第 33卷第 2期 南京师大学报(自然科学版) Vol 33 No. 2
2010年 6月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition) Jun, 2010

星体的混合算术平均–调和平均不等式

袁 俊, 赵灵芝

(南京晓庄学院数学与信息技术学院, 江苏 南京 211171)

[摘要] 引入星体的混合平均的概念, 给出了混合算术平均–调和平均的几何版本, 建立了关于星体的混合算术平均–调和平均不等式. 设 $K_1, \cdots, K_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的星体, 则

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{K_1\tilde{+}K_2\tilde{+}\cdots\tilde{+}K_j}{j}\right)^{o}\right]^{o} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}K_k^{o}\right)^{o},$$

等号成立当且仅当 $K_1 = K_2 = \cdots = K_n$.

[关键词] 星体, 星对偶, 混合平均

[中图分类号] O186.5 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)02-0018-03

A Mixed Arithmetic-Mean-Harmonic-Mean Inequality for Star Bodies

Yuan Jun, Zhao Lingzhi

(School of Mathematics and Information Technology, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 211171, China)

Abstract In this paper, we introduce the mixed mean of star bodies and give the geometric version of mixed arithmetic-mean-harmonic-mean inequality. That is, if $K_1, \cdots, K_n$ are star bodies in $\mathbf{R}^n$, then

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{K_1\tilde{+}K_2\tilde{+}\cdots\tilde{+}K_j}{j}\right)^{o}\right]^{o} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}K_k^{o}\right)^{o},$$

with equality holds if and only if $K_1 = K_2 = \cdots = K_n$.

Key words star body, star dual, mixed mean

算术几何平均不等式是一个重要的分析不等式, 它在数学的众多分支中都有应用, 因此人们在推广算术几何平均不等式方面做了大量的工作(见[1–6]).

在文[1]中, Holland提出如下猜想:

设 $x_1, \cdots, x_n$ 是一列非负实数, 则

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_1+\cdots+x_i}{i}\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[i]{x_1\cdots x_i}, \tag{1}$$

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

在文[3]中, Kedlaya给出了(1)的肯定回答. 在文[2]和文[4]中, 作者们建立了Holland猜想的矩阵版本. 本文, 我们引入星体的混合平均的概念, 给出了Holland猜想的一个类似结果, 建立了关于星体的混合算术平均–调和平均不等式.

对星体 K, L, 我们用 $K\tilde{+}L$ 表示 K 和 L 的径向加, K^o 表示 K 的星对偶. 本文主要结果如下:

定理 1 设 $K_1, \cdots, K_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的星体, 则

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{K_1\tilde{+}K_2\tilde{+}\cdots\tilde{+}K_j}{j}\right)^{o}\right]^{o} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}K_k^{o}\right)^{o}, \tag{2}$$

收稿日期: 2009-10-13

基金项目: 国家自然科学基金(10971205)、南京晓庄学院人才引进科研基金(2009XZRC05).

通讯联系人: 袁 俊, 博士, 副教授, 研究方向: 凸体几何和几何不等式. E-mail: yuanjun_math@126.com

等号成立当且仅当 $K_1 = K_2 = \cdots = K_n$. 其中, $\sum$ 表示径向加, $K \geqslant L$ 表示 $K \supseteq L$

1　基础知识

我们考虑欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$, 其中 B_n 与 S^{n-1} 分别表示 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球及单位球面.

设 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中关于原点的星形集, 我们用 $\rho(K, \cdot)$ 表示 K 的径向函数[7,8],

$$\rho(K, \boldsymbol{u}) = \max\{\lambda \geqslant 0: \lambda\boldsymbol{u} \in K\}, \boldsymbol{u} \in S^{n-1}. \tag{3}$$

如果 $\rho(K, \cdot)$ 正的且连续, 则称 K 是一星体. 我们用 ϕ_o^n 表示 $\mathbf{R}^n$ 中星体的集合. 两个星体 $K, L \in \phi_o^n$, 如果比值 $\rho(K, \boldsymbol{u}) / \rho(L, \boldsymbol{u})$ 和 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$ 无关, 则称 K 和 L 是相互膨胀的.

由径向函数的定义容易得到: 如果 $K, L \in \phi_o^n$, 则对所有的 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$ 有

$$K \geqslant L \Leftrightarrow \rho(K, \boldsymbol{u}) \geqslant \rho(L, \boldsymbol{u}). \tag{4}$$

$\mathbf{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 的径向和定义如下: 如果 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 共线, 则 $\boldsymbol{x}_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} \boldsymbol{x}_r$ 是通常的向量加法, 否则为零向量.

如果 $K_1, \cdots, K_r \in \phi_o^n$ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbf{R}$, 则径向的 Minkowski 线性组合定义[7] 为:

$$\lambda_1 K_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} \lambda_r K_r = \{\lambda_1 x_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} \lambda_r x_r: x_i \in K_i\}.$$

容易证明: 对所有的 $K, L \in \phi_o^n$ 和 $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$,

$$\rho(\lambda_1 K_1 \tilde{+} \lambda_2 K_2, \boldsymbol{u}) = \lambda_1 \rho(K_1, \boldsymbol{u}) + \lambda_2 \rho(K_2, \boldsymbol{u}). \tag{5}$$

令 i 是 $\mathbf{R}^n$ 关于 S^{n-1} 的逐步紧化:

$$i(x) := \frac{x}{\| x \|^2}, x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

设 $K \in \phi_o^n$, 则星体 K 的星对偶 K^o 定义为[9,10]

$$K^o = cl(\mathbf{R}^n \setminus i(K)).$$

由星对偶的定义容易得到[9], 对任意 $\boldsymbol{u} \in S^{n-1}$, 有

$$\rho(K^o, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{\rho(K, \boldsymbol{u})}. \tag{6}$$

设 $K = (K_1, \cdots, K_n)$ 表示 n 个星体的集合, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 是 n 个正实数的集合, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. 下面我们定义 K 的加权算术平均为:

$$A_n(K; \lambda) = \lambda_1 K_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} \lambda_n K_n, \tag{7}$$

加权调和平均为:

$$H_n(K; \lambda) = (\lambda_1 K_1^o \tilde{+} \cdots \tilde{+} \lambda_n K_n^o)^o. \tag{8}$$

2　定理 1的证明

为了证明定理 1, 我们需要如下的引理:

引理 1[3]　$a(i, j) = (a_1(i, j), a_2(i, j), \cdots, a_n(i, j))$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 其中

$$a_k(i, j) = \binom{n-i}{j-k}\binom{i-1}{k-1} \Big/ \binom{n-1}{j-1} = \frac{(n-i)!\,(n-j)!\,(i-1)!\,(j-1)!}{(n-1)!\,(k-1)!\,(n-i-j+k)!\,(i-k)!\,(j-k)!}$$

满足如下性质:

(i) 对所有的 i, j, k 有 $a_k(i, j) \geqslant 0$;

(ii) 当 $k > \min(i, j)$ 时, $a_k(i, j) = 0$;

(iii) 对所有的 i, j, k 有 $a_k(i, j) = a_k(j, i)$;

(iv) 对所有的 i, j 有 $\sum_{k=1}^{n} a_k(i, j) = 1$;

(v) $\sum_{i=1}^{n} a_k(i, j) = \begin{cases} n/j & k \leqslant j \\ 0 & k > j \end{cases}$

引理 **2**　$K=(K_1,\cdots,K_n)$表示n个星体的集合，$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$是$n$个正实数的集合，且$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 则

$$A_n(K;\lambda)\geqslant H_n(K;\lambda), \tag{9}$$

等号成立当且仅当$K_1=K_2=\cdots=K_n$.

证明　对任意的$\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$，由(7)、(8)以及加权的算术－调和平均不等式[11,12]可得

$$\rho(A_n(K;\lambda),\boldsymbol{u})=\lambda_1\rho(K_1,\boldsymbol{u})+\lambda_2\rho(K_2,\boldsymbol{u})+\cdots+\lambda_n\rho(K_n,\boldsymbol{u})\geqslant$$
$$\frac{1}{\lambda_1\rho(K_1^o,\boldsymbol{u})+\lambda_2\rho(K_2^o,\boldsymbol{u})+\cdots+\lambda_n\rho(K_n^o,\boldsymbol{u})}=\rho(H_n(K;\lambda),\boldsymbol{u}),$$

等号成立当且仅当$\rho(K_1,\boldsymbol{u})=\rho(K_2,\boldsymbol{u})=\cdots=\rho(K_n,\boldsymbol{u})$对所有的$\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$成立，即$K_1=K_2=\cdots=K_n$. 结合(4)，引理得证.

引理 **3**　设$K_{ij}\in\Phi_o^n(1\leqslant i,j\leqslant n)$，则

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n K_{ij}\right)^o\right]^o\geqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n K_{ij}^o\right)^o. \tag{10}$$

等号成立当且仅当$\sum_{j=1}^n K_{1j},\sum_{j=1}^n K_{2j},\cdots,\sum_{j=1}^n K_{nj}$是相互扩张的.

证明　对任意的$\boldsymbol{u}\in S^{n-1}$，由(6)和Minkowski不等式[11,12]可得

$$\rho\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n K_{ij}\right)^o\right]^o,\boldsymbol{u}\right)=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\rho(K_{ij},\boldsymbol{u})\right)^{-1}\right]^{-1}\geqslant$$
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\rho(K_{ij},\boldsymbol{u})^{-1}\right)^{-1}=\rho\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n K_{ij}^o\right)^o,\boldsymbol{u}\right).$$

由Minkowski不等式的等号成立条件可得，(10)等号成立当且仅当$\sum_{j=1}^n\rho(K_{1j},\boldsymbol{u}),\sum_{j=1}^n\rho(K_{2j},\boldsymbol{u}),\cdots,\sum_{j=1}^n\rho(K_{nj},\boldsymbol{u})$成比例，即$\sum_{j=1}^n K_{1j},\sum_{j=1}^n K_{2j},\cdots,\sum_{j=1}^n K_{nj}$是相互扩张的.

结合(4)，引理得证.

定理 **1**的证明　我们用$A_n(i,j)$和$H_n(i,j)$表示算术平均$A_n(K;\lambda)$和调和平均$H_n(K;\lambda)$中的$\lambda=a(i,j)$. 由引理1的性质(i)和(iv)可知$A_n(i,j)$和$H_n(i,j)$是算术平均和调和平均. 由引理1的应用性质(ii)和性质(v)以及(9)，我们有

$$\frac{K_1\tilde{+}K_2\cdots\tilde{+}K_j}{j}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n K_k\sum_{i=1}^n a_k(i,j)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_n(i,j)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n H_n(i,j),$$

同时对上式两边取调和平均$(j=1,\cdots,n)$可得

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\left(\frac{K_1\tilde{+}K_2\cdots\tilde{+}K_j}{j}\right)^o\right]^o\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n H_n(i,j)\right]^o\right)^o, \tag{11}$$

而由(10)我们有

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n H_n(i,j)\right]^o\right)^o\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H_n(i,j)^o\right)^o. \tag{12}$$

由引理1的性质(iii)和性质(v)可得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n H_n(i,j)^o\right)^o=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_k(i,j)K_k^o\right)^o=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n K_k^o\sum_{j=1}^n a_k(i,j)\right)^o=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{i}\sum_{k=1}^i K_k^o\right)^o. \tag{13}$$

结合(11)，(12)和(13)可得

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\left(\frac{K_1\tilde{+}K_2\cdots\tilde{+}K_j}{j}\right)^o\right]^o\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{i}\sum_{k=1}^i K_k^o\right)^o.$$

(下转第25页)

从而由定理 6, 可得

$$V_{\Lambda\text{-}ess}(f; I) = V_\Lambda(g; I) \geqslant \inf_{\substack{g \in \Lambda BV(I) \\ f = g\ a.e\ x \in I}} V_\Lambda(g; I), \tag{2}$$

最后由 (1) 和 (2), 即得所证.

[参考文献]

[1] Waterman D. On convergence of fourier series of functions of generalized bounded variation[J]. Studia Math, 1972, 44: 107–117.

[2] Waterman D. On the summability of fourier series of functions of Λ-bounded variation[J]. Studia Math, 1976, 55: 97–109.

[3] Waterman D. On Λ-bounded variation[J]. Studia Math, 1976, 57: 33–45.

[4] 夏道行, 严绍宗. 实变函数与应用泛函分析基础[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.

[5] 周民强. 实变函数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.

[6] Paulo R Zingano, Stanly L Steinberg. On the hardy-littlewood theorem for functions of bounded variation[J]. Siam J Math Anal, 2002, 33(5): 1199–1210.

[责任编辑: 丁 蓉]

(上接第 20页)

由引理 2和引理 3的等号成立条件可得 (2) 等号成立当且仅当 $K_1 = K_2 = \cdots = K_n$. 定理 1得证.

有关平均值理论的一些新成果可参考文献 [5, 6]; 有关几何不等式的新成果可参考文献 [13, 14].

[参考文献]

[1] Holland F. On a mixed arithmetic-mean, geometric-mean inequality[J]. Math Competitions, 1992(5): 60-64.

[2] Hu Y J, Zhang X P, Yang Z H. Mixed mean inequalities for several positive definite matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2005, 395: 247–263.

[3] Kedlaya K. Proof of a mixed arithmetic-mean, geometric-mean inequality[J]. Amer Math Monthly, 1994, 101: 355-357.

[4] Mond B, Pečarič J. A mixed arithmetic-mean harmonic-mean matrix inequality[J]. Linear Algebra Appl, 1996, 237/238: 449-454.

[5] 孙燮华. 关于混合算术平均-几何平均不等式[J]. 中国计量学院学报, 2002, 13(1): 26-28.

[6] Yuan Jun, Li Aijun. Geometric version of mixed mean inequalities[J]. Tamkang J Math, 2009, 40(2): 129–137.

[7] Gardner R J. Geometric Tomography[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[8] Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[9] Moszyńska M. Quotient star bodies, intersection bodies and star duality[J]. J Math Anal Appl, 1999, 232(1): 45-60.

[10] Moszyńska M. Selected Topics in Convex Geometry[M]. Berlin: Springer Verlag, 2005.

[11] Beckenbach E F, Bellman R. Inequalities[M]. Berlin: Springer, 1961.

[12] Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[13] 袁俊. L_p 逆等周不等式[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2009, 32(2): 22-24.

[14] 朱先阳, 冷岗松. 混合新几何体 $\Gamma_{(-p,i)}K$ 的不等式[J]. 数学学报, 2008, 51(4): 787–794.

[责任编辑: 丁 蓉]