在 ARFIMA模型中使用小波的另一种极大似然估计

邵 祥[1], 杜秀丽[2]

(1. 南京邮电大学通达学院, 江苏 南京 210003)
(2. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 用小波变换方法提出 ARFIMA(p, d, q)模型中分形差分参数 d的另一种极大似然估计 (MLE). 这种极大似然估计被证明是相合的和渐近正态的. 仿真结果显示这种极大似然估计偏差较小, 并且与 Tse的估计值相比较有更小的根均方误差 (RMSE), 该方法估计长记忆时间序列是有效的.

[关键词] ARFIMA模型, 离散小波变换 (DWT), 相合性, 渐近正态性

[中图分类号] O212 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)01-0016-06

Another Maximum Likelihood Estimator in an ARFIMA Model Using Wavelets

Shao Xiang[1], Du Xiuli[2]

(1. College of Tongda, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)
(2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract This paper presents another maximum likelihood estimator (MLE) of the fractional differencing parameter d in an ARFIMA(p, d, q) model using wavelets transform. The MLE is proved to be consist and asymptotic normal. The simulation results show this MLE has low bias and has lower root mean square error (RMSE) than the estimator of Tse. This method may be useful in estimating long-memory time series.

Key words ARFIMA model, discrete wavelet transform (DWT), consistency, asymptotic normality

2002年, Tse等对 ARFIMA族长记忆过程应用小波变换得出分数差分参数 d的近似极大似然估计. 他们选择使用小波变换是因为一列相关噪音过程的小波系数有一些好的性质: 首先, 在同一个水平内, 小波系数的分布是平稳的, 并且小波系数方差是齐次的; 第二, 在每一个水平内, 小波系数的自协方差函数会迅速地衰减; 第三, 不同水平间的小波系数的相关性非常小甚至没有; 第四, 小波系数的对数方差会随着水平的增加而近似线性地减少.

根据文献[1], 使用紧支撑小波的时间序列的小波系数对固定的水平是平稳的和自相似的. 若 $|d|<0.5$, 任何正整数 M 可以保证小波系数的自协方差函数在各水平内和各水平之间呈负指数地衰减, 其中 M 是消失矩[2]的阶数. 文献[2]证明了小波极大似然估计是相合的和渐近正态的.

本文基于小波系数得到了 ARFIMA(p, d, q)模型中分形差分参数 d的另一种近似极大似然估计. Tse[3]假设小波系数在每一个水平内和水平之间是独立的. 我们考虑到实际的情形, 为了进一步减小估计误差, 假设在每一个水平内, 小波系数是平稳的并且其自协方差函数呈指数地衰减; 在不同的水平间, 小波系数是独立的.

1 ARFIMA过程、离散小波变换(DWT)及其性质

1.1 ARFIMA过程

令$\{Y_t\}$是 ARFIMA(p, d, q)过程, 满足

收稿日期: 2009-06-12
通讯联系人: 邵 祥, 助教, 研究方向: 时间序列分析. E-mail: tdshxt@njupt.edu.cn

$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B)\varepsilon_t,$$

其中

$$\phi(B) = 1-\phi_1 B-\cdots-\phi_p B^p,$$
$$\theta(B) = 1-\theta_1 B-\cdots-\theta_q B^q$$

分别是阶数为 p 和 q 的多项式, 它们的根落在单位圆外, $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, B 是滞后算子, 即 $B^j Y_t = Y_{t-j}$, $j\in \mathbf{Z}$. $|d|< 0.5$, $(1-B)^d$ 是分形差分算子, 它由以下二项展开式定义

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{d}{k}(-1)^k B^k,$$

其中

$$\binom{d}{k} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)},$$

而 $\Gamma(x)$ 是 gamma函数.

当 $|d|< 0.5$时, 过程 $\{Y_t\}$ 是平稳的和均方收敛的. 对较大的滞后, $\{Y_t\}$ 有自协方差函数

$$\gamma(s) = E[Y_t Y_{t+s}] \sim C(d, \phi, \theta)|s|^{2d-1},\ s\to\infty,$$

这里

$$C(d, \phi, \theta) = 2^{1+d}\frac{\sigma_\varepsilon^2|\theta(1)|^2}{\pi|\phi(1)|^2}\Gamma(1-2d)\sin(\pi d),$$

它表明当 $d>0$时 $\gamma(s)$ 是不可加的[4-6].

1.2　离散小波变换 (DWT)

设 $\psi(t)$ 是一个母小波, 它满足条件 (1) $\int\psi(t)\mathrm{d}t = 0$, (2) $\int\psi^2(t)\mathrm{d}t = 1$.

若

$$\int t^r\psi(t)\mathrm{d}t = 0,\ r = 0, 1, \cdots, M-1,$$

则 ψ 被称为有 M 阶消失矩.

定义伸缩和平移小波为

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\psi(2^m t-n),$$

其中 m 与 n 是 $Z = \{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 中的元素.

令 $\{x(t, \omega)\}$ 是一个均方收敛的随机过程, 它在概率空间 (Ω, F, P) 上联合可测, 这里 $t\in\mathbf{R}$且 $\omega\in\Omega$. $x(t)$ 的离散小波变换定义为:

$$\langle x, \psi_{m,n}\rangle = \int x(t)\psi_{m,n}(t)\mathrm{d}t,\ m, n\in\mathbf{Z}, \omega\in\Omega.$$

尺度系数 $<x, \phi_{m,n}>$ 以类似的方式定义.

现在设 $\psi(t)$ 为 Daubechies小波:

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{2M-1} g_k\phi(2t-k),$$

其中 ϕ是一个函数, 它使得 $\{\phi(t-n): n\in\mathbf{Z}\}$形成了长度为 1的分段常数函数的正交基. $\{g_k\}_{k=0}^{2M-1}$是一个充分大的非零序列, $\mathrm{supp}\psi = [-(M-1), M]$.

令 $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_N)'$是观测值的一个 N 维向量, 由于离散小波变换适用于观测值等于 2的整数幂的样本空间, 我们假设 $N = 2^J$对某个正整数 J成立. 若对 $\boldsymbol{Y}$应用 DWT, 我们可以得到小波系数的向量, 它定义为 $\boldsymbol{d} = (c_0, d_0, \cdots, \boldsymbol{d}'_{J-2}, \boldsymbol{d}'_{J-1})'$, 其中 c_0和 d_0是标量, 代表小波系数最低水平的光滑部分和细节部分, $\boldsymbol{d}_j = \{d_{jk}, k = 1, 2, \cdots, 2^j\}$是一个 2^j维向量, $j = 0, \cdots, J-1$. 因此, 在第 j个水平, 共有 2^j个小波系数.

1.3　DWT和 $ARFIMA$过程的统计性质

假设 $\{Y_t, t = 1, 2, \cdots, N\}$是一个 ARFIMA过程, 由于 DWT的线性关系, 这个过程的小波系数是呈高斯分布的. 根据文献[1], 我们知道 ARFIMA过程的小波系数在每一个水平内是平稳的和自相似的, 而在水

平之间是平稳的.小波系数的二阶矩当小波是紧支撑时,无论是在水平内还是在水平之间都几乎是不相关的,它的自协方差函数在水平内和水平间都呈现像ARMA过程一样的指数衰减.

令 $\gamma_{<y,\psi>}(m, j; n, k) = E[\langle y, \psi_{m,n}\rangle\langle y, \psi_{j,k}\rangle]$ 代表小波变换的自协方差函数,则有:

引理1　对任何 $n, k \in \mathbf{Z}$,当 $|m-j| \to \infty$,或者对任何 $m, j \in \mathbf{Z}$,当 $|n-k| \to \infty$,均值 μ 未知,$|d| < 0.5$ 的ARFIMA过程,它标准化的小波系数 $2^{m\left(d+\frac{1}{2}\right)}\langle y_t, \psi_{m,n}\rangle$.

(1) 对任何的水平 m 是自相似的和平稳的时间序列,即对任何水平 m,自协方差函数 $\gamma_{\langle y,\psi\rangle}(m, m; n, k)$ 是时间间隔 $k-n$ 的惟一函数.

(2) 水平序列是平稳的,即对任何时间 n 和 k,自协方差函数 $\gamma_{<y,\psi>}(m, j; n, k)$ 是 $m-j$ 的惟一函数.

引理2　若 $\psi(t)$ 有 $M \geqslant 1$ 阶消失矩,其支撑为 $[-K_1, K_2]$,这里 $K_1 \geqslant 0$ 且 $K_2 > 0$,$\{y_t\}$ 是一个ARFIMA过程,均值 μ 未知,$|d| < 0.5$,则对水平 $m \geqslant j$ 和 $m-j \to \infty$,或者 $|n-k| \to \infty$,自协方差函数 $\gamma_{\langle y,\psi\rangle}(m, j; n, k)$ 对所有的 k 和 n,以 $\vartheta(|2^{-j}k - 2^{-m}n|^{2(d-M)-1})$ 的速度衰减,这里 $|2^{-j}k - 2^{-m}n| > \max(2^{-j}K_1 + 2^{-m}K_2, 2^{-m}K_1 + 2^{-j}K_2)$.

证明见[1].

若 $|d| < 0.5$,任何正数 M 可以保证 $\gamma_{\langle x,\psi\rangle}(m, j; n, k)$ 会在水平内和水平间呈指数的衰减.仅仅当 $d \geqslant 0.5$,ψ 的消失矩的数字 M 会对 $\gamma_{<\langle x,\psi\rangle}$ 的衰减有重要影响.

2　近似极大似然估计和渐近性质

2.1　近似极大似然估计

根据[3]的讨论,考虑向量 $\boldsymbol{d} = (c_0, d_0, \cdots, \boldsymbol{d}'_{J-2}, \boldsymbol{d}'_{J-1})'$,其中 $\boldsymbol{d}_j = \{d_{jk}, k = 1, 2, \cdots, 2^j\}$ 是一个 2^j 维向量,$j = 0, \cdots, J-1$.我们假设在不同的水平之间小波系数是独立的,即对 $i \neq j$,d_{ik} 与 d_{jk} 是独立的.而在每一个水平内,根据[1],我们假设 $d_{j1}, \cdots, d_{j2^j}$ 是平稳的.

令

$$\gamma_{jt} = \mathrm{cov}(d_{jk}, d_{j,k+t}),\ \gamma_{j0} = \sigma_j^2,\ \gamma_{jt} = \rho^t\sigma_j^2,$$

其中 ρ 是一个常数,$0 < \rho < 1$.我们仍然采用[7]的讨论,对充分小的 j,$\log(\sigma_j^2)$ 关于 j 是近似线性的,而且对足够小的 j,我们有

$$\sigma_j^2 \approx 2^{2(J-j)d}\sigma^2,$$

其中 σ^2 依赖于模型的其他参数不会随着 j 而变化.忽略掉 c_0 和 $j > J-K$ 的小波系数,$\boldsymbol{D} = (d_0, \cdots, \boldsymbol{d}'_{J-K})'$ 的近似似然函数为(忽略了一些常数):

$$L(\sigma^2, d) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{D}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{D}\right\},$$

其中

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{I}_{J-K} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{I}_i = \begin{pmatrix} \gamma_{i,0} & \gamma_{i1} & \cdots & \gamma_{i,2^i-1} \\ \gamma_{i,1} & \gamma_{i0} & \cdots & \gamma_{i,2^i-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{i2^i-1} & \gamma_{i2^i-2} & \cdots & \gamma_{i0} \end{pmatrix} = \sigma_i^2\begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{2^i-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{2^i-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho^{2^i-1} & \rho^{2^i-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \triangleq \sigma_i^2\boldsymbol{I}^*_{2^i},$$

因此

$$|\Sigma| = |\boldsymbol{I}_0||\boldsymbol{I}_1|\cdots|\boldsymbol{I}_{J-K}|,$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_0^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Gamma}_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{J-K}^{-1} \end{pmatrix}.$$

引理 **3**　对

$$\boldsymbol{\Gamma}_n^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \ n = 2, 3, \cdots$$

$$|\boldsymbol{\Gamma}_n^*| = (1-\rho^2)^{n-1},$$

且

$$(\boldsymbol{\Gamma}_n^*)^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{pmatrix}.$$

证明　直接计算可得结果.

定理 **1**　在前面的条件下, 我们有

$$\hat{d} = \arg\max(l_1(d))\ (|d| < 0.5),$$

其中

$$l_1(d) = -\frac{1}{2}\left[d\sum_{j=0}^{J-K} 2(J-j)2^j\log(2) + \sum_{j=0}^{J-K}\frac{1}{2^{2(J-j)d}}d_j'(\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*)^{-1}d_j\right]. \tag{1}$$

证明　对数似然函数为:

$$l(\sigma^2, d) = -\frac{1}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2}D'\Sigma^{-1}D = -\frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{J-K}\log|\boldsymbol{\Gamma}_j| + \sum_{j=0}^{J-K}d'_j\boldsymbol{\Gamma}_j^{-1}d_j\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J-K}[\log|\sigma_j^2\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*| + d'_j\{\sigma_j^2\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*\}^{-1}d_j] = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J-K}\left[2^j\log\sigma_j^2 + \log|\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*| + \frac{1}{\sigma_j^2}d'_j(\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*)^{-1}d_j\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J-K}\left[2^j\log(2^{2(J-j)d}\sigma^2) + \log|\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*| + \frac{1}{2^{2(J-j)d}\sigma^2}d'_j(\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*)^{-1}d_j\right]. \tag{2}$$

通过关于 d 和 σ^2 极大化 $l(\sigma^2, d)$, 可得到 d 和 σ^2 的近似极大似然估计, 因而有

$$\sigma^2(d) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{J-K}2^j}\sum_{j=0}^{J-K}\frac{1}{2^{2(J-j)d}}d'_j(\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*)^{-1}d_j. \tag{3}$$

从而

$$l(\sigma^2(d), d) = -\frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{J-K}2(J-j)2^j\log(2)d + \sum_{j=0}^{J-K}\frac{1}{2^{2(J-j)d}}d'_j(\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*)^{-1}d_j + \sum_{j=0}^{J-K}\log|\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*| + \sum_{j=0}^{J-K}2^j\right] \propto$$

$$-\frac{1}{2}\left[d\sum_{j=0}^{J-K}2(J-j)2^j\log(2) + \sum_{j=0}^{J-K}\frac{1}{2^{2(J-j)d}}d'_j(\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*)^{-1}d_j\right] \triangleq l_1(d).$$

此似然函数有惟一的参数 d, 因此我们很容易得到

$$\hat{d} = \arg\max(l_1(d))\ (|d| < 0.5).$$

2.2　极大似然估计的渐近性质

记号:

$$\Theta_L = \{(d, \sigma^2): d < L+1, \sigma^2 > 0\}, R_j = d'_j(\boldsymbol{\Gamma}_{2^j}^*)^{-1}d_j,$$

$$A_j(\theta) = \frac{R_j}{2^{2(J-j)d}\sigma^2},\quad \gamma_j(\theta, \theta_0) = \frac{2^{2(J-j)d_0}\sigma_0^2}{2^{2(J-j)d}\sigma^2},$$

则我们有

$$A_j(\theta) = A_j(\theta_0)\gamma_j(\theta, \theta_0).$$

定理 2 (极大似然估计的存在性和相合性)假定 $\hat{\theta}_N$, $\theta_0 \in \Theta_L$, 则似然方程以概率 1的存在解 $\hat{\theta}_N$, 而且当 $N \to \infty$时, $\hat{\theta}_N \xrightarrow{P} \theta_0$.

证明参见[8, 9].

定理 3 (联合渐近正态性)

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \Gamma^{-1}(\theta_0)),$$

其中

$$\Gamma(\theta) \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{J-K} 2^{-(J-j)}(2(J-j)\log 2)^2, & \sigma^{-2}\sum_{j=0}^{J-K} 2^{-(J-j)} 2(J-j)\log 2 \\ \sigma^{-2}\sum_{j=0}^{J-K} 2^{-(J-j)} 2(J-j)\log 2, & \frac{1}{(\sigma^2)^2} \end{pmatrix}.$$

证明参见[2, 9].

定理 4 ($\hat{d}_N$ 的边际渐近正态性)

$$\sqrt{N}(\hat{d}_N - d_0) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{d0}^2),$$

其中 $\sigma_{d0}^2 = T'\Gamma^{-1}(\theta_0)T$, $T = (1, 0)'$.

3 仿真

我们首先通过截断滑动平均产生一个 FD(d)过程: 令 Z_t 表示高斯白噪音, X_t 为一个 FD(d)过程, 则有 $X_t(d) = \sum_{j=0}^{T}\psi_j Z_{t-j}$, 其中 $\psi_j(d) = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)}$, $j = 0, 1, 2, \cdots$, 而 $\Gamma(x)$是一个 $\Gamma(\cdot)$函数.

仿真过程主要采用了 MATLAB软件进行编程、计算.

为了与[3]的结论相比较, 我们仍然首先从一个$(p, q) = (0, 0)$的 ARFIMA(p, d, q)过程产生$\{Y_t\}$, N分别取为 1 024和 2 048(即 J分别等于 10和 11). 舍去高阶解的小波系数, 令 $k = 2, 3, 4$ 则 d的近似极大似然估计可分别记为 $W(2)$, $W(3)$, $W(4)$. 我们给出了每一个估计的偏度和根均方误差(RMSE), 所有的小波都是 haar小波.

对 $d = 0.3$, 截断数 T可以取为 500 对产生的 FD(0.3)的 X_t结果, 它的自协方差函数呈双曲性的衰减; 然后, 对数据应用离散小波变换; 根据小波系数, 我们能够估计出 ρ的值, $d = 0.3$时, $\rho \approx 0.64$; 这样便可以从似然方程中得出 d的估计值; 最后, 我们先取 1 024个数据, 重复上述过程 1 000次, 再取 2 048个数据, 同样重复该过程 1 000次. 于是, 我们得到表 1.

由表 1可以看出, 我们的结果中 $W(2)$ 的偏度较 Tse的结果小, $W(3)$、$W(4)$ 的偏度稍大, 所有的 RMSE均比 Tse的结果明显地小, 这可以说明当小波系数较多时, 我们的方法确能产生较好的结果.

表 1 ARFIMA(0, 0.3, 0)模型极大似然估计的仿真结果

Table 1 Simulation results of the MLE for ARFIMA(0, 0.3, 0) model

估计方法		样本大小			
		1 024		2 048	
		本文结果	Tse的结果	本文结果	Tse的结果
$W(2)$	偏度	0.000 75	−0.010 8	0.003 5	−0.010 4
	RMSE	0.017 2	0.034 9	0.012 4	0.026 6
$W(3)$	偏度	−0.005 96	−0.002 7	−0.002 5	−0.002 3
	RMSE	0.019 2	0.047 0	0.013 7	0.033 2
$W(4)$	偏度	−0.009 6	−0.003 5	−0.006 1	0.001 7
	RMSE	0.022 8	0.072 2	0.016 0	0.051 0

表 2 ARFIMA(0, 0.4, 0)模型极大似然估计的仿真结果

Table 2 Simulation results of the MLE for ARFIMA(0, 0.4, 0) model

估计方法		样本大小			
		1 024		2 048	
		本文结果	Tse的结果	本文结果	Tse的结果
$W(2)$	偏度	0.012 8	−0.011 8	0.016 8	−0.009 0
	RMSE	0.009	0.037 9	0.012 5	0.026 1
$W(3)$	偏度	0.001 7	−0.001 5	0.006 6	0.001 7
	RMSE	0.010 5	0.054 8	0.014 0	0.036 1
$W(4)$	偏度	0.013 9	−0.005 3	0.001 9	0.004 0
	RMSE	0.010 6	0.079 5	0.016 3	0.051 1

其次产生一个 FD(0.4)过程: 对 $d = 0.4$, 截断数 T可以取为 900,经过计算, 对 $d = 0.4$, ρ • 0.73,通过同样的方式得到表 2.

再产生一个 FD(0.1)过程: 对 $d = 0.1$, 截断数 T可以取为 500,对 $d = 0.1$, ρ • 0.38,通过同样的方式得到表 3.

最后生成一个 ARFIMA(0, 0.4, 1)过程 $\{Y_t\}$, N 取为 2048(即 J 等于 11). 类似地, 我们得到表 4.

表 3　ARFIMA(0, 0.1, 0)模型极大似然估计的仿真结果

Table 3　Simulation results of the MLE for ARFIMA(0, 0.1, 0) model

估计方法		样本大小			
		1024		2048	
		本文结果	Tse的结果	本文结果	Tse的结果
$W(2)$	偏度	−0.0048	−0.0069	−0.0035	−0.0047
	RMSE	0.01545	0.0339	0.0110	0.0249
$W(3)$	偏度	−0.0066	−0.0063	−0.0053	−0.0035
	RMSE	0.0177	0.0484	0.0122	0.0336
$W(4)$	偏度	−0.0086	−0.0125	−0.0068	−0.0058
	RMSE	0.0206	0.0732	0.01405	0.0513

表 4　ARFIMA(0, 0.4, 1)模型极大似然估计的仿真结果

Table 4　Simulation results of the MLE for ARFIMA(0, 0.4, 1) model

d	θ	估计方法		样本大小 2048	
				本文结果	Tse的结果
0.4	0.2	$W(2)$	偏度	−0.0465	−0.0674
			RMSE	0.0192	0.0724
		$W(3)$	偏度	−0.0557	−0.0216
			RMSE	0.0137	0.0420
		$W(4)$	偏度	0.1448	−0.0024
			RMSE	0.0164	0.0539
	0.4	$W(2)$	偏度	−0.1122	−0.1537
			RMSE	0.0124	0.1563
		$W(3)$	偏度	−0.1294	−0.0640
			RMSE	0.0142	0.0741
		$W(4)$	偏度	−0.1250	−0.0187
			RMSE	0.0164	0.0543
	0.6	$W(2)$	偏度	−0.1745	−0.2774
			RMSE	0.0133	0.2792
		$W(3)$	偏度	−0.2132	−0.1565
			RMSE	0.0152	0.1612
		$W(4)$	偏度	−0.4133	−0.0619
			RMSE	0.0180	0.0827

由表 4可以看出, 我们结果中 $W(2)$ 的偏度仍然明显比 Tse的结果小, $W(3)$、$W(4)$ 的偏度稍大, 所有的 RMSE 均比 Tse的结果明显地小. 这说明 ARFIMA(0, d, 1)过程中当小波系数较多时, 我们的方法确能产生较好的结果.

4　结论

本文利用离散小波变换得到了 ARFIMA 模型中分形差分参数 d的另外一种极大似然估计 (MLE), 给出了 ARFIMA 模型及这种估计的一些性质. 它与 [3]的区别在于我们假设小波系数在各水平间独立, 而在水平内是平稳的, 且其自协方差函数呈指数地衰减; [3]假设小波系数在水平内和水平间均独立. 仿真结果显示这种极大似然估计 (MLE)具有良好的结果, 并且比 [3]提出的估计量有更小的根均方误差.

[参考文献]

[1] Mark J Jensen. An alternative maximum likelihood estimator of long-memory processes using compactly supported wavelets [J]. Journal of Economic Dynamics Control, 2000, 24(3): 361-387.

[2] Peter F Craigmile, Peter Guttorp, Donald B Percival. Wavelet-based parameter estimation for polynomial contaminated fractionally differenced processes[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8): 3151-3161.

[3] Tse Y K, Anh V V, Tieng Q. Maximum likelihood estimation of the fractional differencing parameter in an ARFIMA model using wavelets[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2002, 59(1/3): 153-161.

[4] Hosking J R M. Fractional differencing[J]. Biometrika, 1981, 68(1): 165-176.

[5] Brockwell P, Davis R. Time Series Theory and Methods[M]. 2nd ed. New York: Springer, 1991.

[6] Baillie R T. Long-memory processes and fractional integration in econometrics[J]. Journal of Econometrics, 1996, 73(1): 5-59.

[7] McCoy E J, Walden A T. Wavelet analysis and synthesis of stationary long-memory processes[J]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 1996, 5(1): 26-56.

[8] Lehmann E L. Theory of Point Estimation[M]. New York: Wiley, 1983.

[9] Donald B Percival, Andrew T Walden. Wavelet Methods for Time Series Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[责任编辑: 丁　蓉]