

具有双周期时滞捕食被捕食模型的周期解

陆志奇, 吕建锋

(河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

[摘要] 研究了一类双周期时滞和基于比率的 Holling II 型功能性反应的三种群食物链系统, 利用重合度理论建立了这类系统的正周期解存在的一个充分性判据.

[关键词] 周期时滞, Holling II 型, 重合度, 周期解

[中图分类号] O 175. 13 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010) 02-0006-07

Periodic Solutions in Predator-Prey Model With Two Delays

Lu Zhiqi L Jianfeng

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract A class of food chain system with ratio-dependent Holling II functional response and two periodic delay was studied. Using the coincidence degree theory, the existence of periodic solutions for this model was obtained under suitable conditions.

Key words periodic delay, Holling II, coincidence degree theory, periodic solution

捕食-被捕食模型中存在着各式各样的功能反应函数, 其中常见的是 Holling I、II、III 型, 很多文献都已经对此作了研究^[1-3]. 这些研究主要针对带有单一功能反应函数的模型, 而近年来很多学者开始研究具有多种混合功能反应函数和时滞的模型^[4-6], 这样的模型更具有实际的意义.

最近徐和陈^[7]研究了如下具有时滞的三种群基于比率和 Holling II 型的食物链系统:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1(t) \left[a_1 - a_{11} \int_0^t K_1(s) x_1(t-s) ds - \frac{a_{12} x_2(t)}{m_{12} x_2(t) + x_1(t)} \right], \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2(t) \left[-a_2 + a_{21} \int_0^t K_2(s) \frac{x_1(t-s)}{m_{12} x_2(t-s) + x_1(t-s)} ds - \frac{a_{23} x_3(t)}{m_{23} x_3(t) + x_2(t)} \right], \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3(t) \left[-a_3 + a_{32} \int_0^t K_3(s) \frac{x_2(t-s)}{m_{23} x_3(t-s) + x_2(t-s)} ds \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

其生态学意义可以参考文献[7].

然而, 有些情况下季节性的变动会使一些参数呈现周期性变化, 此时系数依赖于时间的模型更符合实际, 因此我们讨论系数依赖于时间模型是很有必要的. 很多学者已经研究了此系统并且证明了周期解的存在性, 如文献[8].

本文研究了如下具有双周期时滞的非自治模型:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1(t) \left[a_1(t) - \frac{q_1(t) x_2(t)}{x_1(t) + B x_2(t)} \right], \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2(t) \left[a_2(t) + \frac{Q_1(t) x_1(t - \tau_1(t))}{x_1(t - \tau_1(t)) + B x_2(t - \tau_1(t))} - \frac{q_2(t) x_3(t)}{1 + b x_2(t)} \right], \end{aligned}$$

收稿日期: 2009-12-26

基金项目: 河南省自然科学基金 (200510476002).

通讯联系人: 陆志奇, 教授, 研究方向: 生物数学. E-mail: lizhiqi2001@yahoo.com.cn

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = x_3(t) \left[-a_3(t) + \frac{Q_2(t)x_2(t-\tau_2(t))}{1+bx_2(t-\tau_2(t))} \right], \quad (2)$$

其中, $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 分别代表食饵密度、捕食者密度和最高捕食者密度. $a_1(t)$ 、 $a_2(t)$ 、 $a_3(t)$ 、 $q_1(t)$ 、 $q_2(t)$ 、 $Q_1(t)$ 、 $Q_2(t)$ 是正的连续的 ω 周期函数, $\tau_1(t)$ 、 $\tau_2(t)$ 是非负连续的 ω 周期函数, b 、 B 都是正常数.

本文的目的是利用文献[9]中的重合度理论, 得到系统(2)存在周期解的充分条件.

1 周期解的存在性

为了得到系统(2)周期解的存在性, 我们根据 Gains 和 Mawhin 重合度理论中的连续性定理给出下面的结果.

设 X, Z 是两个 Banach 空间, $L: \text{Dom} L \subset X \rightarrow Z$ 是个线性算子, $N: X \rightarrow Z$ 是个连续算子. 假设 L 在 Z 中是闭的并且核 L 的维数等于像 L 的余维并且有界, 那么 L 是一个零指标 Fredholm 算子.

假设 L 是一个零指标 Fredholm 算子, 那么存在投影算子 $P: X \rightarrow X$, $Q: Z \rightarrow Z$ 使得 $\text{Im} P = \text{Ker} L$, $\text{Im} L = \text{Ker} Q = \text{Im}(I - Q)$. 我们有 $L|_{\text{Dom} L \cap \text{Ker} P}: (I - P)X \rightarrow \text{Im} L$ 是可逆的, 用 K_P 表示它的逆.

假设 Ω 是 X 上的有界开集, 那么算子 N 在 Ω 上是 L 紧的, 如果满足 $(QN)(\Omega)$ 是有界的而且 $K_P(I - Q)N: \Omega \rightarrow X$ 是紧的. Q 的像与 L 的核是同构的, 记为 $J: \text{Im} Q \rightarrow \text{Ker} L$.

引理 1^[9] 设 X, Z 是两个 Banach 空间, L 是一个零指标 Fredholm 算子, 算子 N 在 Ω 上是 L 紧的. 假定:

- (a) 对每一个 $\lambda \in (0, 1)$, $x \in \partial\Omega \cap \text{Dom} L$, $Lx \neq \lambda Nx$
- (b) 对每一个 $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker} L$, $QNx \neq 0$
- (c) $\deg(JQN, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) \neq 0$

那么 $Lx = Nx$ 在 $\text{Dom} L \cap \Omega$ 上至少有一个解.

为方便起见, 我们将采用如下定义

$$u = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega u(t) dt,$$

其中 u 是一个严格正连续 ω 周期函数.

定理 1 假设

$$\frac{\overline{Q_2}}{q_1} > \frac{\overline{a_3}b}{\overline{a_1}B}$$

成立, 那么系统(2)至少存在一个正 ω 周期解.

证明 因为系统的解对于所有 $t \geq 0$ 都是正的, 令

$$u_1(t) = \ln[x_1(t)], u_2(t) = \ln[x_2(t)], u_3(t) = \ln[x_3(t)],$$

则系统(2)变成

$$\begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} &= a_1(t) - \frac{q_1(t) \exp\{u_2(t)\}}{\exp\{u_1(t)\} + B \exp\{u_2(t)\}}, \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= a_2(t) + \frac{Q_1(t) \exp\{u_1(t-\tau_1(t))\}}{\exp\{u_1(t-\tau_1(t))\} + B \exp\{u_2(t-\tau_1(t))\}} - \frac{q_2(t) \exp\{u_3(t)\}}{1 + b \exp\{u_2(t)\}}, \\ \frac{du_3(t)}{dt} &= -a_3(t) + \frac{Q_2(t) \exp\{u_2(t-\tau_2(t))\}}{1 + b \exp\{u_2(t-\tau_2(t))\}}. \end{aligned} \quad (3)$$

为了应用引理 1 于系统(3), 我们取

$$X = Z = \{\mathbf{u}^*(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3): u_i(t + \omega) = u_i(t), i = 1, 2, 3\},$$

和

$$\|\mathbf{u}^*\| = \|(u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T\| = \sum_{i=1}^3 \max_{t \in [0, \omega]} |u_i(t)|. \quad (4)$$

这里 $\|\cdot\|$ 代表欧几里得范数, 容易看出 X, Z 都是 Banach 空间.

令

$$L: \text{Dom} L \cap X \rightarrow X, L(u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T = \left[\frac{du_1(t)}{dt}, \frac{du_2(t)}{dt}, \frac{du_3(t)}{dt} \right]^T,$$

其中 $\text{Dom} L = \{(u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)\}$ 和 $N: X \rightarrow X$,

$$N \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(t) - \frac{q_1(t) \exp\{u_2(t)\}}{\exp\{u_1(t)\} + B \exp\{u_2(t)\}} \\ a_2(t) + \frac{Q_1(t) \exp\{u_1(t - \tau_1(t))\}}{\exp\{u_1(t - \tau_1(t))\} + B \exp\{u_2(t - \tau_1(t))\}} - \frac{q_2(t) \exp\{u_3(t)\}}{1 + b \exp\{u_2(t)\}} \\ - a_3(t) + \frac{Q_2(t) \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}}{1 + b \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

定义两个投影 P 和 Q 为:

$$P \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega u_1(t) dt \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega u_2(t) dt \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega u_3(t) dt \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in X = Z,$$

明显的

$$\text{Ker} L = \{u^* \mid u^* \in X, u^* = \mathbf{R}^3\}, \quad \text{Im} L = \{z^* \mid z^* \in Z, \int_0^\omega z^*(t) dt = 0\}$$

在 Z 中是闭的并且 $\dim \text{Ker} L = \text{codim Im} L = 3$

因此, L 是一个零指标 Fredholm 算子. 更进一步, 容易证明 L 的广义逆 $K_P: \text{Im} L \rightarrow \text{Ker} P \cap \text{Dom} L$ 有如下形式:

$$K_P(z^*(t)) = \int_0^t z^*(s) ds - \frac{1}{\omega} \int_0^t \int_0^s z^*(s) ds dt, \tag{6}$$

因此

$$QN x^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left[a_1(t) - \frac{q_1(t) \exp\{u_2(t)\}}{\exp\{u_1(t)\} + B \exp\{u_2(t)\}} \right] dt \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left[a_2(t) + \frac{Q_1(t) \exp\{u_1(t - \tau_1(t))\}}{\exp\{u_1(t - \tau_1(t))\} + B \exp\{u_2(t - \tau_1(t))\}} - \frac{q_2(t) \exp\{u_3(t)\}}{1 + b \exp\{u_2(t)\}} \right] dt \\ \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left[-a_3(t) + \frac{Q_2(t) \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}}{1 + b \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}} \right] dt \end{bmatrix},$$
$$K_P(I - Q)N x^* = \int_0^t N x^*(s) ds - \frac{1}{\omega} \int_0^t \int_0^s N x^*(s) ds dt - \left[\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2} \right] \int_0^\omega N x^*(s) ds$$

显然, 通过 Lebesgue 定理, 容易证明 QN 和 $K_P(I - Q)N$ 是连续的; 通过 Arzela-Ascoli 定理, 能够证明对于任意开有界集 $\Omega \in X$, $K_P(I - Q)N(\Omega)$ 是紧的. 更进一步说, $QN(\Omega)$ 是有界集. 因此, N 对于任意开有界集 $\Omega \subset X$ 在 Ω 上是 L 紧的.

为了应用引理 1 我们需要寻找一个合适的有界开集 Ω

对应于算子方程 $Lx = \lambda Nx$, $\lambda \in (0, 1)$ 有

$$\frac{du_1(t)}{dt} = \lambda \left[a_1(t) - \frac{q_1(t) \exp\{u_2(t)\}}{\exp\{u_1(t)\} + B \exp\{u_2(t)\}} \right],$$
$$\frac{du_2(t)}{dt} = \lambda \left[a_2(t) + \frac{Q_1(t) \exp\{u_1(t - \tau_1(t))\}}{\exp\{u_1(t - \tau_1(t))\} + B \exp\{u_2(t - \tau_1(t))\}} - \frac{q_2(t) \exp\{u_3(t)\}}{1 + b \exp\{u_2(t)\}} \right], \tag{7}$$
$$\frac{du_3(t)}{dt} = \lambda \left[-a_3(t) + \frac{Q_2(t) \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}}{1 + b \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}} \right].$$

假定 $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T \in X$ 是 (7) 在 $\lambda \in (0, 1)$ 上取某一定值时的解. 在区间 $[0, \omega]$ 上对 (7) 进行积分, 得到

$$\begin{aligned} & \int \left[a_1(t) - \frac{q_1(t) \exp\{u_2(t)\}}{\exp\{u_1(t)\} + B \exp\{u_2(t)\}} \right] dt = 0, \\ & \int \left[a_2(t) + \frac{Q_1(t) \exp\{u_1(t - \tau_1(t))\}}{\exp\{u_1(t - \tau_1(t))\} + B \exp\{u_2(t - \tau_1(t))\}} - \frac{q_2(t) \exp\{u_3(t)\}}{1 + b \exp\{u_2(t)\}} \right] dt = 0, \\ & \int \left[-a_3(t) + \frac{Q_2(t) \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}}{1 + b \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}} \right] dt = 0, \end{aligned}$$

因此,

$$\int \left[\frac{q_1(t) \exp\{u_2(t)\}}{\exp\{u_1(t)\} + B \exp\{u_2(t)\}} \right] dt = \overline{a_1} \omega, \quad (8)$$

$$\int \left[a_2(t) + \frac{Q_1(t) \exp\{u_1(t - \tau_1(t))\}}{\exp\{u_1(t - \tau_1(t))\} + B \exp\{u_2(t - \tau_1(t))\}} \right] dt = \int \left[\frac{q_2(t) \exp\{u_3(t)\}}{1 + b \exp\{u_2(t)\}} \right] dt, \quad (9)$$

$$\int \left[\frac{Q_2(t) \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}}{1 + b \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}} \right] dt = \overline{a_3} \omega. \quad (10)$$

由 (8), (9), (10) 可得

$$\int \left| \frac{du_1(t)}{dt} \right| dt \leq \int |a_1(t)| dt + \int \left[\frac{q_1(t) \exp\{u_2(t)\}}{\exp\{u_1(t)\} + B \exp\{u_2(t)\}} \right] dt = 2 \overline{a_1} \omega, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right| dt & \leq \int \left[a_2(t) + \frac{Q_1(t) \exp\{u_1(t - \tau_1(t))\}}{\exp\{u_1(t - \tau_1(t))\} + B \exp\{u_2(t - \tau_1(t))\}} \right] dt + \\ & \int \left[\frac{q_2(t) \exp\{u_3(t)\}}{1 + b \exp\{u_2(t)\}} \right] dt \leq 2 \int \left[a_2(t) + \frac{Q_1(t) \exp\{u_1(t - \tau_1(t))\}}{\exp\{u_1(t - \tau_1(t))\} + B \exp\{u_2(t - \tau_1(t))\}} \right] dt \leq \\ & 2(\overline{a_2} + \overline{Q_1}) \omega, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int \left| \frac{du_3(t)}{dt} \right| dt \leq \int |a_3(t)| dt + \int \left[\frac{Q_2(t) \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}}{1 + b \exp\{u_2(t - \tau_2(t))\}} \right] dt = 2 \overline{a_3} \omega. \quad (13)$$

因为 $u^*(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T \in X$, 因此存在 $\xi, \eta_i \in [0, \omega]$, $i = 1, 2, 3$ 有

$$u_i(\xi) = \min_{t \in [0, \omega]} u_i(t), \quad u_i(\eta_i) = \max_{t \in [0, \omega]} u_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

我们现在对 $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ 的范围进行估计.

由 (10), (14) 我们得到

$$\overline{a_3} \omega \leq \int \left[\frac{Q_2(t) \exp\{u_2(\eta_2)\}}{1 + b \exp\{u_2(\eta_2)\}} \right] dt = \frac{\overline{Q_2} \omega \exp\{u_2(\eta_2)\}}{1 + b \exp\{u_2(\eta_2)\}},$$

即

$$\frac{\exp\{u_2(\eta_2)\}}{1 + b \exp\{u_2(\eta_2)\}} \geq \frac{\overline{a_3}}{\overline{Q_2}}.$$

根据定理 1 中的假设, 得到

$$u_2(\eta_2) \geq \ln \frac{\overline{a_3}}{\overline{Q_2} - a_3 b}. \quad (15)$$

由 (12) 和 (15) 得到

$$u_2(t) \geq u_2(\eta_2) - \int \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right| dt \geq \ln \left[\frac{\overline{a_3}}{\overline{Q_2} - a_3 b} \right] - 2(\overline{a_2} + \overline{Q_1}) \omega \triangleq H_1. \quad (16)$$

另一方面, 由 (10), (14) 我们还得到

$$\overline{a_3} \omega \geq \int \left[\frac{Q_2(t) \exp\{u_2(\xi_2)\}}{1 + b \exp\{u_2(\xi_2)\}} \right] dt = \frac{\overline{Q_2} \omega \exp\{u_2(\xi_2)\}}{1 + b \exp\{u_2(\xi_2)\}},$$

即

$$\frac{\exp\{u_2(\xi_2)\}}{1 + b \exp\{u_2(\xi_2)\}} \leq \frac{\overline{a_3}}{\overline{Q_2}}. \quad (17)$$

根据定理 1 中的假设, 得到

$$u_2(\xi_2) \leq \ln \frac{\overline{a_3}}{Q_2 - \overline{a_3}b}, \quad (18)$$

由 (12) 和 (18) 得

$$u_2(t) \leq u_2(\xi_2) + \int \left| \frac{du_2(t)}{dt} \right| dt \leq \ln \left[\frac{\overline{a_3}}{Q_2 - \overline{a_3}b} \right] + 2(\overline{a_2} + \overline{Q_1})\omega \triangleq H_2, \quad (19)$$

因此, 由 (16) 和 (19) 得

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, \omega]} |u_2(t)| &\leq \max \{ \left| \ln \left[\frac{\overline{a_3}}{Q_2 - \overline{a_3}b} \right] - 2(a_2 + Q_1)\omega \right|, \\ &\quad \left| \ln \left[\frac{\overline{a_3}}{Q_2 - \overline{a_3}b} \right] + 2(a_2 + Q_1)\omega \right| \} = \max \{ |H_1|, |H_2| \} \triangleq B_2. \end{aligned}$$

由 (8) 和 (14), 我们得到:

$$\overline{a_1}\omega \geq \int \left[\frac{q_1(t) \exp\{u_2(\xi_2)\}}{\exp\{u_1(\eta_1)\} + B \exp\{u_2(\xi_2)\}} \right] dt = \frac{\overline{q_1}\omega \exp\{u_2(\xi_2)\}}{\exp\{u_1(\eta_1)\} + B \exp\{u_2(\xi_2)\}}.$$

根据定理 1 中的假设, 得到

$$u_1(\eta_1) \geq \ln \left[\frac{\overline{q_1} - \overline{a_1}B}{a_1} \right] + u_2(\xi_2). \quad (20)$$

由 (11)、(16)、(20) 可得

$$\begin{aligned} u_1(t) &\geq u_1(\eta_1) - \int \left| \frac{du_1(t)}{dt} \right| dt \geq \ln \left[\frac{\overline{q_1} - \overline{a_1}B}{a_1} \right] + u_2(\xi_2) - 2\overline{a_1}\omega \geq \\ &\quad \ln \left[\frac{\overline{q_1} - \overline{a_1}B}{a_1} \right] - 2\overline{a_1}\omega + H_1 \triangleq H_3, \end{aligned} \quad (21)$$

另一方面, 由 (8) 和 (14) 还得到

$$\overline{a_1}\omega \leq \int \left[\frac{q_1(t) \exp\{u_2(\eta_2)\}}{\exp\{u_1(\xi_1)\} + B \exp\{u_2(\eta_2)\}} \right] dt = \frac{\overline{q_1}\omega \exp\{u_2(\eta_2)\}}{\exp\{u_1(\xi_1)\} + B \exp\{u_2(\eta_2)\}}.$$

根据定理 1 中的假设, 得到

$$u_1(\xi_1) \leq \ln \left[\frac{\overline{q_1} - \overline{a_1}B}{a_1} \right] + u_2(\eta_2). \quad (22)$$

由 (11)、(19)、(22) 得到

$$\begin{aligned} u_1(t) &\leq u_1(\xi_1) + \int \left| \frac{du_1(t)}{dt} \right| dt \leq \ln \left[\frac{\overline{q_1} - \overline{a_1}B}{a_1} \right] + u_2(\eta_2) + 2\overline{a_1}\omega \leq \\ &\quad \ln \left[\frac{\overline{q_1} - \overline{a_1}B}{a_1} \right] + 2\overline{a_1}\omega + H_2 \triangleq H_4. \end{aligned} \quad (23)$$

因此, 由 (21) 和 (23), 得到

$$\max_{t \in [0, \omega]} |u_1(t)| \leq \max \{ |H_3|, |H_4| \} \triangleq B_1. \quad (24)$$

由 (9) 和 (14) 我们得到

$$\overline{a_2}\omega \geq \int \left[\frac{q_2(t) \exp\{u_3(\xi_3)\}}{1 + b \exp\{u_2(\eta_2)\}} - Q_1(t) \right] dt = \frac{\overline{q_2}\omega \exp\{u_3(\xi_3)\}}{1 + b \exp\{u_2(\eta_2)\}} - \overline{Q_1}\omega,$$

即

$$u_3(\xi_3) \leq \ln \left[\frac{\overline{a_2} + \overline{Q_1}}{q_2} \right] + \ln(1 + b \exp\{u_2(\eta_2)\}). \quad (25)$$

由 (13)、(19)、(25) 得

$$\begin{aligned} u_3(t) &\leq u_3(\xi_3) + \int \left| \frac{du_3(t)}{dt} \right| dt \leq \ln \left[\frac{\overline{a_2} + \overline{Q_1}}{q_2} \right] + \ln(1 + b \exp\{u_2(\eta_2)\}) + 2\overline{a_3}\omega \leq \\ &\quad \ln \left[\frac{\overline{a_2} + \overline{Q_1}}{q_2} \right] + \ln(1 + b \exp\{H_2\}) + 2\overline{a_3}\omega \triangleq H_5. \end{aligned} \quad (26)$$

由 (9) 和 (14) 我们还得到

$$\overline{a_2} \omega \leq \int_0^{\omega} \frac{q_2(t) \exp\{u_3(\eta_3)\}}{1 + b \exp\{u_2(\xi_2)\}} dt = \frac{\overline{q_2} \omega \exp\{u_3(\eta_3)\}}{1 + b \exp\{u_2(\xi_2)\}},$$

即

$$u_3(\eta_3) \geq \ln \frac{\overline{a_2}}{q_2} + \ln(1 + b \exp\{u_2(\xi_2)\}). \quad (27)$$

由 (13)、(16)、(27) 得

$$\begin{aligned} u_3(t) &\geq u_3(\eta_3) - \int_0^{\omega} \left| \frac{du_3(t)}{dt} \right| dt \geq \ln \frac{\overline{a_2}}{q_2} + \ln(1 + b \exp\{u_2(\xi_2)\}) - 2\overline{a_3} \omega \geq \\ &\ln \frac{\overline{a_2}}{q_2} + \ln(1 + b \exp\{H_1\}) - 2\overline{a_3} \omega \triangleq H_6. \end{aligned} \quad (28)$$

因此, 根据 (26)、(28) 我们得到

$$\max_{t \in [0, \omega]} |u_3(t)| \leq \max\{|H_5|, |H_6|\} \triangleq B_3.$$

基于以上讨论, 显然常数 B_i ($i = 1, 2, 3$) 的值不依赖于 λ 且有

$$\|(u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T\| = |u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)| \leq B_1 + B_2 + B_3 < B_4.$$

现在我们将 Ω 记为 $\Omega = \{(u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T \in X: \|(u_1, u_2, u_3)^T\| < B_4\}$, 这满足引理 1 的条件

(a). 令 $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T \in \partial\Omega \cap \ker L = \partial\Omega \cap \mathbf{R}^3$, 那么 $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ 是在 \mathbf{R}^3 中满足 $\|(u_1, u_2, u_3)^T\| = B_4$ 的常向量. 因此

$$QN \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a_1} - \frac{\overline{q_1} e^{u_2}}{e^{u_1} + B e^{u_2}} \\ \overline{a_2} + \frac{\overline{Q_1} e^{u_1}}{e^{u_1} + B e^{u_2}} - \frac{\overline{q_2} e^{u_3}}{1 + b e^{u_2}} \\ -\overline{a_3} + \frac{\overline{Q_2} e^{u_2}}{1 + b e^{u_2}} \end{bmatrix} \neq 0.$$

这证明了引理 1 的条件 (b) 被满足.

另一方面, 通过定理 1 的假设和拓扑度的定义, 直接计算得

$$\deg\{JQN, \Omega \cap \ker L, 0\} = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} f_{u_1} & f_{u_2} & 0 \\ g_{u_1} & g_{u_2} & g_{u_3} \\ 0 & h_{u_2} & 0 \end{vmatrix},$$

这里

$$\begin{aligned} f_{u_1} &= \frac{\overline{q_1} e^{u_1+u_2}}{(e^{u_1} + B e^{u_2})^2} > 0 & f_{u_2} &= -\frac{\overline{q_1} e^{u_1+u_2}}{(e^{u_1} + B e^{u_2})^2} < 0 \\ g_{u_1} &= \frac{\overline{Q_1} B e^{u_1+u_2}}{(e^{u_1} + B e^{u_2})^2} > 0 & g_{u_2} &= -\frac{\overline{Q_1} B e^{u_1+u_2}}{(e^{u_1} + B e^{u_2})^2} + \frac{\overline{b} \overline{q_2} e^{u_1+u_2}}{(1 + b e^{u_2})^2} \\ g_{u_3} &= -\frac{\overline{q_2} e^{u_3}}{1 + b e^{u_2}} < 0 & h_{u_2} &= \frac{\overline{Q_2} e^{u_2}}{(1 + b e^{u_2})^2} > 0 \end{aligned}$$

因此, 我们得到

$$\begin{vmatrix} f_{u_1} & f_{u_2} & 0 \\ g_{u_1} & g_{u_2} & g_{u_3} \\ 0 & h_{u_2} & 0 \end{vmatrix} = -h_{u_2} f_{u_1} g_{u_3} > 0$$

所以

$$\deg\{JQN, \Omega \cap \text{ke}L, 0\} = \text{sgn} \begin{vmatrix} f_{u_1} & f_{u_2} & 0 \\ g_{u_1} & g_{u_2} & g_{u_3} \\ 0 & h_{u_2} & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(29)

至此我们已经证明了 Ω 满足引理 1 的所有条件. 因此, 系统 (3) 至少有一个 ω 周期解. 更进一步说, 系统 (2) 至少有一个正的 ω 周期解.

[参考文献]

[1] Tapan S. Dynamical analysis of a delayed ratio-dependent Holling-Tanner predator-prey model[J]. J Math Anal Appl. 2009, 358: 389-402

[2] Celik C. The stability and Hopf bifurcation for a predator-prey system with time delay[J]. Chaos Solitons and Fractals. 2008, 37(1): 87-99.

[3] Agiza H N, ELabbasy E M. Chaotic dynamics of a discrete prey-predator model with Holling type II[J]. Nonlinear Anal. 2009, 10(1): 116-129.

[4] Robert S C, Chirs C, Ruan S G. Intraspecific interference and consumer-resource dynamics[J]. Discrete Contin Dynam Syst Ser. 2004, 4B(3): 527-546

[5] Liu W, Xiao D, Yi Y. Relaxation oscillations in a class of predator-prey systems[J]. Differential Equations. 2003, 188(1): 306-331.

[6] Tao Z, Kuang Y, Smith H L. Global existence of periodic solutions in a class of delayed Gause-type predator-prey systems[J]. Nonlinear Anal TMA. 1997, 28(8): 1373-1394.

[7] Xu R, Chen L, Chaplain M A J. Attractivity in a delayed three-species ratio-dependent predator-prey system without dominating instantaneous negative feedback[J]. Acta Mathematica Applicata Sinica. 2003, 19(2): 317-332

[8] Fan M, Wang K. Periodicity in a delayed ratio-dependent predator-prey system[J]. J Math Anal Appl. 2001, 262: 179-190.

[9] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations[M]. Berlin: Springer, 1977.

[责任编辑: 丁 蓉]