区组大小为 3的四重单纯支架

王 丽[1], 曹海涛[2]

(1. 宿迁学院教师教育系, 江苏 宿迁 223800)
(2. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 一个 (K, λ)支架是一个区组集可分为若干个带洞平行类的可分组设计 (K, λ)-GDD $(\mathscr{X}, \mathscr{G}, \mathscr{B})$, 每一个带洞平行类为 $X \setminus G_j$ 的一个划分, 其中 $G_j \in \mathscr{G}$. 若一个 (K, λ)支架的区组集中任意两个区组是不相同的, 则称它是单纯的. 单纯的支架对构造单纯的可分解填充设计有很重要的作用, 后者可以用来构造统计学中的均匀设计. 本文通过直接构造和递推构造的方法证明了组型一致的$(3, 4)$单纯支架存在的必要条件也是充分的.

[关键词] 可分组设计, 单纯的, 支架
[中图分类号] O157.2 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)01-0011-05

Simple Kirkman Frames With Index 4

Wang Li[1], Cao Haitao[2]

(1. Department of Teacher Education, Suqian College, Suqian 223800, China)
(2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract: A (K, λ)-frame is a (K, λ)-GDD $(\mathscr{X}, \mathscr{G}, \mathscr{B})$ in which the collection of blocks B can be partitioned into holey parallel classes, each holey parallel class being a partition of $X \setminus G_j$ for some $G_j \in \mathscr{G}$. A frame is called simple if all its blocks are distinct. Simple frames are powerful for the construction of simple Kirkman packing designs, which can be used in the construction of uniform designs in statistics. In this paper, we shall use both direct constructions and recursive constructions to prove that the necessary conditions for simple Kirkman frames of type t^u with index 4 are also sufficient.

Key words: group divisible design, simple, frame

设K是正整数的集合, λ为给定的一个正整数. 一个 λ重可分组设计(K, λ)-GDD是满足以下条件的一个三元组$(\mathscr{X}, \mathscr{G}, \mathscr{B})$:

(1) $\mathscr{X}$是一个有限点集;

(2) $\mathscr{G}$中的元素(称为组)均是$\mathscr{X}$的子集, 并且所有组恰好构成$\mathscr{X}$的一个划分;

(3) $\mathscr{B}$是由X的k元子集(称为区组)构成的集合, 其中 $k \in K$;

(4) $\mathscr{X}$中任意两个属于不同组的点恰好在 λ个区组中出现, 而属于同一组的两个点不在任何区组中出现.

如果一个可分组设计的区组集$\mathscr{B}$可以划分成一些平行类, 其中每个平行类都是点集$\mathscr{X}$的一个划分, 则称这个可分组设计是可分解的, 简记为 RGDD.

当$K = \{k\}$时, 我们把(K, λ)-GDD简记为(k, λ)-GDD. 当 $\lambda = 1$时, 把它们分别简记作K-GDD和k-GDD.

一个可分组设计$(\mathscr{X}, \mathscr{G}, \mathscr{B})$的组型是组$G$的长度$|G|$的多重集, 其中$G \in \mathscr{G}$. 我们经常用以下方式对它进行描述: 若$\mathscr{G}$中大小为 1的组出现了$i$次, 大小为 2的组出现了$j$次, 大小为 3的组出现了$k$次, …, 则用 $1^i 2^j 3^k \dots$来表示可分组设计的组型. 组型为 n^k 的(k, λ)-GDD称为横截设计 TD(k, n, λ).

收稿日期: 2009-03-12
基金项目: 国家自然科学基金(10971101).
通讯联系人: 曹海涛, 副教授, 研究方向: 组合设计. E-mail: caohaitao@njnu.edu.cn

若一个可分组设计$(\mathscr{X},\mathscr{G},\mathscr{B})$的区组集$\mathscr{B}$可以划分为一些带洞的平行类,其中每个带洞平行类是关于$\mathscr{X}\backslash G_j$的一个划分,$G_j\in\mathscr{G}$,则称它是一个支架.支架的组型即为可分组设计的组型.(K,λ)支架中的组被称之为洞.如果支架中的组大小是一致的,则称它是组型一致的.区组长度为3的支架也称为Kirkman支架.

如果支架的区组集$\mathscr{B}$中没有重复区组,则称它是单纯的.Kirkman单纯支架可用来构造Kirkman单纯填充设计,方开泰等人已经给出Kirkman单纯填充设计可用来构造统计学中的均匀设计[1,2].容易证明组型为t^u的$(3,\lambda)$单纯支架存在的必要条件是:(1) $u\geqslant 4$,(2) $t(u-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$,(3) $t\lambda\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$和(4) $t(u-2)\geqslant\lambda$. Stinson和沈灏等人已经解决了$\lambda=1,2,3$时的$(3,\lambda)$单纯支架的存在性问题.

定理1[3,4,5]　对任意$\lambda\in\{1,2,3\}$,组型一致的$(3,\lambda)$单纯支架存在的必要条件也是充分的.

本文我们将证明型为t^u的$(3,4)$单纯支架存在的必要条件也是充分的.

定理2　组型为t^u的$(3,4)$单纯支架存在的必要条件$u\geqslant 4$,$t(u-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$且$t(u-2)\geqslant 4$也是充分的.

1　递推构造

我们给出单纯支架的3个基本构造.它的证明类似于[5]和[6]中众多构造的证明,我们仅给出构造方法,证明过程省略.

构造1　(可分组设计构造)设$(\mathscr{X},\mathscr{G},\mathscr{B})$是一个$K$-GDD,$w:\mathscr{X}\to\mathbf{Z}^+\cup\{0\}$是一个映射.对$\mathscr{B}$中的任一个区组$B$,若总存在一个组型为$\{w(x):x\in B\}$的$(k,\lambda)$单纯支架,则存在一个组型为$\left\{\sum_{x\in G}w(x):G\in\mathscr{G}\right\}$的$(k,\lambda)$单纯支架.

构造2　(横截设计构造)若存在一个组型为t^u的(k,λ_1)单纯支架(可分解的可分组设计)和一个单纯的可分解的横截设计$\mathrm{TD}(k,n,\lambda_2)$,则存在一个组型为$(nt)^u$的$(k,\lambda_1\lambda_2)$单纯支架(可分解的可分组设计).

构造3　(填洞构造)若存在一个组型为$T=\{t_1,\cdots,t_n\}$的(k,λ)单纯支架,令$\varepsilon\geqslant 0$,若对每个$1\leqslant i\leqslant n$,存在一个组型为$T_i\cup\{\varepsilon\}$的(k,λ)单纯支架,其中$\sum_{t\in T_i}t=t_i$.则存在一个组型为$\left(\cup_{i=1}^{n}T_i\right)\cup\{\varepsilon\}$的$(k,\lambda)$单纯支架.

2　主要结果

为了利用上述递推构造证明本文的主要结果,我们首先构造一些单纯的$(3,2)$-RGDD,它们将作为以上递推构造的输入设计.

引理1　存在一个单纯的组型为2^3的$(3,2)$-RGDD.

证明　在每个组上各取一点,共可得8个互不相同的3长区组.容易验证,它们构成一个$(3,2)$-GDD的区组集,并且恰好可以划分为4个平行类,故存在一个单纯的组型为2^3的$(3,2)$-RGDD.

引理2　存在一个单纯的组型为6^3的$(3,2)$-RGDD.

证明　由引理1可知,存在一个单纯的组型为2^3的$(3,2)$-RGDD.又由[7]知,存在一个可分解的横截设计$\mathrm{TD}(3,3,1)$.运用构造2即可得一个单纯的组型为6^3的$(3,2)$-RGDD.

引理3　对任意$g>1$,存在一个单纯的组型为g^3的$(3,2)$-RGDD.

证明　由[7]知,对任意$g\notin\{1,2,6\}$,存在一个组型为g^3的$(3,1)$-RGDD.设$(\mathscr{X},\mathscr{G},\mathscr{B})$是一个组型为$g^3$的$(3,1)$-RGDD,其点集为$X=Z_3\times Z_g$,组集为$\mathscr{G}=\{\{i\times Z_g\}:i\in Z_3\}$.对$\mathscr{B}$中的每个区组$B=\{(0,x),(1,y),(2,z)\}$,令$B'=\{(0,x),(1,y),(2,z+1(\mathrm{mod}\,g))\}$及$\mathscr{B}'=\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B'$,可得到另一个$(3,1)$-RGDD$(\mathscr{X},\mathscr{G},\mathscr{B}')$.显然,$(\mathscr{X},\mathscr{G},\mathscr{B}\cup\mathscr{B}')$即为一个单纯的组型为$g^3$(其中$g\notin\{1,2,6\}$)的$(3,2)$-RGDD.又对任意$g\in\{2,6\}$,结合引理1和2知,存在一个单纯的组型为$g^3$的$(3,2)$-RGDD,从而引理得证.

为了引入本文的递推方法,我们还需要成对平衡设计PBD的定义.一个成对平衡设计(v,K)-PBD是

满足以下条件的一个二元组 (X, B): X 是一个 v元点集, B 是由 X 的 k元子集构成的集合 (其中 $k \in K$), 且 X 中任意两个点恰好在一个区组中出现. 事实上, 一个 (v, K)-PBD 等同于一个组型为 1^v 的K-GDD. 为了证明本文的主要结果, 我们需要以下成对平衡设计.

引理 **4**[8]　对任意 $v \geqslant 4$且 $v \notin \{10, 11, 12, 14, 15, 18, 19, 23\}$, 存在一个$(v, \{4, 5, 6, 7, 8, 9\})$-PBD.

引理 **5**　对任意 $u \in \{5, 6, 8, 12, 14, 15, 18\}$, 存在一个组型为 3^u 的$(3, 4)$单纯支架.

证明　对每一个 u, 设点集为 Z_{3u}, 组为 $G_i = \{0+i, u+i, 2u+i\}$, $i = 0, 1, \cdots, u-1$. 所需单纯支架的 $6u$个带洞平行类可由 2个以 G_0为洞的初始带洞平行类 F_0和 F_1通过 $+1 \pmod{3u}$ 得到, F_0和 F_1中的区组如下所示.

$u=5$	F_0:	1 2 3	4 11 12	6 8 14	7 9 13			
	F_1:	1 2 13	3 6 9	4 7 11	8 12 14			
$u=6$	F_0:	1 2 3	4 9 11	5 7 16	8 13 17	10 14 15		
	F_1:	1 2 4	3 11 14	5 8 16	7 10 15	9 13 17		
$u=8$	F_0:	1 2 3	4 5 7	6 9 11	10 17 21	12 15 22	13 18 20	14 19 23
	F_1:	1 2 15	3 6 17	4 9 21	5 11 20	7 13 19	10 14 23	12 18 22
$u=12$	F_0:	1 2 23	3 20 28	4 19 22	5 7 27	6 9 14	8 13 18	10 16 25
		11 17 30	21 31 35	29 32 33				
	F_1:	1 26 28	2 4 20	3 19 30	5 21 27	6 9 13	7 11 16	8 18 31
		10 17 23	15 25 32	33 34 35				
$u=14$	F_0:	1 6 11	2 40 41	3 25 35	4 21 34	5 36 38	7 13 18	8 10 33
		9 17 30	12 19 39	15 24 27	16 23 31	20 29 37	22 26 32	
	F_1:	1 13 37	2 3 25	4 8 9	5 22 26	6 32 35	7 18 33	10 11 34
		12 15 21	16 29 31	17 24 40	19 27 39	20 36 38	23 30 41	
$u=15$	F_0:	1 33 36	2 9 27	3 5 8	4 26 35	6 14 24	7 12 38	10 18 34
		11 28 40	13 37 39	16 21 44	17 25 29	19 22 31	20 32 43	23 41 42
	F_1:	1 7 25	2 3 41	4 6 35	5 18 39	8 33 37	9 16 22	10 12 44
		11 14 21	13 19 36	17 26 34	20 29 40	23 24 43	27 31 32	28 38 42
$u=18$	F_0:	1 11 27	2 17 34	3 33 53	4 5 31	6 28 48	7 30 32	8 40 47
		9 46 49	10 23 43	12 19 52	13 14 42	15 29 38	16 21 22	20 41 44
		24 35 45	25 26 51	37 39 50				
	F_1:	1 39 51	2 41 45	3 32 48	4 9 23	5 17 28	6 25 33	7 15 19
		8 43 49	10 12 42	11 20 30	13 21 26	14 31 34	16 46 53	22 27 37
		24 40 47	29 35 38	44 50 52				

引理 **6**　对任意 $u \in \{9, 11, 23\}$, 存在一个组型为 3^u 的 $(3, 4)$ 单纯支架.

证明　对每一个 u, 设点集为 $GF(u) \times Z_3$, 组为 $G_i = \{(i, 0), (i, 1), (i, 2)\}$, $i \in GF(u)$. 设 ξ为 $GF(u)$ 的一个本原元. 对每一个 u, 我们在下表中分 6行给出 12个基区组, 用 $(\xi^{2i}, -)$, $0 \leqslant i \leqslant (u-3)/2$, 去作用同一行的两个初始区组, 所得的 $u-1$个区组恰好构成一个以 G_0为洞的带洞平行类. 从而对每一个 u, 由表中给出的 6行区组可以得到以 G_0为洞的 6个带洞平行类. 从而, 所需单纯支架的 $6u$个带洞平行类可由它们通过 $(+y, -)$, $y \in GF(u)$ 得到.

$u=9$, $\xi = x$:	$\{(1, 0), (x, 1), (x+2, 1)\}$	$\{(x, 0), (2x, 2), (2x+1, 2)\}$
$x^2+x+2=0$	$\{(2x, 0), (2x+1, 0), (2, 1)\}$	$\{(x+1, 1), (x, 2), (x+2, 2)\}$
	$\{(x, 0), (x+2, 0), (1, 2)\}$	$\{(2x, 1), (2x+1, 1), (x, 2)\}$
	$\{(1, 0), (x+1, 1), (2x+1, 1)\}$	$\{(2x, 0), (x+1, 2), (2x+1, 2)\}$
	$\{(x+1, 0), (2x+1, 0), (x+2, 1)\}$	$\{(x+1, 0), (x, 2), (2x+1, 2)\}$

	$\{(x,0),(2x+1,0),(1,2)\}$	$\{(2,1),(2x+2,1),(x+1,2)\}$
$u=11,\xi=2$:	$\{(1,0),(5,1),(6,1)\}$	$\{(2,0),(3,2),(6,2)\}$
	$\{(5,0),(6,0),(8,1)\}$	$\{(1,1),(5,2),(6,2)\}$
	$\{(1,0),(2,0),(4,2)\}$	$\{(2,1),(4,1),(6,2)\}$
	$\{(6,0),(2,1),(5,1)\}$	$\{(9,0),(2,2),(4,2)\}$
	$\{(2,0),(5,0),(7,1)\}$	$\{(9,1),(4,2),(8,2)\}$
	$\{(4,0),(8,0),(7,2)\}$	$\{(3,1),(7,1),(5,2)\}$
$u=23,\xi=2$:	$\{(1,0),(4,1),(5,1)\}$	$\{(19,0),(16,2),(17,2)\}$
	$\{(4,0),(5,0),(7,1)\}$	$\{(1,1),(3,2),(5,2)\}$
	$\{(3,0),(5,0),(6,2)\}$	$\{(3,1),(5,1),(14,2)\}$
	$\{(1,0),(12,1),(15,1)\}$	$\{(7,0),(2,2),(5,2)\}$
	$\{(2,0),(5,0),(12,1)\}$	$\{(19,1),(13,2),(17,2)\}$
	$\{(1,0),(5,0),(11,2)\}$	$\{(1,1),(5,1),(6,2)\}$

引理 **7**　对任意 $u\geqslant 4$,存在一个组型为 3^u 的 $(3,4)$ 单纯支架.

证明　当 $u\in\{4,7,10,19\}$ 时,根据定理 1,存在一个组型为 1^u 的 $(3,2)$ 单纯支架. 由引理 3可知,存在一个单纯的组型为 3^3 的 $(3,2)$-RGDD. 运用构造 2,可得一个组型为 3^u 的 $(3,4)$ 单纯支架. 由引理 5和 6得,对任意 $u\in\{5,6,8,9,11,12,14,15,18,23\}$,存在一个组型为 3^u 的 $(3,4)$ 单纯支架.

对其它任意的 u,根据引理 4,存在一个 $(u,\{4,5,6,7,8,9\})$-PBD. 令 $w=3$,运用构造 1可得一个组型为 3^u 的 $(3,4)$ 单纯支架. 从而便得引理.

引理 **8**　对任意 $u\geqslant 4$,存在一个组型为 6^u 的 $(3,4)$ 单纯支架.

证明　根据定理 1,对任意 $u\geqslant 4$,存在一个组型为 3^u 的 $(3,2)$ 单纯支架. 由引理 1可知,存在一个单纯的组型为 2^3 的 $(3,2)$-RGDD. 运用构造 2,可得一个组型为 6^u 的 $(3,4)$ 单纯支架.

引理 **9**　对任意 $t>1$, $u\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ 且 $u\geqslant 4$,存在一个组型为 t^u 的 $(3,4)$ 单纯支架.

证明　由定理 1可知,对任意 $u\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ 且 $u\geqslant 4$,存在一个组型为 1^u 的 $(3,2)$ 单纯支架. 根据引理 3,对任意 $t>1$,存在一个单纯的组型为 t^3 的 $(3,2)$-RGDD. 运用构造 2,可得一个组型为 t^u 的 $(3,4)$ 单纯支架.

引理 **10**　存在一个组型为 1^7 的 $(3,4)$ 单纯支架.

证明　设点集为 Z_7,组为 $G_i=\{i\}$, $i\in Z_7$. 所需的 14个带洞平行类如下所示.

1 2 3	4 5 6	(0)	1 2 6	3 4 5	(0)
0 2 4	3 5 6	(1)	0 5 6	2 3 4	(1)
0 1 5	3 4 6	(2)	0 4 5	1 3 6	(2)
0 1 4	2 5 6	(3)	0 2 5	1 4 6	(3)
0 1 6	2 3 5	(4)	0 2 6	1 3 5	(4)
0 1 3	2 4 6	(5)	0 3 6	1 2 4	(5)
0 2 3	1 4 5	(6)	0 3 4	1 2 5	(6)

引理 **11**　对任意 $u\in\{10,13,16,19,22,34\}$,存在一个组型为 1^u 的 $(3,4)$ 单纯支架.

证明　对每一个 u,设点集为 Z_u,组为 $G_i=\{i\}$, $i\in Z_u$. 所需单纯支架的 $2u$ 个带洞平行类可由 2个以 G_0 为洞的初始带洞平行类 F_0 和 F_1 通过 $+1(\mathrm{mod}\,u)$ 得到,以下是 F_0 和 F_1 中的区组.

$u=10$,	F_0:	1 2 4	3 7 8	5 6 9		
	F_1:	1 4 6	2 8 9	3 5 7		
$u=13$,	F_0:	1 2 3	4 5 8	6 10 11	7 9 12	
	F_1:	1 3 8	2 6 9	4 7 11	5 10 12	
$u=16$,	F_0:	1 2 3	4 8 14	5 9 12	6 11 13	7 10 15
	F_1:	1 2 4	3 7 11	5 10 12	6 9 15	8 13 14

$u=19$, F_0:	1 2 3	4 6 12	5 10 15	7 11 18	8 14 17	9 13 16	
F_1:	1 2 6	3 14 15	4 7 10	5 11 13	8 12 17	9 16 18	
$u=22$, F_0:	1 2 3	4 6 11	5 12 16	7 15 20	8 14 17	9 13 19	10 18 21
F_1:	1 2 4	3 6 12	5 16 18	7 11 19	8 13 20	9 14 15	10 17 21
$u=34$, F_0:	1 2 5	3 4 27	6 9 25	7 10 24	8 13 18	11 20 32	12 19 31
	14 21 23	15 16 29	17 26 33	22 28 30			
F_1:	1 2 22	3 6 11	4 8 30	5 16 31	7 13 18	9 19 29	10 17 26
	12 24 28	14 20 33	15 21 32	23 25 27			

引理 **12**　存在一个组型为 1^{25} 的 $(3, 4)$ 单纯支架.

证明　由引理 8, 存在一个组型为 6^4 的 $(3, 4)$ 单纯支架. 在构造 3中取 $\varepsilon=1$, 可得一个组型为 1^{25} 的 $(3, 4)$ 单纯支架, 其中输入设计为一个组型为 1^7 的 $(3, 4)$ 单纯支架, 它来自引理 10.

引理 **13**　对任意 $u\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ 且 $u\geqslant 7$, 存在一个组型为 1^u 的 $(3, 4)$ 单纯支架.

证明　令 $u=3v+1$, $v\geqslant 2$. 结合引理 10, 11和 12可得, 对任意 $v\in[2, 8]\cup\{11\}$, 存在一个组型为 1^{3v+1} 的 $(3, 4)$ 单纯支架.

当 $v\in\{10, 14, 18, 22\}$ 时, 令 $t=v/2$, 由引理 8可知, 存在一个组型为 6^t 的 $(3, 4)$ 单纯支架. 进而在构造 3中取 $\varepsilon=1$, 则可得一个组型为 1^{3v+1} 的 $(3, 4)$ 单纯支架.

当 $v\in\{9, 13, 17\}$ 时, 令 $t=(3v+1)/4$, 由引理 9可知, 存在一个组型为 t^4 的 $(3, 4)$ 单纯支架. 令 $\varepsilon=0$, 运用构造 3, 则可得一个组型为 1^{3v+1} 的 $(3, 4)$ 单纯支架.

对其它任意的 v, 存在一个 $(v+1, \{4, 5, 6, 7, 8, 9\})$-PBD. 在这个 PBD的点集中删除一点并把这一点所在的区组看成组, 其余的区组看成区组, 可得一个组大小属于 $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 的 $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$-GDD. 运用构造 1, 其中 $w=3$, 可得一个组大小属于 $\{9, 12, 15, 18, 21, 24\}$ 的 $(3, 4)$ 单纯支架, 其中输入设计为组型为 3^h $(4\leqslant h\leqslant 9)$ 的 $(3, 4)$ 单纯支架, 它们来自引理 7. 进而, 令 $\varepsilon=1$, 运用构造 3, 可得一个组型为 1^{3v+1} 的 $(3, 4)$ 单纯支架. 由此即得引理.

定理 **2**的证明　我们按 t的取值分以下两种情形分别证明. (1) $t\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$. 此时, $u\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ 且 $u\geqslant 4$. 对任意 $t>1$, 根据引理 9, 存在一个组型为 t^u 的 $(3, 4)$ 单纯支架. 对 $t=1$, 由引理 13可知, 对任意 $u\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ 且 $u\geqslant 7$, 存在一个组型为 1^u 的 $(3, 4)$ 单纯支架. (2) $t\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$. 令 $t=3k$, $k\geqslant 1$. 对 $k=1$ 和任意 $u\geqslant 4$, 由引理 7可知, 存在一个组型为 3^u 的 $(3, 4)$ 单纯支架. 对任意 $k>1$. 根据定理 1, 对任意 $u\geqslant 4$, 存在一个组型为 3^u 的 $(3, 2)$ 单纯支架. 又由引理 3得, 存在一个单纯的组型为 k^3 的 $(3, 2)$-RGDD. 从而运用构造 2, 可以得到一个组型为 $(3k)^u$ 的 $(3, 4)$ 单纯支架. 故得定理.

[参考文献]

[1] Fang K, Ge G, Liu M, et al. Combinatorial constructions for optimal supersaturated designs[J]. Discrete Math, 2004, 279(1/3): 191-202.

[2] Fang K, Lu X, Tang Y, et al. Constructions of uniform designs by using resolvable packings and coverings[J]. Discrete Math, 2004, 274(1/3): 25-40.

[3] Cao H, Wu Y. Simple Kirkman frames with index 2 and 3[J]. Journal of Nanjing Normal University: Natural Science Edition, 2008, 31(1): 15-20.

[4] Shen H. Resolvable two-fold triple systems without repeated blocks[J]. Science Bulletin, 1988, 33(24): 1855-1857.

[5] Stinson D R. Frames for Kirkman triple systems[J]. Discrete Math, 1987, 65(3): 289-300.

[6] Furino S F, Miao Y, Yin J X. Frames and Resolvable Designs: Uses, Constructions and Existence[M]. Boca Raton: CRC Press, 1996.

[7] Assaf A, Hartman A. Resolvable group divisible designs with block size 3[J]. Discrete Math, 1989, 77(1/3): 5-20.

[8] Colbourn C J, Dinitz J H. CRC Handbook of Combinatorial Designs[M]. 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.

[责任编辑: 丁　蓉]