ-流 F_T^H 上的可测未定权益 F 在任意时刻 $t\in[0,T]$ 的价格为

$$F(t) = e^{-r(T-t)}E_t^Q[F(T)],$$

其中, $E_t^Q[\cdot]$ 为概率测度 Q 下的拟条件数学期望.

2　分数 *Black-Scholes* 期权定价模型

考虑另一风险中性测度 R 下随机过程

$$B_H^R(t) = B_H^Q(t) - \theta t^{2H}, \tag{7}$$

由分数 Girsanov公式[9], $B_H^R(t)$ 为风险中性测度 R 下的分数布朗运动. 考虑

$$Z(t) = \exp(\theta B_H(t) - \frac{\theta^2}{2}t^{2H}), \tag{8}$$

则可利用下面引理进行拟鞅等价测度的计算.

引理 1[9]　若欧式未定权益 f 满足 $E_t[f(B_H(T))] < \infty$. 则对任意 $t \leqslant T$, 有下面的对等关系:

$$E_t^R[f(B_H(T))] = \frac{1}{Z(t)}E_t^Q[f(B_H(T))Z(T)],$$

其中, $E_t^Q[\cdot]$, $E_t^R[\cdot]$ 分别为风险中性测度 Q 和 R 下的拟条件数学期望.

定理 2 (分数 Black-Scholes公式) 标的资产 S, 到期日为 T, 执行价为 K 的欧式买权在任意时刻 $t \in [0, T]$ 的价格为

$$C(t, S(t)) = S(t)N(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{9}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \tag{10}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}. \tag{11}$$

证明　由定理 1

$$C(t, S(t)) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}E_t^Q[F(S(T))] = \mathrm{e}^{-r(T-t)}E_t^Q[\max((S(T)-K), 0)] =$$
$$\mathrm{e}^{-r(T-t)}E_t^Q[S(T)I_{\{S(T)>K\}}] - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}E_t^Q[I_{\{S(T)>K\}}] \triangleq C_1 - C_2,$$

其中, $C_1 = \mathrm{e}^{-r(T-t)}E_t^Q[S(T)I_{\{S(T)>K\}}]$, $C_2 = K\mathrm{e}^{-r(T-t)}E_t^Q[I_{\{S(T)>K\}}]$.

考虑测度 R 下随机过程

$$B_H^R(t) = B_H^Q(t) - \sigma t^{2H}, \tag{12}$$

令

$$Z(t) = \exp(\sigma B_H(t) - \frac{\sigma^2}{2}t^{2H}), \tag{13}$$

由引理 1, 得

$$E_t^Q[S(T)I_{\{S(T)>K\}}] = \mathrm{e}^{rT}E_t^Q[Z(T)I_{\{S(T)>K\}}] =$$
$$Z(t)\mathrm{e}^{rT}E_t^R[I_{\{S(T)>K\}}] = S(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}E_t^R[I_{\{S(T)>K\}}].$$

根据

$$\ln S(T) = \ln S + rT + \frac{1}{2}\sigma^2T^{2H} + \sigma B_H^R(T),$$

可得

$$C_1 = \mathrm{e}^{-r(T-t)}E_t^Q[S(T)I_{\{S(T)>K\}}] = S(t)E_t^R[I_{\{S(T)>K\}}] = S(t)P_r^R(\ln S(T) > \ln K) =$$
$$S(t)P_r^R((\ln S(t) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma\Delta B_H^R(T)) > \ln K) = S(t)N(d_1),$$

其中, $d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$.

其次

$$C_2 = K\mathrm{e}^{-r(T-t)}E_t^Q[I_{\{S(T)>K\}}] = K\mathrm{e}^{-r(T-t)}P_t^Q[I_{\{S(T)>K\}}] = K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2),$$

其中, $d_2 = \dfrac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$.

所以, 欧式买权的评价模型为

$$C(t, S(t)) = S(t)N(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2),$$

证毕.

3 分数混合期权定价公式

混合期权是以期权作为标的资产的期权, 可分为 4种不同的混合期权: 买权的买权、买权的卖权、卖权的买权和卖权的卖权, 本文着重介绍买权的买权.

买权的买权 (A Call on A Call, CC) 到期现金流量为[11]

$$CC_{T_1} = \begin{cases} C(T_1, S(T_1)) - K_1, & C(T_1, S(T_1)) > K_1, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

其中, T_1, K_1 表示混合买权到期日和履约价, $C(T_1, S(T_1))$ 表示到期日 T、履约价 K 的标的买权在 T_1 的价格 $(T_1 < T)$.

在风险中性下, 有

$$CC_T = e^{-r(T-t)} E_t^Q [\max(0, C(T_1, S(T_1)) - K_1)], \tag{14}$$

其中, $S(T_1) = S(t)\exp(r(T_1 - t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 (T_1^{2H} - t^{2H}) + \sigma_1 (B_{H_1}(T_1) - B_{H_1}(t)))$.

设 $C(T_1, X) = K_1$, 则有

$$CC_{T_1} = e^{-r(T_1-t)} E_t^Q [(C(T_1, S(T_1)) - K_1) I_A] = e^{-r(T_1-t)} E_t^Q [C(T_1, S(T_1)) I_A] - K_1 e^{-r(T_1-t)} E_t^Q [I_A],$$

其中,

$$A = \{S(T_1) \mid S(T_1) > X\} = \left\{ -\frac{B_H(T_1) - B_H(t)}{\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}}} \;\middle|\; -\frac{B_H(T_1) - B_H(t)}{\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}}} < a_2 \right\},$$

$$a_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{X}\right) + r(T_1 - t) - \frac{\sigma^2}{2}(T_1^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}}},$$

有

$$CC_{T_1} = e^{-r(T_1-t)} E_t^Q [C(T_1, S(T_1)) I_A] - K_1 e^{-r(T_1-t)} N(a_2).$$

而

$$C(T_1, S(T_1)) = e^{-r(T-T_1)} E_{T_1}^Q [(S(T) - K) I_{\{S(T) > K\}}],$$

其中

$$S(T) = S(T_1)\exp(r(T - T_1) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 (T^{2H} - T_1^{2H}) + \sigma_1 (B_H(T) - B_H(T_1))),$$

故

$$E_t^Q [C(T_1, S(T_1)) I_A] = e^{-r(T-T_1)} E_t^Q [(S(T) - K) I_B] = e^{-r(T-T_1)} E_t^Q [S(T) I_B] - K e^{-r(T_1-t)} E_t^Q [I_B],$$

其中

$$B = \{(S(T_1), S(T)) \mid S(T_1) > X, S(T) > K\} = \left\{ \left(-\frac{B_H(T_1) - B_H(t)}{\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}}}, -\frac{B_H(T) - B_H(t)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \right) \;\middle|\; -\frac{B_H(T_1) - B_H(t)}{\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}}} < a_2, -\frac{B_H(T) - B_H(t)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} < b_2 \right\},$$

$$b_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T - t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}},$$

所以

$$CC_{T_1} = e^{-r(T-t)} E_t^Q [S(T) I_B] - K e^{-r(T-t)} N_2(a_2, b_2, \rho) - K_1 e^{-r(T_1-t)} N(a_2) = S(t) N_2(a_1, b_1; \rho) - K e^{-r(T-t)} N_2(a_2, b_2; \rho) - K_1 e^{-r(T_1-t)} N(a_2),$$

其中

$$a_1 = a_2 + \sigma\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}},$$

$$b_1 = b_2 + \sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}},$$

$$N_2(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

$$\rho = \mathrm{Corr}\left(-\frac{B_H^Q(T_1) - B_H^Q(t)}{\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}}}, -\frac{B_H^Q(T) - B_H^Q(t)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}\right) =$$

$$\mathrm{Corr}\left(\frac{B_H^Q(T_1) - B_H^Q(t)}{\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}}}, \frac{B_H^Q(T) - B_H^Q(T_1)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} + \frac{B_H^Q(T_1) - B_H^Q(t)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}\right) =$$

$$\mathrm{Corr}\left(\frac{B_H^Q(T_1) - B_H^Q(t)}{\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}}}, \frac{B_H^Q(T_1) - B_H^Q(t)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}\right) =$$

$$\frac{T_1^{2H} - t^{2H}}{\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}}\cdot\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} = \frac{\sqrt{T_1^{2H} - t^{2H}}}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}.$$

4 结论

分数布朗运动的出现,导致基于布朗运动假设及鞅定价方法建立的期权定价模型需要改进.本文立足通常鞅定价方法的基本研究思路,采用拟鞅定价的方法重新求解了 Itô型分数 Black-Scholes市场中的期权定价公式,进而讨论了股价受分数布朗运动驱动的混合期权定价模型.从得到的结果看出,相比通常的期权定价公式,分数期权价格不仅与到期时间有关,还取决于长记忆参数 H.假设 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t \leqslant T$,考虑到期日均为 T,签约日分别为 t_1 和 t_2 的两种期权.对通常的 Black-Scholes模型而言,两者在时刻 t 的期权价格相同;而对分数 Black-Scholes模型,前者的价格还受到标的资产价格在时间区间 $[t_1, t_2]$ 的影响,这正是分数布朗运动中长记忆性驱动的结果.

[参考文献]

[1] Bachelier L. Theory of Speculation[M]//Cootner P. The Random Character of Stock Market Prices. Cambridge: MIT Press, 1900: 17-78

[2] Sumuelson P A. Rational theory of warrants pricing[J]. Industrial Magement Review, 1965, 6(1): 13-31.

[3] Osborne M F M. Brownian motion in the stock market[J]. Operations Research, 1959, 7(2): 145-173.

[4] Mandelbrot B B, Van Ness J W. Fractional Brownian motion, fractional noises and application[J]. SIAM Review, 1968, 10(4): 422-437.

[5] Lin S J. Stochastic analysis of fractional Brownian motion[J]. Stochastics and Stochastics Reports, 1995, 55(1): 121-140

[6] Roger L C G. Arbitrage with fractional Brownian motion[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(11): 95-105

[7] Decreusefond L, Ustunel A S. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion[J]. Potential Analysis, 1999, 10(2): 177-214.

[8] Hu Yaozhong, Øksendal B. Fractional white noise calculus and application to finance[J]. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2003, 6(1): 1-32.

[9] Necula C. Option pricing in a fractional Brownian motion environment[EB/OL]. [2008-03-10]. http://www.dofin.ase.ro/.

[10] 刘韶跃, 杨向群. 分数布朗运动环境中欧式未定权益的定价[J]. 应用概率统计, 2004, 20(11): 429-434

[11] 陈松男. 金融工程学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2002

[责任编辑: 丁　蓉]