关于 SAOR 迭代法的注记

陈永林

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 设 A 是 2-循环相容次序阵, 其 Jacobi阵 J 的特征值均为实数, 记 $= (J) > 0$ 本文证明了两个主要结论:

(1) SAOR迭代收敛 < 1 且参数 与 满足条件

$$0 < \quad < 2, \quad - \frac{2-}{} < \quad < \quad + \frac{2-}{},$$

或等价地,

$$\begin{cases} 2 \quad < 2/ , \quad 0 < \quad < \dfrac{2-}{1-}; \\ -2/ < \quad 2, \quad 0 < \quad < \dfrac{2+}{1+}. \end{cases}$$

(2) 以 $S_{,}$ 表示 SAOR迭代阵, 则:

当 1时, $(S_{,}) > {}^2$; 当 $= 1$时, $(S_{,1}) = \begin{cases} {}^2, 若 \quad [0, 2]; \\ (-1)^2 \, {}^2 > {}^2, 若 \quad < 0或 \quad > 2 \end{cases}$

这表明: SAOR迭代的渐近收敛因子是 ^{2}, 最优参数是 $= 1$与 $[0, 2]$.

本文的结果改进了张引的两个相关结论.

[关键词] 2-循环相容次序阵, SAOR迭代, 收敛域, 渐近收敛因子, 最优参数

[中图分类号] O241. 6 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)02-0001-05

Notes on SAOR Iterative Methods

Chen Yonglin

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract Suppose A is an 2-cyclic consistently ordered matrix and its Jacobi matrix has only real eigenvalues. Set $= (J) > 0$. In this paper we prove the main conclusions:

(1) The SAOR iteration converges < 1 and the parameters and satisfy

$$0 < \quad < 2, \quad - \frac{2-}{} < \quad < \quad + \frac{2-}{},$$

or equivalently,

$$\begin{cases} 2 \quad < 2/ , \quad 0 < \quad < \dfrac{2-}{1-}; \\ -2/ < \quad 2, \quad 0 < \quad < \dfrac{2+}{1+}. \end{cases}$$

(2) Let $S_{,}$ be the SAOR iterative matrix. Then $(S_{,}) > {}^2$, if 1; $(S_{,1}) = (-1)^2 \, {}^2 > {}^2$, if < 0 or > 2; $(S_{,1}) = {}^2$, if $[0, 2]$.

Our results improve the two related conclusions due to Zhang Yin.

Key words 2-cyclic consistently ordered matrix, SAOR iteration, convergence region, asymptotic convergence factor, optimal parameters

收稿日期: 2009-01-10

基金项目: 江苏省自然科学基金重点项目(BK2006725).

通讯联系人: 陈永林, 教授, 研究方向: 计算数学与广义逆矩阵论.

本文研究求解大型线性方程组

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

的 SAOR迭代法　对称 AOR法. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2-循环相容次序阵, 其 Jacobi阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征值均为实数. 设 $\boldsymbol{A}$ 的分块形式为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix},\ 其中\ \boldsymbol{A}_1、\boldsymbol{A}_2\ 均非奇异.$$

$\boldsymbol{A}$ 的块分解为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\boldsymbol{B}_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{B}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}. \tag{2}$$

令 $\boldsymbol{C}_i = -\boldsymbol{A}_i^{-1}\boldsymbol{B}_i$, $i = 1, 2$, 则 Jacobi阵为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

SAOR迭代阵为[1]

$$\boldsymbol{S}_{,} = (\boldsymbol{D} - \quad \boldsymbol{U})^{-1}[(1- \quad)\boldsymbol{D} + (\quad - \quad)\boldsymbol{U} + \quad \boldsymbol{L}](\boldsymbol{D} - \quad \boldsymbol{L})^{-1}[(1- \quad)\boldsymbol{D} + (\quad - \quad)\boldsymbol{L} + \quad \boldsymbol{U}]$$

$$(1- \quad)^2\boldsymbol{I} + \quad \boldsymbol{T}_{,}, \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{T}_{,} = \begin{bmatrix} [\quad - \quad + \quad (1- \quad)^2]\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 & (1- \quad)(2- \quad)\boldsymbol{C}_1 + \quad (2- \quad)\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}_1 \\ (1- \quad)(2- \quad)\boldsymbol{C}_2 & (\quad + \quad - \quad)\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}_1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

SAOR迭代格式为

$$x_{j+1} = \boldsymbol{S}_{,}\ x_j + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{b}, \quad j \quad 0, \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{Q} = \quad (\boldsymbol{D} - \quad \boldsymbol{U})^{-1}[(2- \quad)\boldsymbol{D} + (\quad - \quad)(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})](\boldsymbol{D} - \quad \boldsymbol{L})^{-1}.$$

文献[2]在假定 $\ = \ (\boldsymbol{J}) < 1$的情形下, 证明了下面两个结果:

(1) 对任意的　与　, $\boldsymbol{S}_{,}$ 的特征值均为非负实数; 在区域

$$\mathscr{D} = \{(\ , \ ): 0 \quad 2, 0 < \quad \frac{4}{4-}, 但 \quad = 2时 \quad 2\}$$

上有 $(\boldsymbol{S}_{,}) < 1$.

(2) 在区域 $\mathscr{D}$上 $(\boldsymbol{S}_{,})$ 的最小值是 ^{2}, 它在直线段 0　2, $\ = 1$上达到.

实际上, $\mathscr{D}$并不是 SAOR迭代的收敛域, 它仅是 SAOR的收敛域 $\mathscr{D}$的子区域. 本文的目的是给出 SAOR迭代的收敛域 $\mathscr{D}$, 并证明: 在 $\mathscr{D}$上 $(\boldsymbol{S}_{,})$ 的最小值仍是 ^{2}, 并且它在直线段 0　2, $\ = 1$上达到.

本文采用数值代数的常用记号与术语, 见文[3-5].

1 SAOR迭代的收敛域

文献[2]中已经得到　$(\boldsymbol{S}_{,})$ 与　$(\boldsymbol{J})$之间的关系式(但其证明在该作者的硕士学位论文中给出):

$$[\quad - (1- \quad)^2]^2 = [\ ^2(2- \quad)^2 + 2 \ (\quad - \quad)]\ ^2 \quad - \ ^2(\quad - \quad)^2\ ^4 + 2 \ (1- \quad)^2(\quad - \quad)\ ^2,$$

或

$$^2 - \{2(1- \quad)^2 + [\ ^2(2- \quad)^2 + 2 \ (\quad - \quad)]\ ^2\} \quad + [(1- \quad)^2 + \quad (\quad - \quad)\ ^2]^2 = 0 \tag{7}$$

当　均为实数时, 式(7)为关于　的实系数二次方程. 为方便起见, 可设　0, 并记　$= \ (\boldsymbol{J}) > 0$

据关于实系数二次方程根的绝对值均小于 1的经典判定法则[6], 可知 $(\boldsymbol{S}_{,}) < 1$　对一切 ^{2} $(\boldsymbol{J}^2)$, 下列不等式成立:

$$-1 < (1- \quad)^2 + \quad (\quad - \quad)\ ^2 < 1, \tag{8}$$

$$-1- [(1- \quad)^2 + \quad (\quad - \quad)\ ^2]^2 < 2(1- \quad)^2 + [\ ^2(2- \quad)^2 + 2 \ (\quad - \quad)]\ ^2, \tag{9}$$

$$2(1- \quad)^2 + [\ ^2(2- \quad)^2 + 2 \ (\quad - \quad)]\ ^2 < 1 + [(1- \quad)^2 + \quad (\quad - \quad)\ ^2]^2. \tag{10}$$

当 = 时, 从这些不等式易得 $(S,\ ) < 1$的必要条件

$$< 1,\quad 0 < \quad < 2 \tag{11}$$

于是 (8) 式中的两个不等式等价于

$$- \frac{1 + (1 - \quad)^2}{2} < \quad < \quad + \frac{2 -}{2}. \tag{12}$$

不等式 (9) 可化为

$$[1 + (1 - \quad)^2 + \quad (- \quad)\ ^2]^2 + \ ^2(2 - \quad)^2\ ^2 > 0,$$

这是无条件成立的. 最后, 不等式 (10) 可化为

$$(- \quad)^2\ ^2 < (2 - \quad)^2,$$

从而得到

$$- \frac{2 -}{} < \quad < \quad + \frac{2 -}{}. \tag{13}$$

综合 (11)、(12)、(13) 各式所示不等式, 可得 SAOR 迭代收敛的充要条件.

定理 1 设 A 为 2-循环相容次序阵, 其 Jacobi阵 J 的特征值均为实数, 则 SAOR 迭代收敛 = (J) < 1且参数 与 满足条件

$$0 < \quad < 2, \quad - \frac{2 -}{} < \quad < \quad + \frac{2 -}{}, \tag{14}$$

或

$$\begin{cases} 2 \quad < 2/\ , \quad 0 < \quad < \dfrac{2 -}{1 -}, \\ - 2/\ < \quad 2, \quad 0 < \quad < \dfrac{2 +}{1 +}. \end{cases} \tag{15}$$

由此可画出 SAOR迭代的收敛域 $\mathscr{D}$, 它是 - 0- 平面上的三角形开区域, 见图 1, 其中所标记的 、 、 的意义见下节的说明, 几条直线、曲线的方程如下:

$$l_1: \quad = \frac{2 -}{1 -}, \quad l_2: \quad = \frac{2 +}{1 +},$$

$$C_1: \quad = \frac{4}{4 -}, \quad C_2: \quad = \frac{2}{2 - (2 - \quad)^2}.$$

可以看出, 文献 [2] 提出的区域 $\mathscr{D}$ 就是 轴与直线 = 2之间的曲边梯形.

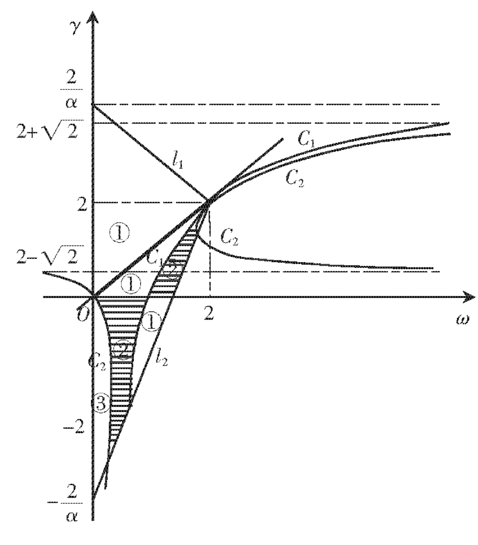

图 1 SAOR的收敛域 (= 0.5)

Fi. 1 Conver ence re ion o SAOR

2 *SAOR* 迭代的渐近收敛因子与最优参数

为书写简单起见, 记

$$\ ^2(2 - \quad)^2 + 2\ (- \quad), \qquad \ ^2(2 - \quad)^2 + 4\ (- \quad). \tag{16}$$

易证

$$2(1 - \quad)^2 + \quad = 1 + [1 - \quad (2 - \quad)]^2, \quad 2(1 - \quad)^2 + \quad ^2 \quad \{1 + [1 - \quad (2 - \quad)]^2\}\ ^2,$$

$$4(1 - \quad)^2 + \quad = [2 - \quad (2 - \quad)]^2, \quad 4(1 - \quad)^2 + \quad ^2 \quad [2 - \quad (2 - \quad)]^2\ ^2,$$

以及方程 (7) 的判别式

$$= \ ^2(2 - \quad)^2\ ^2[4(1 - \quad)^2 + \ ^2] \quad 0, \tag{17}$$

方程 (7) 的两个根

$$_1 = \frac{1}{2}[2(1 - \quad)^2 + \ ^2] + \frac{1}{2}\ |2 - \quad|\ \sqrt{4(1 - \quad)^2 + \ ^2}, \tag{18}$$

$$_2 = \frac{1}{2}[2(1 - \quad)^2 + \ ^2] - \frac{1}{2}\ |2 - \quad|\ \sqrt{4(1 - \quad)^2 + \ ^2}, \tag{19}$$

$$_1 \quad _2 \quad 0$$

不难得到 0与 0的充要条件:

$$0 \begin{cases} \dfrac{2}{2-(2-\quad)^2},\text{当 } 2-(2-\quad)^2>0\text{时;} \\ \dfrac{2}{2-(2-\quad)^2},\text{当 } 2-(2-\quad)^2<0\text{时.} \end{cases} \tag{20}$$

$$0 \qquad 0\text{且 } 0< \qquad \frac{4}{4-},\ \text{或} \qquad 0\text{且} \qquad \frac{4}{4-}. \tag{21}$$

据此判定法则, 可将 SAOR迭代的收敛域划分成三类子区域(见图 1):

第 1类: 0, 0; 第 2类: $D\setminus 0$, $D[\ 0$; 第 3类: $D[\ 0$, $D[\ 0$

文[2]给出的子区域 $\mathscr{D}$是属于第 1类的, 所以在 $\mathscr{D}$上有

$$Q(\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}_X) = \frac{1}{2}[2(1-X)^2 + DA^2] + \frac{1}{2}X\,|\,2-C\,|\,A\ \sqrt{4(1-X)^2+DA^2}, \tag{22}$$

当然, 由于 $D\setminus 0$, $D\setminus 0$, 所以对第 1类子区域, $\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}_X$的谱半径表示式(22)均是可用的. 那么, 对于第 2、3类子区域, 表示式(22)是否可用呢?由于此时很难在理论上判定 K_1是 L^2的增函数(因为$\frac{dK_1}{dL^2}$是否非负的证明很复杂), 我们对于 $A=0.5$的情形, 选取了子区域 º 、» 中的许多点(X, C)进行计算, 见表 1, 从这些数值结果, 有理由相信, 表示式(22)在整个收敛域 $\mathscr{D}$上均适用.

表 1　$D(J^2)=\{0.25, 0.10, 0\}$, 记号 $K(X, C, L^2)$见(23)式, D与 D见(16)式

Table 1　$D(J^2)=\{0.25, 0.10, 0\}$, the notation $K(X, C, L^2)$ is the same as in (23) and D and D are the same as in (16)

	点(X, C)	D	D	$K(X, C, 0.25)$	$K(X, C, 0.10)$	$K(X, C, 0)$
子区域 º	(1.6, 1)	−1.28	0.64	0.8633	0.6818	0.36
D < 0	(1.4, 0.5)	−0.63	1.89	0.7609	0.5067	0.16
D > 0	(0.3, −1)	−0.75	0.03	0.7933	0.6869	0.49
	(0.6, −2)	−0.48	2.64	0.9227	0.5840	0.16
	(0.5, −3)	−0.75	2.75	0.9881	0.6536	0.25
子区域 »	(1.75, 1.5)	−0.9844	−0.1094	0.8585	0.7570	0.5625
D < 0	(1.82, 1.5)	−1.5015	−0.8367	0.9139	0.8599	0.6724
D < 0	(1.93, 1.8)	−0.8546	−0.3528	0.9947	0.9594	0.8649
	(0.28, −1)	−0.728	−0.0112	0.8058	0.7083	0.5184
	(0.25, −2)	−1.25	−0.125	0.8949	0.7867	0.5625
	(0.1, −3)	−0.99	−0.37	0.9800	0.9316	0.81

尽管无法给出在属于子区域 º 与 » 的点(X, C)上的谱半径 $Q(\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}_X)$的明显表达式, 但是, 不用谱半径 $Q(\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}_X)$的显式, 我们能够证明

定理 2　(1) 当 $X\,X\ 1$时, $Q(\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}_X) > A^2$;

(2) 当 $X=1$时, $Q(\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}_1) = \begin{cases} A^2, \text{当 } 0[\ \ C[\ \ 2\text{时;} \\ (C-1)^2 A^2 > A^2, \text{当 } C>2\text{或 } C<0\text{时.}\end{cases}$

证明　对任何点$(X, C)\ I\ \mathscr{D}$, 我们记

$$K(X, C, L^2)\ S\ \frac{1}{2}[2(1-X)^2+DL^2] + \frac{1}{2}X\,|\,2-C\,|\,L\ \sqrt{4(1-X)^2+DL^2}. \tag{23}$$

(1) 当 $X\,X\ 1$时, $2(1-X)^2+DA^2 > 2(1-X)^2 A^2 + DA^2 = [1+[1-X(2-C)]^2]A^2$,

$$4(1-X)^2+DA^2 > [4(1-X)^2+D]A^2 = [2-X(2-C)]^2 A^2,$$

从而有

$$K(X, C, A^2) > \frac{1}{2}\{1+[1-X(2-C)]^2 + X\,|\,2-C\,|\# |\,2-X(2-C)\,|\}A^2. \tag{24}$$

由于(24)式中出现了绝对值 $|\,2-C\,|\#|\,2-X(2-C)\,|$, 故需分两种情形讨论.

情形 1　当 $C<2$且 $X[\ \frac{2}{2-C}$时, $2-X(2-C)\setminus 0$, $2-C>0$, 故(24)式化为

$$K(X, C, A^2) > \frac{1}{2}\{1+[1-X(2-C)]^2 + X(2-C)[2-X(2-C)]\}A^2 = A^2.$$

当 C < 2且 X \ $\frac{2}{2-C}$时, 2 - C > 0, 2 - X(2 - C) [0, 故(24)式化为

$$K(X, C, A^2) > \frac{1}{2}\{1 + [1 - X(2 - C)]^2 + X^2(2 - C)^2 - 2X(2 - C)\}A^2 = [1 - X(2 - C)]^2 A^2 \setminus A^2.$$

情形 2 当 C \ 2时, 2 - X(2 - C) \ 2, 此时(24)式化为

$$K(X, C, A^2) > \frac{1}{2}\{1 + [1 - X(2 - C)]^2 + X(C - 2)[2 - X(2 - C)]\}A^2 = [1 - X(2 - C)]^2 A^2 \setminus A^2.$$

所以, 当 X X 1时, $Q(\boldsymbol{SC}_X) \setminus K(X, C, A^2) > A^2$.

(2) 当 X = 1时, $D = 1 + (C - 1)^2 \setminus 1$, $D = C^2 \setminus 0$, 此时有

$$Q(\boldsymbol{SC}_1) = K(1, C, A^2) = \frac{1}{2}\{1 + (C - 1)^2 + |(2 - C)C|\}A^2 = \begin{cases} A^2, \text{当 } 0 [C [2\text{时}; \\ (C - 1)^2 A^2 > A^2, \text{当 } C < 0\text{或 } C > 2\text{时}. \end{cases}$$

定理 2的结论表明: SAOR迭代的渐近收敛因子为 A^2, 最优参数为 X = 1与 C I [0, 2]. 所以, 虽然 SAOR迭代的收敛域 $\mathscr{D}$比文[2]给出的区域 $\mathscr{D}$大, 但仍如文[2]所指出的, 在 Jacobi阵 $\boldsymbol{J}$的特征值均为实数的情形下, SAOR迭代渐近地与 Gauss-Seidel迭代相当, 并不理想.

[参考文献]

[1] 胡家赣. 线性代数方程组的迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1991.

[2] 张引. SAOR方法的收敛性[J]. 计算数学, 1988, 10(2): 201-204.

[3] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[4] 戈卢布 G H, 范洛恩 C F. 矩阵计算[M]. 袁亚湘译. 北京: 科学出版社, 2001.

[5] 徐树方. 矩阵计算的理论与方法[M]. 北京: 北京大学出版社, 1995.

[6] Young D M. Iterative Solution of Large Linear Systems[M]. New York: Academic Press, 1971.

[责任编辑: 丁蓉]