关于多目标规划问题绝对最优解、有效解、弱有效解间的关系

刘亚威, 彭再云, 谭远顺

(重庆交通大学理学院数学与应用数学研究所, 重庆 400074)

[摘要] 在较弱的条件下讨论了一类多目标向量规划问题(VP)的绝对最优解集、有效解集、弱有效解集 (R_{ab}, R_{pa}, R_{wp})之间的关系, 并在较弱的条件下对单目标向量规划问题(P)与多目标向量规划问题(VP)解的关系做进一步讨论.

[关键词] 多目标规划, 绝对最优解, 有效解, 弱有效解

[中图分类号] O221.1 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)03-0019-03

Some Relations Among Absolutely Optimal Solutions, Effective Solutions and Weakly Effective Solutions for Multiobjective Programming Problem

Liu Yawei, Peng Zaiyun, Tan Yuanshun

(Institute of Mathematics, College of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: Some Relations among absolutely optimal solutions, effective solutions and weakly effective solutions of multiobjective vector programming problem (VP) are respectively obtained under two types of generalized convex condition. And then, the relationship of solutions which key to simple-objective vector programming problem (P) and multiobjective vector programming problem (VP) was discussed.

Key words: multiobjective programming, absolutely optimal solution, effective solution, weakly effective solution

多目标优化理论无论是在数学经济、工程,还是在管理科学、优化理论中都有着十分重要的地位,因此多目标优化问题的研究受到国内外运筹学专家的高度重视. 目前, 对于多目标规划问题(VP)及其对应的单目标规划问题(P)的研究越来越被大家重视[1-5],特别, 对于多目标规划问题(VP)解的最优性条件和对偶理论的研究及其各类解(绝对最优解、有效解、弱有效解)之间在一定条件下的关系的研究已成为研究的重点之一.

本文在相关文献[1-8]基础上, 在较弱的条件下讨论了一类多目标规划问题(VP)的绝对最优解集、有效解集、弱有效解集 (R_{ab}, R_{pa}, R_{wp}) 之间的关系; 并在较弱的条件下对单目标规划问题(P) 与多目标规划问题(VP) 解的关系做进一步讨论.

为了证明本文的主要结果, 我们先给出下面的定义及引理:

定义 **1**[1] (常用符号) 对于向量 $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 规定:

(i) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i = y_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$;

(ii) $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i < y_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$;

(iii) $\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i \leqq y_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$;

(iv) $\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 但至少存在一个 $1 \leqslant j \leqslant n$, 使 $x_j < y_j$, 即 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$.

定义 **2**[2] 设 $\boldsymbol{x}^* \in \mathbf{R}$, 如果不存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}$, 使得

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}^*) \ (\text{或}\ f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}^*)),$$

则称 $\boldsymbol{x}^* \in \mathbf{R}$是向量优化问题(VP)的有效解(或弱有效解).

收稿日期: 2010-04-26

基金项目: 国家自然科学基金(10771228)、重庆市教委科技项目(KJ100405, KJ080404)、重庆市教委高教研究课题(0635224).

通讯联系人: 刘亚威, 博士生, 讲师, 研究方向: 数字图像处理、向量优化理论. E-mail: yaweilcn@cqu.edu.cn

定义 3[3]　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集, 函数 $f: K\to\mathbf{R}$ 对于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$, $\forall\lambda\in[0,1]$ 满足

$$f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})<\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\},$$

则称 f 是 K 上的严格拟凸函数.

定义 4　设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 为凸集, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$, 如果 $f_i: X\to\mathbf{R}(i=1,\cdots,p)$ 是凸的(严格凸的、严格拟凸的), 那么称 $\boldsymbol{F}$ 为凸(严格凸、严格拟凸)向量函数, 简称为凸(严格凸、严格拟凸)函数.

定义 5[4,5]　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$, 如果存在向量函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, 使得 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\lambda\in[0,1]$, 有 $\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$, 则称集合 K 是关于 η 的不变凸集.

定义 6[6,7]　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集, 函数 $f: K\to\mathbf{R}$ 对于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$, $\forall\lambda\in[0,1]$ 如果满足 $f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$, 则称 f 是 K 上的严格预不变拟凸函数.

定义 7　设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 为不变凸集, 定义 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$, 如果 $f_i: X\to\mathbf{R}(i=1,\cdots,p)$ 是预不变凸(严格预不变凸)函数, 那么称 $\boldsymbol{F}$ 为预不变凸(严格预不变凸)向量函数, 简称为预不变凸(严格预不变凸)函数.

1　主要结果

在这一部分里, 我们主要讨论如下多目标规划问题(VP):

$$(\mathrm{VP})\ \min_{x\in\mathbf{R}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}},$$

其可行集为

$$I=\left\{\boldsymbol{x}\in E^n\ \middle|\ \begin{array}{l}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x}),\cdots,g_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\leqslant=0\\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=(h_1(\boldsymbol{x}),\cdots,h_l(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}=0\end{array}\right\},$$

其中向量函数

$$\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,\ g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m,\ h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^l.$$

记 R_{ab}, R_{pa}, R_{wp} 分别为(VP)的绝对最优解集、有效解集、弱有效解集. 于是有如下引理:

引理 1[2,4]　$R_{ab}\subseteq R_{pa}\subseteq R_{wp}\subseteq I$.

引理 2[2,4]　(i) 若 $R_{ab}\neq\varnothing$, 则 $R_{ab}=R_{pa}$,

(ii) 若 R 为凸集, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 为 R 上的严格凸向量函数, 则 $R_{pa}=R_{wp}$.

下面我们将在更弱的广义凸性条件下讨论上述多目标规划问题(VP)的绝对最优解集、有效解集、弱有效解集(R_{ab}, R_{pa}, R_{wp})之间的关系.

定理 1　若 I 为凸集, $\boldsymbol{F}(x)$ 为 I 上的严格拟凸向量函数, 则 $R_{pa}=R_{wp}$.

证明　由引理 1有 $R_{pa}\subseteq R_{wp}$, 于是只需证 $R_{pa}\supseteq R_{wp}$.

若不然, 假定存在 $\boldsymbol{x}^*\in R_{wp}$, 但 $\boldsymbol{x}^*\notin R_{pa}$, 则必存在 $\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}$ 且 $\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}\neq\boldsymbol{x}^*$, 使得

$$\boldsymbol{F}(\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}})\leqslant\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*).\tag{1}$$

因为 I 是凸集, 故对 $\forall\alpha\in(0,1)$, 有 $\alpha\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^*\in I$. 因为 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 为 I 上的严格拟凸向量函数, 并由(1)式, 可得

$$\boldsymbol{F}(\alpha\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^*)<\max\{\boldsymbol{F}(\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)\}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*),$$

这与 $\boldsymbol{x}^*\in R_{wp}$ 相矛盾. 因此必有 $R_{pa}\supseteq R_{wp}$. 证毕.

定理 2　(i) 若 I 为关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集, $\boldsymbol{F}(x)$ 为 I 上的严格预不变拟凸向量函数, 则 $R_{pa}\supseteq R_{wp}$.

(ii) 若 I 为不变凸集, $\boldsymbol{F}(x)$ 为 I 上的严格预不变拟凸向量函数, 且 $R_{ab}\neq\varnothing$, 则 $R_{ab}=R_{pa}=R_{wp}$.

证明　(i) 若 $R_{wp}\not\subset R_{pb}$, 假定存在 $\boldsymbol{x}^*\in R_{wp}$ 但 $\boldsymbol{x}^*\notin R_{pa}$, 则必存在 $\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}\in I$ 且 $\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}\neq\boldsymbol{x}^*$, 使得

$$\boldsymbol{F}(\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}})\leqslant\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*).\tag{2}$$

因为 I 为不变凸集, 则存在 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 对 $\forall\lambda\in(0,1)$, 有 $\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}+\lambda\eta(\boldsymbol{x}^*,\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}})\in I$. 已知 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 为 I 上的严格预不变拟凸向量函数, 则由(2)式, 可得 $\boldsymbol{F}(\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}+\lambda\eta(\boldsymbol{x}^*,\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}))<\max\{\boldsymbol{F}(\overset{\lessgtr}{\boldsymbol{x}}),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)\}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)$, 这与 $\boldsymbol{x}^*\in R_{wp}$ 相矛盾. 于是有 $R_{pb}\supseteq R_{wp}$.

(ii) 若 $R_{ab}\neq\varnothing$, 由引理 1、引理 2及(i)的结果, 显然 $R_{ab}=R_{pa}=R_{wp}$. 证毕.

下记单目标规划问题(P)

$$\min_{x \in \mathbf{R}} f_j(\boldsymbol{x}), \quad j = 1, \cdots, p,$$

其的最优解集为 R_j, 则用反证法易知 $R_{ab} = \bigcap_{j=1}^{p} R_j$ (当 $R_{ab} \neq 0$时), 且有如下引理:

引理 3[4] 若 R_j 为 (P) 的最优解集, R_{ab}, R_{pa}, R_{wp} 分别为 (VP) 的绝对最优解集、有效解集、弱有效解集, 则

$$R_j \subset R_{wp}, R_{pa} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_j \right) \subset R_{wp}.$$

下面将在较弱的条件下对规划问题 (P) 与 (VP) 的解的关系做进一步讨论.

定理 3 已知 R_j 为 (P) 的最优解集, R_{ab}, R_{pa}, R_{wp} 分别为 (VP) 的绝对最优解集、有效解集、弱有效解集. 假设 I为关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 为 I上的严格预不变拟凸向量函数, 则

$$R_{pa} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_j \right) = R_{wp} = R_{pa}.$$

证明 (i) 先证 $R_{pa} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_j \right) \supset R_{wp}$. 若不然, 假定 $\exists \boldsymbol{x}^* \in R_{wp}$ 但

$$\boldsymbol{x}^* \notin R_{pa} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_j \right),$$

即 $\boldsymbol{x}^* \notin R_{pa}$ 且 $\boldsymbol{x}^* \notin R_j$, 则存在 $\bar{\boldsymbol{x}} \in I$ 且 $\bar{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}^*$, 使得

$$\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*).$$

因为 I为关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, 所以存在 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 对 $\forall \lambda \in (0, 1)$, 有

$$\boldsymbol{x}^* + \lambda\eta(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}^*) \in I.$$

又因为 $\boldsymbol{F}(x)$ 为 I上的严格预不变拟凸向量函数, 并注意上式得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^* + \lambda\eta(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}^*)) < \max\{\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)\} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*).$$

由 $\lambda \in (0, 1)$ 的任意性, 可知

$$\boldsymbol{x}^* + \lambda\eta(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}^*) \in U(\boldsymbol{x}^*).$$

上面两式显然与 $\boldsymbol{x}^* \in R_{wp}$ 矛盾. 所以 $R_{pa} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_j \right) \supset R_{wp}$.

(ii) 由 (i) 有 $R_{pa} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_j \right) \supset R_{wp}$, 再由引理 3, 可得

$$R_{pa} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_j \right) = R_{wp}.$$

又由定理 4, 有 $R_{pb} = R_{wp}$. 所以可得到 $R_{pa} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_j \right) = R_{wp} = R_{pa}$. 证毕.

由定理 3, 显然可以得到下面两个推论.

推论 1 已知 R_j 为 (P) 的最优解集, R_{ab}, R_{pa}, R_{wp} 分别为 (VP) 的绝对最优解集、有效解集、弱有效解集. 如果 I为关于 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 的不变凸集, $\boldsymbol{F}(x)$ 为 I上的严格拟凸向量函数, 那么

$$R_{pa} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_j \right) = R_{wp} = R_{pa}.$$

推论 2[4] 已知 R_j 为 (P) 的最优解集, R_{ab}, R_{pa}, R_{wp} 分别为 (VP) 的绝对最优解集、有效解集、弱有效解集. 假设 I为凸集, $\boldsymbol{F}(x)$ 为 I上的严格凸向量函数, 则

$$R_{pa} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p} R_j \right) = R_{wp} = R_{pa}.$$

[参考文献]

[1] Mangasarian O L. Nonlinear Programming[M]. New York: McGraw Hill, 1969.

[2] 魏权龄, 王日爽. 数学规划与最优化[M]. 北京: 国防工业出版社, 1984.

[3] Weir T, Jeyakumar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1988, 38: 177-189.

[4] 林锉云, 董加礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春: 吉林教育出版社, 1992.

[5] Mohan S R, Neogy S K. On invex sets and preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 1995, 189(3): 901-908.

[6] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Characterazition and applications of prequasi-invex functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 110(3): 645-668.

[7] 彭再云, 雷鸣, 刘亚威, 等. 一类可微凸多目标分式规划的最优性条件[J]. 重庆交通大学学报: 自然科学版, 2009, 28(1): 156-158.

[8] Long X J, Peng Zaiyun, Zeng Bo. Remark on cone semistrictly preinvex functions[J]. Optim Lett, 2009, 3(3): 337-345.

[责任编辑: 丁　蓉]