# 关于亚纯函数及其导函数弱权分担小函数的惟一性

吴凤芹, 徐 焱

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 本文研究了亚纯函数及其导数弱权分担小函数的惟一性问题, 推广和改进了 Liu L P和 Gu Y X, Zhang J L和 Yang L Z, 以及 Lin S H 和 Lin W C等人的相关结果.

[关键词] 亚纯函数, 弱权分担, 惟一性

[中图分类号] O174. 52 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)01-0032-08

## Uniqueness of Meromorphic Functions Weakly Weighted-Sharing One Small Function With Their Derivatives

Wu Fengqin, Xu Yan

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

**Abstract** In this paper, we study the uniqueness problems of meromorphic functions that weakly weighted-sharing a small function with their derivatives, and give some results which generalize and improve the related results due to Liu L P-Gu Y X, Zhang J L-Yang L Z, and Lin S H-Lin W C, etc.

**Key words** meromorphic function, weakly weighted-sharing, uniqueness

## 1 主要结果

设 $f(z)$ 是开平面上的非常数的亚纯函数, 我们将使用 Nevanlinna值分布论中的一些标准记号 (可参考 [1, 2]), 如 $T(r, f)$, $m(r, f)$, $N(r, f)$, $S(r, f)$, …, 这里 $S(r, f) = o(T(r, f))$, $r\to\infty$ 可能除去一个集合 $E$. $E$ 为具有有穷线性测度的实数集, 每次出现不必相同. 对任意一个常数 $a$, 我们定义

$$\Theta(a, f) = 1 - \limsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}.$$

设 $a$ 为一有限复数, $k$ 是一正整数. 我们记 $\overline{N}_{k)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $f-a$ 的零点重级 $\leqslant k$ 的精简密指量; $\overline{N}_{(k}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $f-a$的零点重级 $\geqslant k$的精简密指量; $N_p\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ 表示 $f-a$的零点的密指量, 这里设 $f-a$的零点重级为 $m$, 若 $m\leqslant p$, 则计 $m$ 次; 若 $m > p$, 则计 $p$ 次. 即

$$N_p\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}_{(2}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \cdots + \overline{N}_{(p}\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

我们定义

$$\delta_p(a, f) = 1 - \limsup_{r\to\infty}\frac{N_p\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)},$$

收稿日期: 2008-03-12
基金项目: 国家自然科学基金 (10871094).
通讯联系人: 吴凤芹, 硕士研究生, 研究方向: 复分析. E-mail: wufengqin0635@126.com

这里 $p$ 是一正整数. 类似可定义

$$N_p(r, f) = N(r, f) + N_{(2}(r, f) + \cdots + N_{(p}(r, f).$$

显然, 当 $q \geqslant p$ 时, 有 $\delta_p(a, f) \geqslant \delta_q(a, f) \geqslant \delta(a, p)$. 这里

$$\delta(a, f) = 1 - \limsup_{r \to \infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}.$$

设 $f$, $g$ 为两个非常数的亚纯函数, 若 $f-a$ 与 $g-a$ 有相同的零点且其重级也相同, 则称 $f$ 与 $g$ 分担 $a$CM; 若 $f-a$ 与 $g-a$ 有相同的零点 (不计重数), 则称 $f$ 与 $g$ 分担 $a$IM. 若 $f$ 与 $g$ 分担 1IM, 我们记 $N_L\left(r, \frac{1}{f-1}\right)$ 表示 $f-1$ 的零点重级大于 $g-1$ 的零点重级的精简密指量. 类似可定义 $N_L\left(r, \frac{1}{g-1}\right)$ 等.

设 $a$ 是一亚纯函数, 若 $a$ 满足 $T(r, a) = S(r, f)$, 则称 $a$ 是 $f$ 的小函数. 用 $S(f)$ 表示 $f$ 的所有小函数的集合. 设 $f$, $g$ 为两个非常数的亚纯函数, $a \in S(f)$. 我们用 $N_E(r, a)$ 表示 $f$ 与 $g$ 的同级公共 $a$ – 值点的密指量, $N_0(r, a)$ 表示 $f$ 与 $g$ 的公共 $a$ – 值点的密指量 (计重数); $N_E(r, a)$ 和 $N_0(r, a)$ 分别表示相应于 $N_E(r, a)$ 和 $N_0(r, a)$ 的精简密指量. 如果

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{g-a}\right) - 2N_E(r, a) = S(r, f) + S(r, g),$$

则称 $f$ 与 $g$ 分担 $a$"CM". 如果

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{g-a}\right) - 2N_0(r, a) = S(r, f) + S(r, g),$$

则称 $f$ 与 $g$ 分担 $a$"IM".

此外, 为叙述方便, 我们引入以下记号:

设 $f$, $g$ 为两个非常数的亚纯函数, $a \in S(f) \cap S(g)$, 且 $f$ 与 $g$ 分担 $a$"IM", $k$ 是一正整数或 $\infty$. 我们用 $N_{k)}^E(r, a)$ 表示 $f$ 与 $g$ 的同级公共 $a$ – 值点的精简密指量, 且其重级 $\leqslant k$; $N_{(k}^0(r, a)$ 表示 $f$ 与 $g$ 的公共 $a$ – 值点 的精简密指量, 且其重级 $\geqslant k$.

设 $f$, $g$ 为两个非常数的亚纯函数, $a \in S(f) \cap S(g)$. 若 $k$ 是一正整数或 $\infty$, 且

$$N_{k)}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) - N_{k)}^E(r, a) = S(r, f), N_{k)}\left(r, \frac{1}{g-a}\right) - N_{k)}^E(r, a) = S(r, g),$$

$$N_{(k+1}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) - N_{(k+1}^0(r, a) = S(r, f), N_{(k+1}\left(r, \frac{1}{g-a}\right) - N_{k)}^0(r, a) = S(r, g),$$

或若 $k = 0$, 且

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) - N^0(r, a) = S(r, f), N\left(r, \frac{1}{g-a}\right) - N^0(r, a) = S(r, g),$$

则称 $f$ 与 $g$ 弱权分担 $a$, 权数为 $k$, 记为 $f$ 与 $g$ 分担"$(a, k)$". 这些概念见文献 [3].

显然, 若 $f$ 与 $g$ 分担"$(a, k)$", 则对任意的 $p\ (0 \leqslant p \leqslant k)$, 都有 $f$ 与 $g$ 分担"$(a, p)$". 而且, 我们也可知 $f$ 与 $g$ 分担 $a$"IM"或"CM"分别等价于 $f$ 与 $g$ 分担"$(a, 0)$"或"$(a, \infty)$".

**注 1** 从本质上来说, 弱权分担与带权分担差别甚微. 尤其在惟一性理论中, 其结果是相同的.

在 2004年, Liu L P和 Gu Y X[4] 证明了

定理 A 设 $k \geqslant 1$, $f$ 为非常数的亚纯函数, $a \in S(f)$ 且满足 $a \not\equiv 0, \infty$. 若 $f$ 与 $f^{(k)}$ 分担 $a$CM, $f^{(k)}$ 与 $a$ 没有同级公共极点, 且 $2\delta(0, f) + 4\Theta(\infty, f) > 5$, 则 $f \equiv f^{(k)}$.

定理 B 设 $k \geqslant 1$, $f$ 为非常数的整函数, $a \in S(f)$ 且满足 $a \not\equiv 0, \infty$. 若 $f$ 与 $f^{(k)}$ 分担 $a$CM, 且 $\delta(0, f) > \frac{1}{2}$, 则 $f \equiv f^{(k)}$.

自然地要问: 如果将定理 A – B 中的 $f^{(k)}(z)$ 换为较一般的线性微分多项式 $L(f)$, 结论是否仍成立? 这里

$$L(f) = f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + a_0 f, \tag{1}$$

其中 $a_j(z)\ (j = 0, 1, \ldots, k-1)$ 是多项式.

在2007年, Zhang J L和Yang L Z[5]证明了

定理C　设$k\geqslant 1$, $f$为非常数的亚纯函数, $a\in S(f)$且满足$a\not\equiv 0,\infty$, $L(f)$如(1)定义. 若$f$与$L(f)$分担$a$IM, 且$5\delta(0,f)+(2k+6)\Theta(\infty,f)>2k+10$, 则$f\equiv L(f)$.

定理D　设$k\geqslant 1$, $f$为非常数的亚纯函数, $a\in S(f)$且满足$a\not\equiv 0,\infty$, $L(f)$如(1)定义. 若$f$与$L(f)$分担$a$CM, 且$2\delta(0,f)+3\Theta(\infty,f)>4$, 则$f\equiv L(f)$.

在2006年, Lin S H和Lin W C[3]从弱权分担的角度改进了定理A–B, 他们证明了

定理E　设$k\geqslant 1$, $2\leqslant m\leqslant\infty$, $f$为非常数的亚纯函数, $a\in S(f)$且满足$a\not\equiv 0,\infty$. 若$f$与$f^{(k)}$分担"$(a,m)$", 且$2\delta_{2+k}(0,f)+4\Theta(\infty,f)>5$, 则$f\equiv f^{(k)}$.

定理F　设$k\geqslant 1$, $f$为非常数的亚纯函数, $a\in S(f)$且满足$a\not\equiv 0,\infty$. 若$f$与$f^{(k)}$分担"$(a,1)$", 且$\frac{5}{2}\delta_{2+k}(0,f)+\frac{k+9}{2}\Theta(\infty,f)>\frac{k}{2}+6$, 则$f\equiv f^{(k)}$.

定理G　设$k\geqslant 1$, $f$为非常数的亚纯函数, $a\in S(f)$且满足$a\not\equiv 0,\infty$. 若$f$与$f^{(k)}$分担$a$"IM", 且$5\delta_{2+k}(0,f)+(2k+7)\Theta(\infty,f)>2k+11$, 则$f\equiv f^{(k)}$.

同样地, 我们可以考虑将定理E–G中的$f^{(k)}(z)$换为$L(f)$的情形. 基于这个想法, 我们证明了

**定理1**　设$k\geqslant 1$, $f$为非常数的亚纯函数, $a\in S(f)$且$a\not\equiv 0,\infty$, $L(f)$如(1)定义. 若$f$与$L(f)$分担"$(a,2)$", 且$\delta_2(0,f)+\delta_{2+k}(0,f)+3\Theta(\infty,f)>4$, 则$f\equiv L(f)$.

**定理2**　设$k\geqslant 1$, $f$为非常数的亚纯函数, $a\in S(f)$且$a\not\equiv 0,\infty$, $L(f)$如(1)定义. 若$f$与$L(f)$分担"$(a,1)$", 且$\delta_2(0,f)+\frac{3}{2}\delta_{2+k}(0,f)+\frac{k+7}{2}\Theta(\infty,f)>\frac{k}{2}+5$, 则$f\equiv L(f)$.

**定理3**　设$k\geqslant 1$, $f$为非常数的亚纯函数, $a\in S(f)$且$a\not\equiv 0,\infty$, $L(f)$如(1)定义. 若$f$与$L(f)$分担$a$"IM", 且$2\delta_2(0,f)+3\delta_{2+k}(0,f)+(2k+6)\Theta(\infty,f)>2k+10$, 则$f\equiv L(f)$.

很显然, 上述定理推广并改进了定理A–G的结果.

若$f$为非常数的整函数, 则$\Theta(\infty,f)=1$. 于是我们有以下结果:

**推论1**　设$k\geqslant 1$, $f$为非常数的整函数, $a\in S(f)$且$a\not\equiv 0,\infty$, $L(f)$如(1)定义. 若$f$与$L(f)$分担"$(a,2)$", 且$\delta_2(0,f)+\delta_{2+k}(0,f)>1$, 则$f\equiv L(f)$.

**推论2**　设$k\geqslant 1$, $f$为非常数的整函数, $a\in S(f)$且$a\not\equiv 0,\infty$, $L(f)$如(1)定义. 若$f$与$L(f)$分担"$(a,1)$", 且$\delta_2(0,f)+\frac{3}{2}\delta_{2+k}(0,f)>\frac{3}{2}$, 则$f\equiv L(f)$.

**推论3**　设$k\geqslant 1$, $f$为非常数的整函数, $a\in S(f)$且$a\not\equiv 0,\infty$, $L(f)$如(1)定义. 若$f$与$L(f)$分担$a$"IM", 且$2\delta_2(0,f)+3\delta_{2+k}(0,f)>4$, 则$f\equiv L(f)$.

## 2　主要引理

为了证明我们的定理, 需要以下一些引理.

**引理1**[6]　设$f$为非常数亚纯函数, $k$是一正整数. 则

(i) $N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\leqslant T(r,f^{(k)})-T(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)$,

(ii) $N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f}\right)+kN(r,f)+S(r,f)$.

**引理2**[5]　设$f$为超越亚纯函数, $L(f)$如(1)定义. 若$L(f)\not\equiv 0$, 则

(i) $N\left(r,\frac{1}{L}\right)\leqslant T(r,L)-T(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)$,

(ii) $N\left(r,\frac{1}{L}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f}\right)+kN(r,f)+S(r,f)$.

实质上, 若$f$为亚纯函数, 结论仍然成立.

**引理3**　设$f$为非常数亚纯函数, $k$是一正整数, $L(f)$如(1)定义. 若$L(f)\not\equiv 0$, 则

(i) $N_2\left(r,\frac{1}{L}\right)\leqslant T(r,L)-T(r,f)+N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)$,

(ii) $N_2\left(r,\dfrac{1}{L}\right)\leqslant N_{2+k}\left(r,\dfrac{1}{f}\right)+kN(r,f)+S(r,f)$.

证明 (i) 由引理 2(i), 有

$$N_2\left(r,\frac{1}{L}\right)+\sum_{p=3}^{\infty}N_{(p}\left(r,\frac{1}{L}\right)=N\left(r,\frac{1}{L}\right)\leqslant T(r,L)-T(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)=$$
$$T(r,L)-T(r,f)+N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\sum_{p=3+k}^{\infty}N_{(p}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f),$$

即

$$N_2\left(r,\frac{1}{L}\right)\leqslant T(r,L)-T(r,f)+N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\sum_{p=3+k}^{\infty}N_{(p}\left(r,\frac{1}{f}\right)-\sum_{p=3}^{\infty}N_{(p}\left(r,\frac{1}{L}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$T(r,L)-T(r,f)+N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f).$$

(ii) 由引理 2(ii), 同 (i) 可以证得.

## 3 定理的证明

定理 **1**的证明 令

$$F=\frac{L(f)}{a},\ G=\frac{f}{a}. \tag{2}$$

由定理 1的条件可知: $F$ 与 $G$分担“(1, 2)”. 由 (2) 有

$$N(r,F)=N(r,G)+S(r,f)=N(r,f)+S(r,f). \tag{3}$$

显然, $f$为超越亚纯函数, 则有 $T(r,a_j)=S(r,f),\ j=0,1,\dots,k-1$.

设

$$H=\frac{F''}{F'}-2\frac{F'}{F-1}-\frac{G''}{G'}+2\frac{G'}{G-1}, \tag{4}$$

假设$H\not\equiv 0$, 则有

$$N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{H}\right)+S(r,F)+S(r,G)\leqslant$$
$$T(r,H)+S(r,F)+S(r,G)=N(r,H)+S(r,F)+S(r,G). \tag{5}$$

由 (3) 和 (4), 有

$$N(r,H)\leqslant N(r,F)+N_{(2}\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_{(2}\left(r,\frac{1}{G}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+$$
$$N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)+S(r,F)+S(r,G).$$

这里$N_0\left(r,\dfrac{1}{F'}\right)$表示 $F'$的零点但非 $F(F-1)$ 的零点的密指量; $N_0\left(r,\dfrac{1}{G'}\right)$类似定义.

再结合 (5), 我们得到

$$N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N(r,F)+N_{(2}\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_{(2}\left(r,\frac{1}{G}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+$$
$$N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)+S(r,F)+S(r,G). \tag{6}$$

由 Nevanlinna第二基本定理, 得

$$T(r,F)\leqslant N(r,F)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)+S(r,F), \tag{7}$$

这里$N_0\left(r,\dfrac{1}{F'}\right)$同上定义.

因为 $F$ 与 $G$分担“(1, 2)”, 则有

$$N_{(2}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)+N\left(r,\frac{1}{G}\right)-N\left(r,\frac{1}{G}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{G'}\right).$$

再结合引理 1(ii), 有

$$N_{(2}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{G}\right)+N(r,G)+S(r,G), \tag{8}$$

注意到

$$N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)=N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_{(2}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)=N_{1)}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_{(2}\left(r,\frac{1}{G-1}\right), \tag{9}$$

结合(6)~(9), 并应用(3), 得

$$T(r,F)\leqslant 3\overline{N}(r,F)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+S(r,F)+S(r,G).$$

将(2)代入上式, 即

$$T(r,L)\leqslant 3\overline{N}(r,f)+N_2\left(r,\frac{1}{L}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f).$$

再应用引理 3(i), 得

$$T(r,f)\leqslant N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+3\overline{N}(r,f)+S(r,f),$$

从而有 $\delta_2(0,f)+\delta_{2+k}(0,f)+3\Theta(\infty,f)\leqslant 4$, 但这与定理 1的条件相矛盾.
因此, $H\equiv 0$, 即

$$\frac{F''}{F'}-2\frac{F'}{F-1}\equiv\frac{G''}{G'}-2\frac{G'}{G-1}.$$

积分两次可得:

$$\frac{1}{G-1}=\frac{A}{F-1}+B,$$

这里 $A(\neq 0)$、$B$ 为常数.
于是, 有

$$G=\frac{(B+1)F+(A-B-1)}{BF+(A-B)}, \tag{10}$$

且 $T(r,G)=T(r,F)+S(r,f)$.

现分三种情形讨论:

**情形 1**　假设 $B\neq -1, 0$.

若 $A-B-1=0$, 则由(10)有 $G=\dfrac{(B+1)F}{BF+1}$. 从而有 $\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{F+\frac{1}{B}}\right)=\overline{N}(r,G)$.

由 Nevanlinna第二基本定理, 得

$$T(r,F)\leqslant\overline{N}(r,F)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F+\frac{1}{B}}\right)+S(r,F),$$

即 $T(r,L)\leqslant 2\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{L}\right)+S(r,f)\leqslant 2\overline{N}(r,f)+N_2\left(r,\dfrac{1}{L}\right)+S(r,f)$.

再由引理 3(i), 得

$$T(r,f)\leqslant N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+2\overline{N}(r,f)+S(r,f),$$

从而有 $\delta_{2+k}(0,f)+2\Theta(\infty,f)\leqslant 2$, 但这与定理 1的条件相矛盾.

若 $A-B-1\neq 0$, 则由(10)有 $\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{F+\frac{A-B-1}{B+1}}\right)=\overline{N}\left(r,\dfrac{1}{G}\right)$.

由 Nevanlinna第二基本定理, 得

$$T(r,F)\leqslant\overline{N}(r,F)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F+\frac{A-B-1}{B+1}}\right)+S(r,F),$$

即 $T(r,L)\leqslant N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{L}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)\leqslant N(r,f)+N_2\left(r,\frac{1}{L}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)$.
再由引理 3(i), 得

$$T(r,f)\leqslant N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(r,f)+S(r,f),$$

从而有 $\delta_2(0,f)+\delta_{2+k}(0,f)+\Theta(\infty,f)\leqslant 2$, 但这与定理 1的条件相矛盾.

**情形 2** 假设 $B=-1$. 则由 (10) 有

$$G=\frac{-A}{F-(A-1)}. \tag{11}$$

若 $A+1=0$, 则 $FG\equiv 1$, 即

$$f\cdot L(f)\equiv a^2. \tag{12}$$

由 (12) 有

$$N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)=S(r,f).$$

从而

$$T\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=N\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+S(r,f)\leqslant N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+kN(r,f)+S(r,f)=S(r,f).$$

于是, 可得 $T\left(r,\frac{L}{f}\right)=S(r,f)$. 因此,

$$2T\left(r,\frac{f}{a}\right)=T\left(r,\frac{f^2}{a^2}\right)=T\left(r,\frac{a^2}{f^2}\right)+O(1)=T\left(r,\frac{L}{f}\right)+O(1)=S(r,f),$$

则 $T(r,f)=S(r,f)$, 但这与 $f$ 为超越亚纯函数矛盾.

若 $A+1\neq 0$, 则由 (11) 有 $N\left(r,\frac{1}{F-(A-1)}\right)=N(r,G)$. 下同情形 1中前者可得矛盾.

**情形 3** 假设 $B=0$. 则由 (10) 有

$$G=\frac{F+(A-1)}{A}. \tag{13}$$

若 $A-1=0$, 则由 (13) 有 $F\equiv G$, 即 $f\equiv L(f)$.

若 $A-1\neq 0$, 则由 (13) 有 $N\left(r,\frac{1}{F+(A-1)}\right)=N\left(r,\frac{1}{G}\right)$. 下同情形 1中后者可得矛盾.

综上所述, 定理 1得证.

**定理 2的证明** 令 $F$、$G$ 如 (2) 定义. 由定理 2的条件知: $F$ 与 $G$ 分担“(1, 1)”.

同定理 1中 (8) 类似可得

$$N_{(2}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{G}\right)+N(r,G)+S(r,G). \tag{14}$$

结合 (3), (6), (7), (9), (14), 有

$$T(r,F)\leqslant 3N(r,F)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+S(r,F)+S(r,G). \tag{15}$$

因

$$N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant\frac{1}{2}N\left(r,\frac{F}{F'}\right)\leqslant\frac{1}{2}T\left(r,\frac{F'}{F}\right)+O(1)=\frac{1}{2}N\left(r,\frac{F'}{F}\right)+S(r,F)\leqslant$$
$$\frac{1}{2}N(r,F)+\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{F}\right)+S(r,F)\leqslant\frac{1}{2}N(r,f)+\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{L}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$\frac{1}{2}N(r,f)+\frac{1}{2}N_2\left(r,\frac{1}{L}\right)+S(r,f),$$

再结合 (2)、(15), 并应用引理 3, 得

$$T(r,L)\leqslant 3N(r,f)+N_2\left(r,\frac{1}{L}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{2}N(r,f)+\frac{1}{2}N_2\left(r,\frac{1}{L}\right)+S(r,f)\leqslant$$

$$3N(r,f)+T(r,L)-T(r,f)+N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_{2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{2}N(r,f)+\frac{1}{2}N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+$$

$$\frac{k}{2}N(r,f)+S(r,f)=\frac{k+7}{2}N(r,f)+T(r,L)-T(r,f)+\frac{3}{2}N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_{2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f),$$

即

$$T(r,f)\leqslant N_{2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{3}{2}N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{k+7}{2}N(r,f)+S(r,f).$$

从而有 $\delta_{2}(0,f)+\frac{3}{2}\delta_{2+k}(0,f)+\frac{k+7}{2}\Theta(\infty,f)\leqslant\frac{k}{2}+5$,但这与定理2的条件相矛盾.

因此,$H\equiv0$.下同定理1的证明类似,从而定理2得证.

**定理3的证明**　令$F$、$G$如(2)定义.由定理3的条件知:$F$与$G$分担1“$M$”.

令$H$如(4)定义.假设$H\not\equiv0$.经过简单的计算可知:$F-1$与$G-1$的公共简单零点是$H$的零点,则

$$N_{11}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{H}\right)+S(r,F)+S(r,G)\leqslant N(r,H)+S(r,F)+S(r,G),$$

这里$N_{11}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)$表示$F-1$与$G-1$的公共简单零点的密指量.

于是,有

$$N_{11}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N(r,F)+N_{(2}\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_{(2}\left(r,\frac{1}{G}\right)+N_{L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_{L}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+$$
$$N_{0}\left(r,\frac{1}{F'}\right)+N_{0}\left(r,\frac{1}{G'}\right)+S(r,F)+S(r,G).\tag{16}$$

由Nevanlinna第二基本定理,得

$$T(r,F)+T(r,G)\leqslant N(r,F)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-N_{0}\left(r,\frac{1}{F'}\right)+$$
$$N(r,G)+N\left(r,\frac{1}{G}\right)+N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)-N_{0}\left(r,\frac{1}{G'}\right)+S(r,F)+S(r,G).\tag{17}$$

因$F$与$G$分担1“$M$”,则有

$$N\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)=2N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+S(r,F)+S(r,G)\leqslant$$
$$N_{11}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_{L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+S(r,F)+S(r,G)\leqslant$$
$$N_{11}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_{L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+T(r,G)+S(r,F)+S(r,G).\tag{18}$$

结合(16)~(18),得

$$T(r,F)\leqslant3N(r,F)+N_{2}\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_{2}\left(r,\frac{1}{G}\right)+2N_{L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+N_{L}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+S(r,F)+S(r,G).\tag{19}$$

注意到

$$N_{L}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{F}{F'}\right)\leqslant T\left(r,\frac{F'}{F}\right)+O(1)\leqslant N\left(r,\frac{F'}{F}\right)+S(r,F)\leqslant$$
$$N(r,F)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+S(r,F)\leqslant N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{L}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$N(r,f)+N_{2}\left(r,\frac{1}{L}\right)+S(r,f).$$

类似的,有

$$N_{L}\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant N(r,f)+N_{2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f).$$

将(2)代入(19),并应用引理3得

$$T(r,L) \leqslant 3\overline{N}(r,f) + N_2\left(r,\frac{1}{L}\right) + N_2\left(r,\frac{1}{f}\right) + 2\overline{N}(r,f) + 2N_2\left(r,\frac{1}{L}\right) + \overline{N}(r,f) + N_2\left(r,\frac{1}{f}\right) + S(r,f) \leqslant$$
$$6\overline{N}(r,f) + T(r,L) - T(r,f) + 3N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right) + 2k\overline{N}(r,f) + 2N_2\left(r,\frac{1}{f}\right) + S(r,f) \leqslant$$
$$(2k+6)\overline{N}(r,f) + T(r,L) - T(r,f) + 3N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right) + 2N_2\left(r,\frac{1}{f}\right) + S(r,f),$$

即 $T(r,f) \leqslant 2N_2\left(r,\frac{1}{f}\right) + 3N_{2+k}\left(r,\frac{1}{f}\right) + (2k+6)\overline{N}(r,f) + S(r,f)$.

从而有 $2\delta_2(0,f) + 3\delta_{2+k}(0,f) + (2k+6)\Theta(\infty,f) \leqslant (2k+10)$, 但这与定理 3的条件相矛盾.

因此, $H \equiv 0$ 下同定理 1的证明类似, 从而定理 3得证.

注 **2** 不难证明(1)式 $L(f)$ 中的 $a_j(z)$ 为 $f$的小函数时, 上述定理仍然成立.

致谢 感谢审稿人的仔细审阅与有益建议!

[参考文献]


[1] Hayman W K. Meromorphic Functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Yang L. Value Distribution Theory[M]. Berlin: Spring-Verlag, 1993.

[3] Lin S H, Lin W C. Uniqueness of meromorphic functions concerning weakly weighted-sharing[J]. Kodai Math J, 2006, 29(2): 269-280.

[4] Liu L P, Gu Y X. Uniqueness of meromorphic functions that share one small functions with their derivatives[J]. Kodai Math J, 2004, 27(3): 272-279.

[5] Zhang J L, Yang L Z. Some results related to a conjecture of R. Br ck concerning meromorphic functions sharing one small function with their derivatives[J]. Annales Academ i•cientirum Fennic•athematica, 2007, 32: 141-149.

[6] Yi H X, Yang C C. Uniqueness Theory of Meromorphic Functions(in Chinese)[M]. Beijing: Science Press, 1995.


[责任编辑: 丁 蓉]