

几类图完美匹配的数目

唐保祥^{1, 2}, 任 韩²

(1. 天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001)

(2. 华东师范大学数学系, 上海 200062)

[摘要] 图的完美匹配的计数问题是匹配理论研究中的一个重要课题, 此问题与统计晶体物理中的 dimer 问题有关. 一般图的完美匹配计数问题是 NP- 难的. 本文给出了几类图的完美匹配数的显式表达式. 作为应用, 计算出了一些图的 Hamilton 圈的数目.

[关键词] 线性递推式, 完美匹配, Hamilton 圈, 边割

[中图分类号] O157.5 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)03-0001-060

The Number of Perfect Matching in Several Types of Graphs

Tang Baoxiang^{1, 2}, Ren Han²

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China)

(2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract Enumeration of perfect matchings of graphs is an important subject in the matching theory. It is much related with statistical physics of crystal dimer issue. But the enumeration problem for perfect matchings in general graphs is NP-hard. The explicit formulae for the number of the perfect matching in some types of graphs are deduced. As an application, the number of Hamilton cycles of some graphs has been calculated.

Key words linear recurrence relation, perfect matching, Hamilton cycle, edge cut

本文所指的图均是有限无向标号图 (即顶点间是有区别的), 未给出的定义见文献 [1].

图的完美匹配数作为一个很重要的拓扑指标, 已经在多个领域得到应用. 例如, 估计共振能量和 π -电子能量, 计算鲍林键级 (pauling bond order) 等^[2-4]. 物理学家 Kasteleyn 用匹配理论研究磁学伊辛 (Ising) 模型时, 首先提出用 Pfaffian 法计算图的完美匹配个数^[5, 6]. 目前, 图的完美匹配计数已经引起了众多数学家、物理学家和化学家的广泛关注^[7-9]. 遗憾的是, Valiant L 在 1979 年证明了, 一个图 (即使是偶图) 的完美匹配计数是 NP-难问题. 因此, 计算出一般图的完美匹配数是困难的, 特别是要得到显式的计算公式更加困难. 所以, 通常只有对具有特殊结构或形状的部分图, 才可以给出其完美匹配数的显式计算表达式. 目前, 已有一些文章对特殊图的完美匹配作了相关的研究^[10-15]. 本文运用组合递推方法给出了几类特殊图完美匹配数显式表达式的新结果. 作为应用, 计算出了一些图的 Hamilton 圈的数目.

定义 1 若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同, 则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同完美匹配.

定义 2 若图 G 的两个 Hamilton 圈 C_1 和 C_2 中有一条边不同, 则称 C_1 和 C_2 是 G 的两个不同 Hamilton 圈.

1 结果及其证明

引理^[14] 设两条长为 n 的路为 $P_1 = u_0 u_1 u_2 \cdots u_n$ 和 $P_2 = v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$, 分别连结路 P_1 和 P_2 上的顶点 u_i 和 v_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), 所得到的图记为 $Q_{1 \times n}$, 如图 1 所示. $f(n)$ 表示图 $Q_{1 \times n}$ 的所有不同的完美匹配数, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$, 则

收稿日期: 2010-04-28

基金项目: 国家自然科学基金 (10671073)、上海市自然科学基金 (07XD14011)、上海市重点学科建设基金 (B407).

通讯联系人: 唐保祥, 副教授, 研究方向: 图论和组合数学. E-mail: txb0618@sina.com

$$f(n) = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

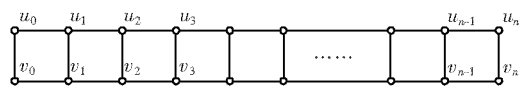


图 1 $Q_{1 \times n}$
Fig.1 $Q_{1 \times n}$

定理 1 设两条长为 n 的路为 $P_1 = u_0 u_1 u_2 \cdots u_n$ 和 $P_2 = v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$, 分别连结路 P_1 和 P_2 上的顶点 u_i 和 $v_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 所得到的图记为 $Q_{1 \times n}$; 连结图 $Q_{1 \times n}$ 的顶点 u_0 和 u_n, v_0 和 v_n 所得到的图记为 $D_{1 \times n}$, 如图 2 所示. $g(n)$ 表示图 $D_{1 \times n}$ 的所有不同的完美匹配数, 其中 $n = 1, 2, 3, \cdots$, 则

$$g(n) = \begin{cases} (2 + \sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + (2 - \sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}, & n \equiv 0 \pmod{2}; \\ (2 + \sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + (2 - \sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + 2, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

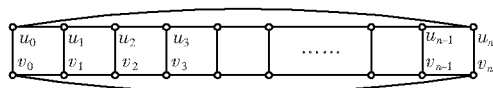


图 2 $D_{1 \times n}$
Fig.2 $D_{1 \times n}$

证明 设图 $D_{1 \times n}$ 的完美匹配的集合为 $M, M_i \subseteq M, i = 1, 2, 3$ 其中 $u_0 u_n \in M_1, u_0 u_1 \in M_2, u_0 v_0 \in M_3$. 显然有 $M_i \neq \phi (i = 1, 2, 3)$, 且 $M_i \cap M_j = \phi (i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3), M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$. 于是 $g(n) = |M| = |M_1| + |M_2| + |M_3|$.

求 $|M_1|$. 因为 $u_0 u_n \in M_1$, 所以 $|M_1|$ 与图 $D_{1 \times n}$ 的子图 G_1 (如图 3 所示) 的完美匹配数相等.

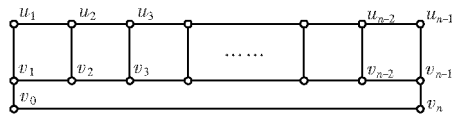


图 3 $D_{1 \times n}$ 的子图 G_1
Fig.3 Subgraph G_1 of $D_{1 \times n}$

- 情形 1 $v_0 v_n \in M_1$
由引理知, M_1 中图 $D_{1 \times n}$ 的这类完美匹配数为 $f(n - 2)$. $f(n)$ 的定义见引理.
- 情形 2 $v_0 v_n \notin M_1$

2.1 $n \equiv 1 \pmod{2}$
由图 3 知, 必有 $v_0 v_1, v_{n-1} v_n \in M_1$, 从而 $u_1 u_2, v_2 v_3, u_3 u_4, \cdots, v_{n-3} v_{n-2}, u_{n-2} u_{n-1} \in M_1$, M_1 中的这类完美匹配恰有 1 个.

2.2 $n \equiv 0 \pmod{2}$
由图 3 知, 必有 $v_0 v_1, v_{n-1} v_n \in M_1$, 从而 $u_1 u_2, v_2 v_3, u_3 u_4, \cdots, u_{n-3} v_{n-2}, v_{n-2} v_{n-1} \in M_1$. 故 M_1 中出现两边 $v_{n-2} v_{n-1}, v_{n-1} v_n$ 相邻. 矛盾. 因此, 若 $n \equiv 0 \pmod{2}$, 则 $v_0 v_1, v_{n-1} v_n \notin M_1$.

综上所述, $|M_1| = \begin{cases} f(n - 2), & n \equiv 0 \pmod{2}; \\ f(n - 2) + 1, & n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$ 其中 $f(n)$ 由引理所定义.

求 $|M_2|$. 因为 $u_0 u_1 \in M_2$, 故 $|M_2|$ 与图 $D_{1 \times n}$ 的子图 G_2 (如图 4 所示) 的完美匹配数相等.

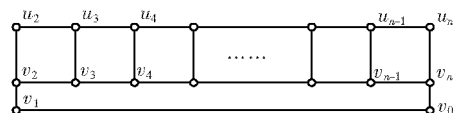


图 4 $D_{1 \times n}$ 的子图 G_2
Fig.4 Subgraph G_2 of $D_{1 \times n}$

情形 1 $v_0 v_1 \in M_2$

M_2 中这类完美匹配数为 $f(n-2)$.

情形 2 $v_0 v_1 \notin M_2$

这类情形类似于求 $|M_1|$ 的情形 2 当 $n \equiv 1(\bmod 2)$ 时, 恰有 M_2 中 1 个完美匹配; 当 $n \equiv 0(\bmod 2)$ 时, 不存在此类完美匹配. 所以 $|M_2| = \begin{cases} f(n-2), & n \equiv 0(\bmod 2); \\ f(n-2) + 1, & n \equiv 1(\bmod 2). \end{cases}$

求 $|M_3|$. 因为 $u_0 v_0 \in M_3$ 所以易知 $|M_3| = f(n-1)$.

综上所述,

$$g(n) = |M| = 2|M_1| + |M_3| = \begin{cases} f(n-1) + 2f(n-2) + 2, & n \equiv 1(\bmod 2); \\ f(n-1) + 2f(n-2), & n \equiv 0(\bmod 2). \end{cases}$$

$$\text{由引理得 } g(n) = \begin{cases} (2+\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + (2-\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}, & n \equiv 0(\bmod 2); \\ (2+\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + (2-\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + 2, & n \equiv 1(\bmod 2). \end{cases}$$

证毕.

定理 2 设两条长为 n 的路为 $P_1 = u_0 u_1 u_2 \dots u_n$ 和 $P_2 = v_0 v_1 v_2 \dots v_n$, 分别连结路 P_1 和 P_2 上的顶点 u_i 和 v_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), 所得到的图记为 $Q_{1 \times n}$. 连结图 $Q_{1 \times n}$ 的顶点 v_0 和 u_n , u_0 和 v_n 所得到的图记为 $S_{1 \times n}$, 如图 5 所示. $h(n)$ 表示图 $S_{1 \times n}$ 的所有不同的完美匹配数, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$, 则

$$h(n) = \begin{cases} (2+\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + (2-\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}, & n \equiv 1(\bmod 2); \\ (2+\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + (2-\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + 2, & n \equiv 0(\bmod 2). \end{cases}$$

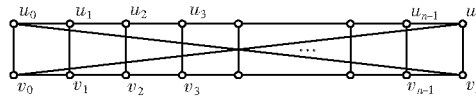


图 5 $S_{1 \times n}$

Fig.5 $S_{1 \times n}$

定理 2 的证明类似于定理 1

定理 3 设两条长为 n 的路为 $P_1 = u_0 u_1 u_2 \dots u_n$ 和 $P_2 = v_0 v_1 v_2 \dots v_n$, 分别连结路 P_1 和 P_2 上的顶点 u_i 和 v_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), u_j 和 v_{j+1} 以及 v_j 和 u_{j+1} ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$), 所得到的图记为 $W_{1 \times n}$, 如图 6 所示. $p(n)$ 表示图 $W_{1 \times n}$ 的所有不同的完美匹配数, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$, 则

$$p(n) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{1}{3} \cdot 2^{n+2}.$$

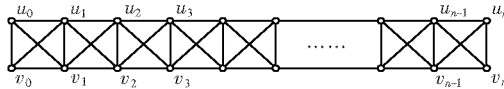


图 6 $W_{1 \times n}$

Fig.6 $W_{1 \times n}$

证明 设图 $W_{1 \times n}$ 的完美匹配的集合为 $M, M_i \in M, i = 1, 2, 3$ 其中 $u_0 v_0 \in M_1, u_0 v_1 \in M_2, u_0 u_1 \in M_3$. 显然有 $M_i \neq \phi$ ($i = 1, 2, 3$), 且 $M_i \cap M_j = \phi$ ($i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3$), $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ 于是 $p(n) = |M| = |M_1| + |M_2| + |M_3|$. 由定理 1 的证明方法和 $p(n)$ 的定义易知, $p(1) = 3, p(2) = 5, |M_1| = p(n-1), |M_2| = |M_3| = p(n-2)$. 因此,

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2), p(1) = 3, p(2) = 5 \quad (1)$$

解线性递推式 (1), 得 $p(n) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{1}{3} \cdot 2^{n+2}$. 证毕.

定理 4 设 $C_i = u_i v_i w_i$ 是 m 个长为 3 的圈 ($m \equiv 0(\bmod 2)$, $i = 1, 2, \dots, m$), 分别连结顶点 u_j 和 u_{j+1} , v_j 和 v_{j+1} , w_j 和 w_{j+1} ($j = 1, 2, \dots, m-1$), 所得图记为 Z_m , 如图 7 所示. 设 $m = 2n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $q(2n)$ 表示图 Z_m 的所有不同的完美匹配数, 则

$$q(2n) = \frac{7 - \sqrt{21}}{14} \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)^n + \frac{7 + \sqrt{21}}{14} \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

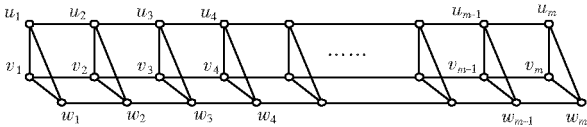


图 7 Z_m
Fig.7 Z_m

证明 设图 Z_m 的所有完美匹配的集合为 M , $M_i \subseteq M$, $i = 1, 2, 3$ 其中 $w_1 v_1 \in M_1$, $w_1 u_1 \in M_2$, $w_1 w_2 \in M_3$. 显然有 $M_i \neq \phi$ ($i = 1, 2, 3$), 且 $M_i \cap M_j = \phi$ ($i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$), $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$. 于是 $q(2n) = |M| = |M_1| + |M_2| + |M_3|$.

求 $|M_1|$. 因为 $w_1 v_1 \in M_1$, 所以必有 $u_1 u_2 \in M_1$. 因此, $|M_1|$ 与图 8 的完美匹配数相等.

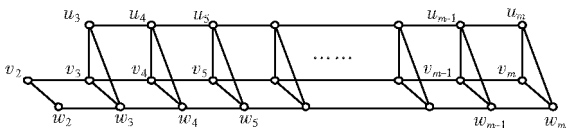


图 8 Z_m^1
Fig.8 Z_m^1

情形 1 $w_2 v_2 \in M_1$
因为 $w_2 v_2 \in M_1$, 所以由图 8 和 $q(2n)$ 的定义知, M_1 中这类完美匹配的数目为 $q(2n-2)$.

情形 2 $w_2 v_2 \notin M_1$
因为 $w_2 v_2 \notin M_1$, 所以由图 8 知, 必有 $v_2 v_3, w_2 w_3, u_3 u_4 \in M_1$. 因此, $|M_1|$ 与图 9 的完美匹配数相等. 故 M_1 中含边 $w_4 v_4$ 的这类完美匹配的数目为 $q(2n-4)$.

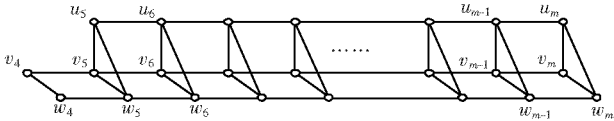


图 9 Z_m^2
Fig.9 Z_m^2

情形 3 $w_4 v_4 \notin M_1$
因为 $w_4 v_4 \notin M_1$, 所以由图 9 知, 必有 $v_4 v_5, w_4 w_5, u_5 u_6 \in M_1$. 因此, $|M_1|$ 与图 10 所示的图完美匹配数相等.

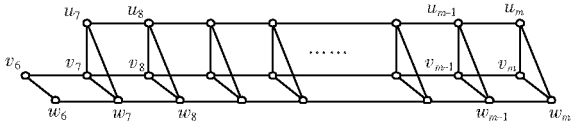
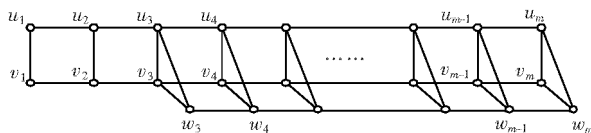


图 10 Z_m^3
Fig.10 Z_m^3

故 M_1 中含边 $w_6 v_6$ 的这类完美匹配的数目为 $q(2n-6)$.
...
情形 $n-1$ M_1 中含边 $w_{2n-2} v_{2n-2}$ 的这类完美匹配的数目为 $q(2)$.
情形 n M_1 中不含边 $w_{2n-2} v_{2n-2}$ 的这类完美匹配恰有 1 个.

综上所述, $|M_1| = \sum_{i=1}^{n-1} q(2i) + 1$. 同理可得, $|M_2| = \sum_{i=1}^{n-1} q(2i) + 1$

求 $|M_3|$. 因为 $w_1 w_2 \in M_3$, 所以, $|M_3|$ 与图 11 的完美匹配数相等.

图 11 Z_m^4 Fig.11 Z_m^4

由图 11 知, 若 $u_1 u_2, v_1 v_2 \in M_3$, 则 M_3 中这类完美匹配的数目为 $q(2n-2)$.

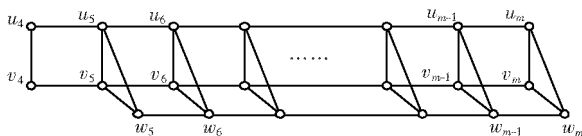
情形 1 $u_1 u_2, v_1 v_2 \notin M_3$

因为 $u_1 u_2, v_1 v_2 \notin M_3$, 所以必有 $u_1 v_1 \in M_3$. 若 $u_2 v_2 \in M_3$, 则 M_3 中这类完美匹配的数目也为 $q(2n-2)$.

情形 2 $u_1 v_1 \in M_3, u_2 v_2 \notin M_3$

因为 $u_2 v_2 \notin M_3$, 所以必有 $u_2 u_3, v_2 v_3, w_3 w_4 \in M_3$. M_3 中这类完美匹配的数与图 12 的完美匹配数相等.

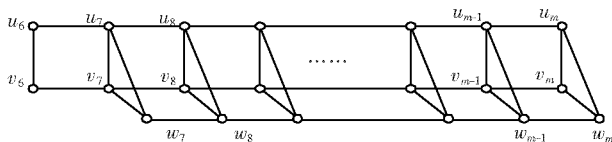
若 $u_4 v_4 \in M_3$, 则 M_3 中这类完美匹配的数目也为 $q(2n-4)$.

图 12 Z_m^5 Fig.12 Z_m^5

情形 3 $u_4 v_4 \notin M_3$

因为 $u_4 v_4 \notin M_3$, 所以必有 $u_4 u_5, v_4 v_5, w_5 w_6 \in M_3$. M_3 中这类完美匹配的数与图 13 的完美匹配数相等.

若 $u_6 v_6 \in M_3$, 则 M_3 中这类完美匹配的数目也为 $q(2n-6)$.

图 13 Z_m^6 Fig.13 Z_m^6

... 如此下去, 易知 $|M_3| = q(2n-2) + \sum_{i=1}^{n-1} q(2i) + 1$ 综上所述

$$q(2n) = q(2n-2) + 3 \sum_{i=1}^{n-1} q(2i) + 3 \quad (2)$$

易知 $q(2) = 4$ 于是由 (2) 式就有 $q(4) = 19$ 这样有递推式

$$q(2n) = 5q(2n-2) - q(2n-4), \quad q(2) = 4, \quad q(4) = 19. \quad (3)$$

解线性递推式 (3), 得 $q(2n) = \frac{7-\sqrt{21}}{14} \cdot \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2} \right)^n + \frac{7+\sqrt{21}}{14} \cdot \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2} \right)^n$. 证毕.

定理 5 设 $B_i = (V_i, E_i)$ 是偶图, 其中 $V_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}\}$, $E_i = \{x_{i1}y_{i3}, x_{i1}y_{i2}, x_{i2}y_{i1}, x_{i2}y_{i2}, x_{i3}y_{i3}, x_{i3}y_{i2}, x_{i3}y_{i1}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 分别连结顶点 y_{j1} 和 $x_{j+1,1}$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$), y_{n1} 和 x_{11} , 所得图记为 L_n , 如图 14 所示. $l(n)$ 表示图 L_n 的所有不同的完美匹配数, 则 $l(n) = 4^n + 2^n$.

证明 设图 L_n 的所有完美匹配的集合为 $M, M_i \subseteq M, i = 1, 2, 3$ 其中 $x_{11}y_{13} \in M_1, x_{11}y_{12} \in M_2, x_{11}y_{n1} \in M_3$, 显然有 $M_i \neq \emptyset (i = 1, 2, 3)$, 且 $M_i \cap M_j = \emptyset (i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3)$, $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ 于是 $l(n) = |M| = |M_1| + |M_2| + |M_3|$. 易知 $|M_1| = |M_2| = 2 \cdot 4^{n-1}, |M_3| = 2^n$. 故 $l(n) = |M| = |M_1| + |M_2| + |M_3| = 4^n + 2^n$. 证毕.

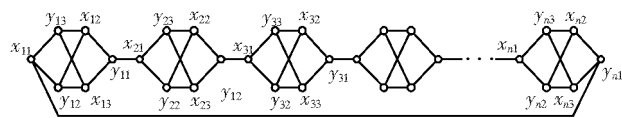


图 14 L_n

Fig.14 L_n

推论 定理 5 中图 L_n (图 14 所示) 的不同 Hamilton 圈共有 4^n 个.

证明 设图 L_n 的完美匹配的集合为 M , $F = \{y_{11}x_{21}, y_{21}x_{31}, \dots, y_{n-1,1}x_{n1}, y_{n1}x_{11}\}$. 则 F 是图 L_n 一个边割, 且 $M \cap F = \emptyset$ 或 $F \subseteq M$. 从图 L_n 的每个子图 $B_i = (V_i, E_i)$ 中选取边集 $\{y_{i3}x_{i2}, y_{i2}x_{i3}\}$ 或 $\{y_{i3}x_{i3}, y_{i2}x_{i2}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 共有 2^n 种不同的选取方法. 每种方法选出的这 $2n$ 条边与 F 中所有边恰好构成图 L_n 的 2^n 个不同的完美匹配. 图 L_n 中恰有这 2^n 个不同的完美匹配包含边割 F . 设图 L_n 的包含 F 的 2^n 个完美匹配的集合为 M_1 , 令 $M_2 = M \setminus M_1$, 则图 L_n 的 Hamilton 圈集合与 M_2 是一一对应的, 所以图 L_n 的不同 Hamilton 圈共有 4^n 个. 证毕.

[参考文献]

[1] Bondy J A, Murty U S R. 吴望名, 李念祖, 吴兰芳, 等译. 图论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1984

[2] Hall G G. A graphic model of a class of molecules [J]. Int J Math Edu Sci 1973, 4: 233-240

[3] Pauling L. The Nature of Chemical Bond [M]. Ithaca Univ Press 1939.

[4] Cyvin S J, Gutman I. Kekul structures in Benzenoid hydrocarbons [M]. Berlin: Springer Press 1988

[5] Kasteleyn P W. Graph theory and crystal physics [M] // Harary F. Graph Theory and Theoretical Physics. London: Academic Press 1967: 43-110.

[6] Lovasz L, Plummer M. Matching Theory [M]. New York: North-Holland Press 1986

[7] Ciucu M. Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry [J]. J Combin Theory Ser A, 1997, 77: 87-97.

[8] Fischer I, Little C H C. Even circuits of prescribed clockwise parity [J/OL]. Electron J Combin 2003, 10 [2010-04-20]. http://www.emis.de/journals/EJC/Volume_10/PDF/Vol10r45.pdf

[9] Jockusch W. Perfect matchings and perfect squares [J]. J Combin Theory Ser A, 1994, 67: 100-115.

[10] Brightwell G R, Winkler P, Hard C, et al. Adventures at the interface of combinatorics and statistical physics [J]. IM, 2002, III: 605-624.

[11] Zhang H P. The connectivity of Z-transformation graphs of perfect matchings of polyominoes [J]. Discrete Mathematics 1996, 158: 257-272

[12] Zhang H P, Zhang F J. Perfect matchings of polyomino graphs [J]. Graphs and Combinatorics 1997, 13: 259-304

[13] 张莲珠. 渺位四角系统完美匹配数的计算 [J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 1998, 37(5): 629-633.

[14] 张莲珠. 两类四角系统的匹配数与点独立集数 [J]. 数学研究, 1999, 32(3): 97-102

[15] 林泓, 林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算 [J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2005, 33(6): 704-710

[责任编辑: 丁 蓉]