第 33卷第 2期 2010年 6月
南京师大学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)
Vol 33 No. 2 Jun, 2010

P阶自回归模型中的变点检验问题

张立文, 周秀轻

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 变点问题是统计学中一个较新的课题. 本文讨论了 p阶自回归模型中的变点检验问题, 对于自回归模型在模型的白噪声序列的方差 σ^2 未知的条件下, 分别利用最大似然估计方法和最小二乘法给出了变点的检验统计量, 并得到统计量的渐近分布, 最后给出了证明.

[关键词] 变点, 自回归模型, 极大似然法, 最小二乘法

[中图分类号] O212.1 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)02-0013-05

Testing for Change-Point of the P-Order Autoregressive Time Series Model

Zhang Liwen, Zhou Xiuqing

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract Change-point problem is a new topic in the statistics. In this paper, we consider the change-point problem in the p-order autoregressive time series model. When the variance σ^2 is unknown, we use the maximum likelihood method and the least squares estimation to give the test statistics and attain their asymptotic distributions for the change-point. We give their proofs at last.

Key words change-point, autoregressive models, the maximum likelihood, the least squares method

近年来, 变点问题在理论和应用上都有快速的发展. 一般认为, 变点问题的研究始于 Page于 1954年在 Biometrike上发表的一篇关于连续抽样检验的文章[1]. 我国统计学者在这一领域的研究始于上世纪 80年代, 陈希孺教授和缪柏其教授分别利用“局部法”研究了变点问题[2], 随后其他许多学者也开始针对变点问题进行研究. 在理论上, 变点问题的发展已经较为成熟, Csörgŏ和 Horváth 1997年的专著[3]就是对这一领域近 20年来理论问题的总结. 由于变点问题的应用涉及工业、经济、金融和气象等多个领域, 所以对我们了解事物变化规律, 制定相关对策有着重要的意义. 但是, 正如文献[4]中所言变点问题即使在最简单的情况下也涉及到一些难以处理的关于非独立随机变量的分布问题, 所以这个问题的研究在理论上处理难度很大, 非常具有挑战性.

变点主要有三种形式: 突变点, 渐进的变点和流行式变点. 处理变点问题的常用方法有: 极大似然法, 最小二乘法, 非参数法和 Bays法等. 利用极大似然法和最小二乘法处理变点问题, 许多学者都对其做过研究. 如 Hinkley在 1970年研究了变点的极大似然法的一些性质并考虑了相关的检验问题[5]. Hawkins在 1986年利用最小二乘法考虑了变点的检验和估计问题[6]. Worsley在 1986年利用最大似然法考虑了服从指数分布的一列独立随机变量中的均值的变点检验问题, 并给出了置信区间[7]. 陈希孺在 1991年利用极大似然法考虑了正态分布的均值变点问题和指数分布参数的变点问题[8]. Huang和 Chang在 1993年提出了最小二乘统计量, 并用此估计具有线性趋势模型中的变点[9]. Jarušsková在 1998年对定位模型利用最大似然统计量和贝叶斯原则去检验其中的渐变点[10]. Hušková在 1999年对定位模型中的变点问题做了更深入的研究, 提出了参数的最小二乘类型估计量并且讨论了模型中的渐变点的估计量的渐近性质[11]. Gupta

收稿日期: 2009-06-13

基金项目: 国家自然科学基金(10626028).

通讯联系人: 周秀轻, 博士, 副教授, 研究方向: 生存分析和回归分析. E-mail: zhouxiuqing@njnu.edu.cn

和 Ramanayake在2001年利用似然比检验统计量去检测一列独立指数随机变量中的变点问题,并得到了检验统计量的渐近性质[12].

对于时间序列中的变点问题的研究也有很多重要意义,已有不少学者研究过.如 Kokoszka和 Leipus在2000年利用 CUSUM统计量研究了 ARCH模型的参数变点问题,并且讨论了相应的统计性质[13]. Lee在2003年利用 CUSUM统计量研究了时间序列模型参数的变点问题[14]. Timmer和 Pignatiello在2003年研究了 AR(1)模型参数变点的检测方法,并将其用到实践中[15].王黎明在2008年对 AR(1)模型中白噪声序列的方差 σ^2 已知和未知情况下,利用极大似然法讨论了 AR(1)模型中的变点检验问题[16].本文对具有突变点的 AR(p)模型,在模型的白噪声序列的方差 σ^2 未知的条件下分别利用极大似然法和最小二乘法得到了模型的变突点的检验统计量及其渐近分布.

1 自回归模型中的变点检验问题

假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 AR(p)模型的一列随机序列:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \ t = p+1, \cdots, n, \tag{1}$$

其中 $\{\varepsilon_t\}$ 是 $i.i.d$ 的随机变量序列,分布为 $N(0, \sigma^2)$.

现在的检验问题如下:

$$H_0: X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \ t = p+1, \cdots, n;$$

$$H_1: \begin{cases} X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \ t = p+1, \cdots, k, \\ X_t = \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + \beta_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \ t = k+1, \cdots, n; \end{cases} \tag{2}$$

并且满足至少存在某个 $i(i = 1, \cdots, p)$ 使得 $\phi_i \neq \beta_i$.其中原假设 H_0 表示没有变点,备择假设 H_1 表示 k 为变点(k 为一未知正整数,且 $p < k \leqslant n$).下面将分别利用极大似然法和最小二乘法求出变点 k 的检验统计量,并得到统计量的渐近分布.

1.1 极大似然法

设在备择假设 H_1 和原假设 H_0 下的极大似然函数分别为 $L_{0_{\max}}$ 和 $L_{1_{\max}}$,令

$$\lambda_k = \frac{L_{0_{\max}}}{L_{1_{\max}}}, \tag{3}$$

$$\Lambda_k = -2\log\lambda_k, \tag{4}$$

则可取变点 k 的检验统计量为

$$\Lambda_n = \max_{p<k\leqslant n} \Lambda_k. \tag{5}$$

显然当 Λ_n 足够大时应拒绝 H_0,此时可得突变点 k 的估计为

$$\hat{k} = \arg\{k: \Lambda_n = \max_{p<k\leqslant n} \Lambda_k\}.$$

再令

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} x_p & x_{p-1} & \cdots & x_1 \\ x_{p+1} & x_p & \cdots & x_2 \\ \cdots & & & \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_{n-p} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} x_p & x_{p-1} & \cdots & x_1 \\ x_{p+1} & x_p & \cdots & x_2 \\ \cdots & & & \\ x_{k-1} & x_{k-2} & \cdots & x_{k-p} \end{pmatrix},$$

以及

$$\boldsymbol{B}_n = \begin{pmatrix} x_k & x_{k-1} & \cdots & x_1 \\ x_{k+1} & x_k & \cdots & x_2 \\ \cdots & & & \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_{n-k} \end{pmatrix},$$

其中 $p < k \leqslant n$. 关于 Λ_n 的渐近分布,我们有下述定理:

定理 1 令 $\{X_t;\ t = 1, 2\cdots n\}$ 为满足模型(1)的一时间序列,$\{\varepsilon_t\}$ 是 $i\ i\ d$ 的随机变量序列,分布为 $N(0, \sigma^2)$,当 $\boldsymbol{A}_k$ 和 $\boldsymbol{B}_n$ 列满秩时,在 H_0 下有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\Lambda_n - b_n(p+1)}{a_n(p+1)} \leqslant x\right\} = \exp\{-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\}, \tag{7}$$

其中 $\Lambda_n = \max_{p<k\leqslant n}\Lambda_k$, $b_n(d) = (2\ln\ln n + (d/2)\ln\ln\ln n - \ln\Gamma(d/2))^2/(2\ln\ln n)$, $a_n(d) = 2\ln\ln n + (d/2)\ln\ln\ln n - \ln\Gamma(d/2)/(2\ln\ln n)$, $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数.

证明 在给定 $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_p = x_p$ 时,原假设 H_0 下的似然函数为

$$\begin{aligned} L_0 = {} & f_{X_{p+1}|X_p,\cdots,X_1}(x_{p+1}\mid x_p,\cdots,x_1) f_{X_{p+2}|X_{p+1},\cdots,X_1}(x_{p+2}\mid x_{p+1},\cdots,x_1)\cdots f_{X_n|X_{n-1},\cdots,X_1}(x_n\mid x_{n-1},\cdots,x_1) = \\ & (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n-p}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=p+1}^{n}(x_i - \phi_1 x_{i-1} - \phi_2 x_{i-2} - \cdots - \phi_p x_{i-p})^2\right\}. \end{aligned}$$

令 $\dfrac{\partial L_0}{\partial \phi_j} = 0 (j = 1, \cdots, p)$,可得

$$\sum_{i=p+1}^{n}(x_i - \phi_1 x_{i-1} + \cdots - \phi_p x_{t-p})(x_{i-j}) = 0, j = 1, \cdots, p,$$

即

$$\phi_1\sum_{i=p+1}^{n} x_{i-1}x_{i-j} + \cdots + \phi_p\sum_{i=p+1}^{n} x_{i-p}x_{i-j} = \sum_{i=p+1}^{n} x_i x_{i-j}, j = 1, \cdots, p. \tag{8}$$

令

$$\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{pmatrix} x_p & \cdots & x_{p-j+2} & x_{p+1} & x_{p-j} & \cdots & x_1 \\ x_{p+1} & \cdots & x_{p-j+3} & x_{p+2} & x_{p-j+1} & \cdots & x_2 \\ \cdots & & & & & & \\ x_{n-1} & \cdots & x_{n-j+1} & x_n & x_{n-j-1} & \cdots & x_{n-p} \end{pmatrix},$$

则当 $\boldsymbol{A}_k$ 列满秩时有 $\boldsymbol{A}_n$ 列满秩,记 $d_n = |\boldsymbol{D}_n|$, $\boldsymbol{D}_n = \boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_n$, $d_{jn} = |\boldsymbol{D}_{jn}|$, $\boldsymbol{D}_{jn} = \boldsymbol{A}_{jn}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{jn}$. 由(8)式可得 ϕ_j 的极大似然估计 ϕ_{jn} 为

$$\phi_{jn} = \frac{d_{jn}}{d_n}, \quad j = 1, \cdots, p.$$

再令 $\dfrac{\partial L_0}{\partial \sigma^2} = 0$,可得 σ^2 的极大似然估计 σ_n^2 为

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-p}\sum_{i=p+1}^{n}(x_i - \phi_{1n}x_{i-1} - \cdots - \phi_{pn}x_{i-p})^2.$$

在给定 $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_p = x_p$ 时,备择假设 H_1 下的似然函数为

$$\begin{aligned} L_1 = {} & f_{X_{p+1}|X_p,\cdots,X_1}(x_{p+1}\mid x_p,\cdots,x_1)\cdots f_{X_k|X_{k-1},\cdots,X_1}(x_k\mid x_{k-1},\cdots,x_1)\times \\ & f_{X_{k+1}|X_k,\cdots,X_1}(x_{k+1}\mid x_k,\cdots,x_1)\cdots f_{X_n|X_{n-1},\cdots,X_1}(x_n\mid x_{n-1},\cdots,x_1) = \\ & (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n-p}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=p+1}^{k}(x_i - \phi_1 x_{i-1} - \cdots - \phi_p x_{i-p})^2\right\}\times \\ & \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=k+1}^{n}(x_i - \beta_1 x_{i-1} - \cdots - \beta_p x_{i-p})^2\right\}. \end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{A}_{jk} = \begin{pmatrix} x_p & \cdots & x_{p-j+2} & x_{p+1} & x_{p-j} & \cdots & x_1 \\ x_{p+1} & \cdots & x_{p-j+3} & x_{p+2} & x_{p-j+1} & \cdots & x_2 \\ \cdots & & & & & & \\ x_{k-1} & \cdots & x_{k-j+1} & x_k & x_{k-j-1} & \cdots & x_{k-p} \end{pmatrix},$$

当 $\boldsymbol{A}_k$ 列满秩时,记 $d_k = |\boldsymbol{D}_k|$, $\boldsymbol{D}_k = \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k$; $d_{jk} = |\boldsymbol{D}_{jk}|$, $\boldsymbol{D}_{jk} = \boldsymbol{A}_{jk}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{jk}$. 令 $\dfrac{\partial L_1}{\partial \phi_j} = 0$,可得 ϕ_j 的极大似然估计

$\hat{\phi}_{jk}$ 为

$$\hat{\phi}_{jk}=\frac{d_{jk}}{d_k},\ j=1,\cdots,p.$$

再令

$$\boldsymbol{B}_j=\begin{pmatrix} x_k & \cdots & x_{k-j+2} & x_{k+1} & x_{k-j} & \cdots & x_1 \\ x_{k+1} & \cdots & x_{k-j+3} & x_{k+2} & x_{k-j+1} & \cdots & x_2 \\ \cdots & & & & & & \\ x_{n-1} & \cdots & x_{n-j+1} & x_n & x_{n-j-1} & \cdots & x_{n-p} \end{pmatrix},$$

当 $\boldsymbol{B}_n$ 列满秩时,记 $d=|\boldsymbol{D}|$, $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_n$; $d_j=|\boldsymbol{D}_j|$, $\boldsymbol{D}_j=\boldsymbol{B}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_j$. 令 $\frac{\partial L_1}{\partial\beta_j}=0$,可得 β_j 的极大似然估计 $\hat{\beta}_j$ 为

$$\hat{\beta}_j=\frac{d_j}{d},\ j=1,\cdots,p.$$

最后令 $\frac{\partial L_1}{\partial\sigma^2}=0$,则可得 σ^2 的极大似然估计 $\hat{\sigma}_k^2$ 为

$$\hat{\sigma}_k^2=\frac{1}{n-p}\left\{\sum_{i=p+1}^{k}(x_i-\hat{\phi}_{1k}x_{i-1}-\cdots-\hat{\phi}_{pk}x_{i-p})^2+\sum_{i=k+1}^{n}(x_i-\hat{\beta}_1x_{i-1}-\cdots-\hat{\beta}_px_{i-p})^2\right\}.$$

由以上讨论可得在原假设 H_0 和备择假设 H_1 下的极大似然比函数为

$$\lambda_k=\frac{L_{0_{\max}}}{L_{1_{\max}}}=\left(\frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\sigma}_n^2}\right)^{(n-p)/2},\tag{9}$$

则有

$$\Lambda_n=\max_{p<k\leqslant n}\Lambda_k=\max_{p<k\leqslant n}(n-p)(\log\hat{\sigma}_n^2-\log\hat{\sigma}_k^2).\tag{10}$$

由上式利用[17]中定理2.2得

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\Lambda_n-b_n(p+1)}{a_n(p+1)}\leqslant x\right\}=\exp\left\{-2e^{-\frac{x}{2}}\right\}.$$

定理1得证.

1.2　最小二乘法

令 $\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_p)^{\mathrm{T}}$,设在 H_0 下自回归参数 ϕ 的最小二乘估计为

$$\hat{\phi}=(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2,\cdots,\hat{\phi}_p)^{\mathrm{T}}.$$

现考虑统计量

$$\hat{\varepsilon}_t=X_t-\hat{\phi}_1X_{t-1}-\hat{\phi}_2X_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_pX_{t-p},\ t=p+1,\cdots,n.\tag{11}$$

再令

$$y_n(k)=\sum_{t=p+1}^{k}\hat{\varepsilon}_t,\ p<k\leqslant n,$$

则可构造变点 k 的检验统计量为:

$$Y_n=\max_{p<k\leqslant n}|y_n(k)|.\tag{12}$$

显然当 Λ_n 足够大时应拒绝 H_0,此时可得突变点 k 的估计为

$$\hat{k}=\arg\{k;Y_n=\max_{p<k\leqslant n}|y_n(k)|\}.$$

关于 Y_n 的渐近分布,我们有下述定理:

定理2　令 $\{X_t;t=1,2,\cdots,n\}$ 为满足模型(1)的一时间序列,$\{\varepsilon_t\}$ 是 $i\ i\ d$ 的随机变量序列,分布为 $N(0,\sigma^2)$,自回归参数 ϕ 的最小二乘估计为 $\hat{\phi}$,则在 H_0 下有

$$\frac{1}{n^{1/2}\sigma}Y_n\xrightarrow{d}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|B_t|,\tag{13}$$

其中 $Y_n=\max_{p<k\leqslant n}|y_n(k)|$, B_t 为标准Brown运动,这里"$\xrightarrow{d}$"表示依分布收敛.

证明　由最小二乘法可知 $\hat{\phi}=(\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_n)^{-1}\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_n$,其中 $\boldsymbol{A}_n$ 的定义见(6)式,

$$\mathbf{Z}_n = \left(x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_n\right)^{\mathrm{T}}.$$

由[18]中定理2.1可知,在$D[0,1]$区间上有

$$\frac{1}{n^{1/2}\sigma} y_n([nt]) \xrightarrow{w} \{B_t, 0\leqslant t\leqslant 1\}.$$

令$x=(x_t, 0\leqslant t\leqslant 1)$, $y=(y_t, 0\leqslant t\leqslant 1)\in D[0,1]$,有

$$\left|\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} x_t - \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} y_t\right| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_t - y_t|.$$

故$f(x)=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} x_t$是$D[0,1]$上的右连续左极限存在的泛函,所以可得

$$\frac{1}{n^{1/2}\sigma}\max_{p<k\leqslant n}|y_n(k)| \xrightarrow{d} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|B_t|,$$

即

$$\frac{1}{n^{1/2}\sigma} Y_n \xrightarrow{d} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|B_t|.$$

定理2得证.

[参考文献]

[1] Page E S. Continuous inspection schemes[J]. Biometrika, 1954, 41(1/2): 100-115.

[2] 陈希孺. 只有一个转变点的模型的假设检验和区间估计[J]. 中国科学A辑, 1998, 8: 817-827.

[3] Csörgő, Horváth. Limit Theorems in Chang-Points Analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1997.

[4] 王黎明. 变点统计分析的研究进展[J]. Statistical Research, 2003, 1: 50-51.

[5] Hinkley D V. Inference about the change-point in asequence of random variables[J]. Biometrika, 1970, 56(1): 1-17.

[6] Hawkins D L. A simple least squares method for estimating a change in mean[J]. Communications in Statistics-Simulation, 1986, 15(3): 655-679.

[7] Worseley K J. Confidence regions and test for a change-point in a sequence of exponential family random variables[J]. Biometrika, 1986, 73(1): 91-104.

[8] 陈希孺. 变点统计分析简介[J]. 数理统计分析简介, 1991, 12: 52-58.

[9] Huang W T, Chang Y P. Nonparametric estimation in chage-point model[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1993, 35(3): 335-347.

[10] Jarušková D. Testing appearance of linear trend[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1998, 70(2): 263-276.

[11] Hušková M. Gradual changes versus abrupt changes[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1999, 76(1/2): 109-125.

[12] Gupta A K, Ramanayaske A. Change points with linear trend for the exponential distribution[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2001, 93(1): 181-195.

[13] Piotr Kokoszka, Remigijus Leipus. Change-point estimation in ARCH models[J]. Bernoulli, 2000, 6(3): 513-539.

[14] Sangyeol Lee, Jeongcheol Ha. The cusum test for parameter change in time series models[J]. Scandinavian Journal of Statistics, 2003, 30(4): 781-796.

[15] Timmer D H, Pignatiello J J. Change point estimates for the parameters of an AR(1) process[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2003, 19(4): 355-369.

[16] 王黎明. Testing for change-point of the first-order autoregressive time series models[J]. 应用概率统计, 2008, 24(1): 28-36.

[17] Richard A Davis, Dawei Huang, Yi-Ching. Testing for a change in the parameter values and order of an autoregressive model[J]. The Annals of Statistic, 1995, 23(1): 282-304.

[18] Kulperger R J. On the residuals of autoregressive processes and polunomial regression[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1985, 21(1): 107-118.

[责任编辑: 丁 蓉]