L-模糊双拓扑空间的一组弱分离性

徐国华

(南京师范大学数学科学学院, 江苏, 南京, 210097)

[摘要] 在 L-模糊拓扑空间中, 对各种分离性及弱分离性已经进行了深入的研究, 还给出了 L-模糊拓扑空间的一组更弱的分离性. 本文在此基础上, 在 L-模糊双拓扑空间中定义一组弱分离性 $WP-T_i\left(i=0, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 3, 4\right)$ 并讨论它们之间的相互关系及一些性质.

[关键词] L-模糊拓扑空间, L-模糊双拓扑空间, WP-分离性

[中图分类号] O177.99　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2010)04-0013-06

A Set of Weak Separation Property in L-fuzzy Bitopological Spaces

Xu Guohua

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract Several different separation properties and weak separation axioms in L-fuzzy topological spaces have been studied. Specially, a set of more weak separation properties have been given. By this basis, we define a set of weak separation properties $WP-T_i\left(i=0, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 3, 4\right)$ in L-fuzzy bitopological spaces and discuss certain relationships among them and some properties.

Key words L-fuzzy topological space, L-fuzzy bitopological space, WP-separation properties

在 L-模糊拓扑空间中, 分离性是其重要的研究内容, 国内外已有不少有关的研究([1-4]), 特别在文[4]中给出了更一般的弱分离性, 另外在文[5]中也给出了有关的模糊双拓扑空间的一些分离性概念. 本文将在文[4]的基础上, 在 L-模糊双拓扑空间 $(L^x, \delta_1, \delta_2)$ 中给出一组相关的弱分离性, 即 $WP-T_0$, $WP-T_1$, $WP-T_{1\frac{1}{2}}$, $WP-T_2$, $WP-T_3$, $WP-T_4$ 分离性, 并讨论了它们之间的相互关系和一些性质.

1　预备知识

在本文中, X 是非空集合, L 表示具有逆合对应的完全分配格, 即模糊格, 0和 1分别表示 L 的最小元和最大元, $M(L)$ 表示 L 中全体分子之集, $M^*(L^X)$ 表示 L^X 中全体分子之集, δ_1, δ_2 分别为 L^X 中两个 L-模糊拓扑, $(L^x, \delta_1, \delta_2)$ 为 L-模糊双拓扑空间, δ'_1, δ'_2 分别表示 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 中的 δ_1-闭集族, δ_2-闭集族, 即 $\delta'_i=\{A \mid A' \in \delta_i\}(i=1, 2)$, 我们将分子 $x_\lambda\left(LF\text{集}A\right)$ 的一切闭远域之集记为 $\eta(x_\lambda)$ $(\eta(A))$, 常值 LF 集记为 α^* $(\alpha \in L)$, 其余没有定义的符号均来自于文[1].

为了讨论方便, 我们把 L-模糊拓扑空间 (L^X, δ) 中弱 T 分离性的有关概念[4]简述如下:

定义 **1**　设 $A \in L^X$, 若 $\exists\ \mu \in L-\{0\}$, 使得 $A(x) > 0$ 当且仅当 $A(x) \geqslant \mu$, $\forall x \in X$, 则称 A 为准分明 (LF) 集.

定义 **2**　设 A 为 L^X 中的一个准分明集, 令 $p(A)=\vee\{\mu \in L-\{0\} \mid A(x) > 0$ 当且仅当 $A(x) \geqslant \mu, \forall x \in X\}$, 则称 $p(A)$ 为准分明集 A 的分明度.

收稿日期: 2009-12-10
基金项目: 国家自然科学基金(10671094).
通讯联系人: 徐国华, 博士, 讲师, 研究方向: 模糊分析和拓扑. E-mail: xuguohua@njnu.edu.cn

注 1　若 A 为 L^X 中的准分明集,则当 $A(x)>0$ 时, $A(x)\geqslant p(A)>0$

注 2　A 为 L^X 中的分明 LF 集 $\Leftrightarrow p(A)=1$.

注 3　$x_\lambda\in L^X$, 则 $p(x_\lambda)=\lambda$.

定义 3　设 (L^X,δ) 为 L-模糊拓扑空间, $A\in L^X$, 若 $\mathrm{Supp}A=\mathrm{Supp}A$. 则称 A 是伪闭的.

定义 4　设 (L^X,δ) 为 L-模糊拓扑空间, 对 $\forall x_\lambda, y_\mu\in M^*(L^X)$, $x\neq y$.

(1) 若有 $P\in\eta(x_\lambda)$ 使得 $y_\mu\leqslant P$, 或有 $Q\in\eta(y_\mu)$ 使得 $x_\lambda\leqslant Q$, 则称 (L^X,δ) 为弱 T_0 空间, 简记为 WT_0 空间;

(2) 若有 $P\in\eta(x_\lambda)$ 和 $Q\in\eta(y_\mu)$, 使得 $y_\mu\leqslant P$ 且 $x_\lambda\leqslant Q$, 则称 (L^X,δ) 为弱 T_1 空间, 简记为 WT_1 空间;

(3) 若有 $P\in\eta(x_\lambda)$ 和 $Q\in\eta(y_\mu)$, 使得 $P\vee Q\supset(\lambda\vee\mu)^*$, 则称 (L^X,δ) 为弱 T_2 空间, 简记为 WT_2 空间.

定义 5　设 (L^X,δ) 为 L-模糊拓扑空间, 若对于 L^X 中任一非零准分明伪闭集 A 和 $x_\lambda\in M^*(L^X)$, 当 $x\notin\mathrm{Supp}A$ 时, 有 $P\in\eta(x_\lambda)$ 和 $Q\in\eta(A)$, 使得 $P\vee Q\supset[\lambda\vee p(A)]^*$, 则称 (L^X,δ) 为 W_3-正则空间, WT_1 的 W_3-正则空间, 称为 W_3T_3 空间.

定义 6　设 (L^X,δ) 为 L-模糊拓扑空间, 若对于 L^X 中任两非零准分明伪闭集 A 和 B, 当 $\mathrm{Supp}A\cap\mathrm{Supp}B=\Phi$ 时, 有 $P\in\eta(A)$ 和 $Q\in\eta(B)$, 使得 $P\vee Q\supset[p(A)\vee p(B)]^*$, 则称 (L^X,δ) 为 W_3-正规空间, WT_1 的 W_3-正规空间, 称为 W_3T_4 空间.

注 4　显然, $W_3T_4\Rightarrow W_3T_3\Rightarrow WT_2\Rightarrow WT_1\Rightarrow WT_0$.

2　L-模糊双拓扑空间 (L^X,δ_1,δ_2) 中 $WP-T_i$ 的分离性 $\left(i=0,1,1\frac{1}{2},2\right)$

定义 7　设 (L^X,δ_1,δ_2) 是 L-模糊双拓扑空间, 若 $\forall x_\lambda, y_\mu\in M^*(L^X)$, $x\neq y$, $\exists P\in\eta_1(x_\lambda)\cup\eta_2(x_\lambda)$, 使得 $y_\mu\leqslant P$, 或 $\exists Q\in\eta_1(y_\mu)\cup\eta_2(y_\mu)$, 使得 $x_\lambda\leqslant Q$, 则称 (L^X,δ_1,δ_2) 是 $WP-T_0$ 空间.

定义 8　设 (L^X,δ_1,δ_2) 是 L-模糊双拓扑空间, 若 $\forall x_\lambda, y_\mu\in M^*(L^X)$, $x\neq y$, $\exists P\in\eta_1(x_\lambda)\cup\eta_2(x_\lambda)$, 及 $Q\in\eta_1(y_\mu)\cup\eta_2(y_\mu)$, 使得 $y_\mu\leqslant P$, $x_\lambda\leqslant Q$, 则称 (L^X,δ_1,δ_2) 是 $WP-T_1$ 空间.

定义 9　设 (L^X,δ_1,δ_2) 是 L-模糊双拓扑空间, 若 $\forall x_\lambda, y_\mu\in M^*(L^X)$, $x\neq y$, $\exists P_1\in\eta_1(x_\lambda)$, $Q_1\in\eta_1(y_\mu)$, 及 $P_2\in\eta_2(x_\lambda)$, $Q_2\in\eta_2(y_\mu)$, 使得 $x_\lambda\leqslant Q_1\wedge Q_2$, $y_\mu\leqslant P_1\wedge P_2$, 则称 (L^X,δ_1,δ_2) 是 $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 空间.

定理 1　L-模糊双拓扑空间 (L^X,δ_1,δ_2) 为 $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 空间 $\Leftrightarrow(L^X,\delta_1)$, (L^X,δ_2) 均为 WT_1 空间.

定义 10　设 (L^X,δ_1,δ_2) 是 L-模糊双拓扑空间, 若 $\forall x_\lambda, y_\mu\in M^*(L^X)$, $x\neq y$, $\exists P_1\in\eta_1(x_\lambda)$, $Q_1\in\eta_1(y_\mu)$ 及 $P_2\in\eta_2(x_\lambda)$, $Q_2\in\eta_2(y_\mu)$ 使得 $P_1\vee Q_2\supset(\lambda\vee\mu)^*$, $P_2\vee Q_1\supset(\lambda\vee\mu)^*$, 则称 (L^X,δ_1,δ_2) 是 $WP-T_2$ 空间.

定理 2　设 (L^X,δ_1,δ_2) 是 L-模糊双拓扑空间, 则 $WP-T_2\Rightarrow WP-T_{1\frac{1}{2}}\Rightarrow WP-T_1\Rightarrow WP-T_0$.

证明　仅证明 $WP-T_2\Rightarrow WP-T_{1\frac{1}{2}}$, 其余结论显然成立.

(L^X,δ_1,δ_2) 是 $WP-T_2$ 空间 $\Rightarrow\forall x_\lambda, y_\mu\in M^*(L^X)$, $x\neq y$, $\exists P_1\in\eta_1(x_\lambda)$, $Q_1\in\eta_1(y_\mu)$ 且 $P_2\in\eta_2(x_\lambda)$, $Q_2\in\eta_2(y_\mu)$, 使得 $P_1\vee Q_2\supset(\lambda\vee\mu)^*$, $P_2\vee Q_1\supset(\lambda\vee\mu)^*$,

$\Rightarrow P_1(x)\vee Q_2(x)\geqslant\lambda\vee\mu\geqslant\lambda$, $P_2(x)\vee Q_1(x)\geqslant\lambda\vee\mu\geqslant\lambda$, 又

$$P_1(x)\ngeqslant\lambda, P_2(x)\ngeqslant\lambda\Rightarrow Q_2(x)\geqslant\lambda, Q_1(x)\geqslant\lambda\Rightarrow(Q_1\wedge Q_2)(x)\geqslant\lambda\Rightarrow x_\lambda\leqslant Q_1\wedge Q_2,$$

同理, $y_\mu\leqslant P_1\wedge P_2\Rightarrow(L^X,\delta_1,\delta_2)$ 是 $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 空间.

注 5　$WP-T_i\left(i=0,1,1\frac{1}{2},2\right)$ 为特殊的 L-模糊双拓扑空间.

例 1　设 $X=\{x,y\}$, $L=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$, $\delta_1=\{0,1\}$, $\delta_2=\{0,x_1\vee y_{\frac{1}{2}},1\}$, 则 (L^X,δ_1,δ_2) 为 L-模糊双拓扑空间. $\delta'_1=\{0,1\}$, $\delta'_2=\{0,y_{\frac{1}{2}},1\}$, 取 $x_{\frac{1}{2}}, y_1\in M^*(L^X)$, $x\neq y$, 则 $\eta_1\left(x_{\frac{1}{2}}\right)=\eta_1(y_1)=\{0\}$, $\eta_2(x_{\frac{1}{2}})=$

$\eta_2(y_1)=\{0, y_{\frac{1}{2}}\}$, 显然

$$\forall P\in \eta_1(x_{\frac{1}{2}})\cup \eta_2(x_{\frac{1}{2}})=\{0, y_{\frac{1}{2}}\},\ y_1\not\leqslant P,$$
$$\forall Q\in \eta_1(y_1)\cup \eta_2(y_1)=\{0, y_{\frac{1}{2}}\},\ x_{\frac{1}{2}}\not\leqslant Q.$$

所以 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 不是 $WP-T_0$ 空间.

注 **6** 定理 2中的 4类空间之间无其它蕴含关系, 有如下反例:

例 **2**

(1) 设 $X=\{x, y\}$, $L=\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $\delta_1=\{0, 1\}$, $\delta_2=\{0, y_1, 1\}$, 则 $\delta'_1=\{0, 1\}$, $\delta'_2=\{0, x_1, 1\}$, $\forall x_\lambda, y_\mu\in M^*(L^X)$, 只有 4种情形: $x_{\frac{1}{2}}$ 与 y_1, $x_{\frac{1}{2}}$ 与 $y_{\frac{1}{2}}$, x_1 与 y_1, x_1 与 $y_{\frac{1}{2}}$, 而 $\eta_1(x_{\frac{1}{2}})=\eta_1(x_1)=\{0\}$, $\eta_2(x_{\frac{1}{2}})=\eta_2(x_1)=\{0\}$, $\eta_1(y_{\frac{1}{2}})=\eta_1(y_1)=\{0\}$, $\eta_2(y_{\frac{1}{2}})=\eta_2(y_1)=\{0, x_1\}$, 易验证满足 $WP-T_0$ 的条件, 即 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 为 $WP-T_0$ 空间.

但显然, 取 $x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}\in M^*(L^X)$, $x\neq y$, 对 $\forall P\in \eta_1(x_{\frac{1}{2}})\cup \eta_2(x_{\frac{1}{2}})=\{0\}$, 有 $y_{\frac{1}{2}}\not\leqslant P$, 故 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 非 $WP-T_1$ 空间.

(2) 设 $X=\{x, y\}$, $L=\{0, a, b, 1\}$, 其中 a, b 不可比较大小, $a\vee b=1$, $a\wedge b=0$, $a'=b$, $b'=a$, $0'=1$, $1'=0$, 则 L 是模糊格[1], 取 $\delta'_1=\{0, x_a, y_b, x_a\vee y_b, 1\}$, $\delta'_2=\{0, x_b, y_a, x_b\vee y_a, 1\}$, 则 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 为 L-模糊双拓扑空间.

$\forall x_\lambda, y_\mu\in M^*(L^X)$, 只有 4种情形: x_a 与 y_a, x_a 与 y_b, x_b 与 y_a, x_b 与 y_b. 而 $\eta_1(x_a)=\{0, y_b\}$, $\eta_1(x_b)=\{0, x_a, y_b, x_a\vee y_b\}$, $\eta_1(y_a)=\{0, x_a, y_b, x_a\vee y_b\}$, $\eta_1(y_b)=\{0, x_a\}$, $\eta_2(x_a)=\{0, x_b, y_a, x_b\vee y_a\}$, $\eta_2(x_b)=\{0, y_a\}$, $\eta_2(y_a)=\{0, x_b\}$, $\eta_2(y_b)=\{0, x_b, y_a, x_b\vee y_a\}$.

易验证, $\exists P\in \eta_1(x_\lambda)\cup \eta_2(x_\lambda)$, 及 $Q\in \eta_1(y_\mu)\cup \eta_2(y_\mu)$, 使得 $y_\mu\leqslant P$, $x_\lambda\leqslant Q$, 故 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 是 $WP-T_1$ 空间.

但取 $x_a, y_b\in M^*(L^X)$, 则 $\forall Q_1\in \eta_1(y_b)$, $Q_2\in \eta_2(y_b)$, 有 $Q_1\wedge Q_2=0^*\Rightarrow x_a\not\leqslant Q_1\wedge Q_2$, 故 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 不是 $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 空间.

(3) 设 X 为无限集, L 为 (2) 中的模糊格, 取定 $u, v\in X$, $u\neq v$, 令 $\delta'_1=\{\chi_A \mid u\in A\}\cup\{\chi_B \mid u\notin B$ 且 B 为 X 的有限子集$\}$, $\delta'_2=\{\chi_C \mid v\in C\}\cup\{\chi_D \mid v\notin D$ 且 D 为 X 的有限子集$\}$, 则 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 为 L-模糊双拓扑空间.

$$\forall x_\lambda, y_\mu\in M^*(L^X),\ x\neq y,$$

当 $x\neq u$, $y\neq u$ 时, $\exists \chi_{\{y\}}\in \eta_1(x_\lambda)$, 使得 $y_\mu\leqslant \chi_{\{y\}}$, $\exists \chi_{\{x\}}\in \eta_1(y_\mu)$, 使得 $x_\lambda\leqslant \chi_{\{x\}}$.

当 $x=u$, $y\neq u$ 时, $\exists \chi_{\{y\}}\in \eta_1(x_\lambda)$, 使得 $y_\mu\leqslant \chi_{\{y\}}$, $\exists \chi_{\{x\}}\in \eta_1(y_\mu)$, 使得 $x_\lambda\leqslant \chi_{\{x\}}$.

即 $\exists P_1\in \eta_1(x_\lambda)$, $Q_1\in \eta_1(y_\mu)$, 使得 $y_\mu\leqslant P_1$, $x_\lambda\leqslant Q_1$, 故 (L^X, δ_1) 是 WT_1 空间. 同理可证, (L^X, δ_2) 也是 WT_1 空间, 所以, 由定理 1, 知 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 为 $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 空间.

但取 $u_a, v_b\in M^*(L^X)$, 有 $\eta_1(u_a)=\{\chi_B \mid u\notin B$ 且 B 为 X 的有限子集$\}$, $\eta_2(v_b)=\{\chi_D \mid v\notin D$ 且 D 为 X 的有限子集$\}$, 得 $\forall P_1\in \eta_1(u_a)$, 有 $P_1=\chi_B$; $\forall Q_2\in \eta_2(v_b)$, 有 $Q_2=\chi_D$ (B, D 为 X 的有限子集), 从而 $P_1\vee Q_2=\chi_B\vee\chi_D=\chi_{B\cup D}\not\supseteq(a\vee b)^*=1^*$, 所以, $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 不是 $WP-T_2$ 空间.

定理 **3** 设 $(X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 是分明双拓扑空间, 则 $(L^X, \omega_L(\mathscr{T}_1), \omega(\mathscr{T}_2))$ ($\omega_L(\mathscr{T}_1)$, $\omega_L(\mathscr{T}_2)$ 分别为由 $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ 在 L^X 上诱导的 L 模糊拓扑) 为 $WP-T_i$ 空间 $\Leftrightarrow (X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 是 $P-T_i$ ($i=0, 1, 2$) 空间.

证明　当 $i=0$ 时,

必要性　设 $(L^X, \omega_L(\mathscr{T}_1), \omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-T_0$ 空间, $\forall x, y\in X$, $x\neq y$, 任取 $\lambda\in M(L)$, 则 $x_\lambda, y_\lambda\in M^*(L^X)$. 由 $WP-T_o$ 性, 不妨设有 $P\in \eta_1(x_\lambda)\cup\eta_2(x_\lambda)$. 使得 $y_\lambda\leqslant P$. 令 $U=\{z\in X \mid P(z)\not\geqslant\lambda\}=\{z\in X \mid P'(z)\not\leqslant\lambda'\}$. 由 P' 是 L 值下半连续函数, 知 $U\in \mathscr{T}_1\cup\mathscr{T}_2$ 且显然 $x\in U$, $y\notin U$, 所以 $(X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 为 $P-T_0$ 空间.

充分性　设 $(X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 是 $P-T_0$ 空间, $\forall x_\lambda, y_\mu\in M^*(L^X)$, $x\neq y$, $\exists U\in \mathscr{T}_1\cup\mathscr{T}_2$, 使得 $x\in U$, $y\notin U$ 或 $x\notin U$, $y\in U$. 不妨设 $U\in \mathscr{T}_1\cup\mathscr{T}_2$, 使得 $x\in U$, $y\notin U$, 则由 $y\notin U$, 知 $y\in X-U$, 即 $y_\mu\leqslant \chi_{X-U}\in \omega_L(\mathscr{T}_1)'$

$\cup\ \omega_L(\mathscr{T}_2)'$, 且 $x\in U$, 知 $x\notin X-U$, 得 $x_\lambda\leqslant\chi_{X-U}$, 即 $\chi_{X-U}\in\eta_1(x_\lambda)\cup\eta_2(x_\lambda)$, 所以, $(L^X,\omega_L(\mathscr{T}_1),\omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-T_0$ 空间.

当 $i=1$ 时, 证明与 $i=0$ 时类似.

当 $i=2$ 时,

必要性　设 $(L^X,\omega_L(\mathscr{T}_1),\omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-T_2$ 空间, $\forall x,y\in X$, $x\neq y$, 任取 $\lambda\in M(L)$, 则 x_λ, $y_\lambda\in M^*(L^X)$, 由 $WP-T_2$ 性, 知 $\exists P_1\in\eta_1(x_\lambda)$, $Q_1\in\eta_1(y_\lambda)$, 及 $P_2\in\eta_2(x_\lambda)$, $Q_2\in\eta_2(y_\lambda)$, 使得 $P_1\vee Q_2\supset\lambda^*$, $P_2\vee Q_1\supset\lambda^*$, 令

$$U_1=\{z\in X\mid P_1(z)\ngeqslant\lambda\},\ V_1=\{z\in X\mid Q_1(z)\ngeqslant\lambda\},$$
$$U_2=\{z\in X\mid P_2(z)\ngeqslant\lambda\},\ V_2=\{z\in X\mid Q_2(z)\ngeqslant\lambda\},$$

则 $U_1,V_1\in\mathscr{T}_1$, $U_2,V_2\in\mathscr{T}_2$, 且 $x\in U_1$, $y\in V_1$, $x\in U_2$, $y\in V_2$, 使得 $U_1\cap V_2=\Phi$, $U_2\cap V_1=\Phi$. 事实上, 若 $\exists z\in U_1\cap V_2\Rightarrow P_1(z)\ngeqslant\lambda$, 且 $Q_2(z)\ngeqslant\lambda\Rightarrow(P_1\vee Q_2)(z)\ngeqslant\lambda$, 与 $P_1\vee Q_2\supset\lambda^*$ 矛盾!

同理可证另一个式子 $U_2\cap V_1=\Phi$. 所以 $(X,\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2)$ 为 $P-T_2$ 空间.

充分性　设 $(X,\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2)$ 为 $P-T_2$ 空间, $\forall x_\lambda,y_\mu\in M^*(L^X)$, $x\neq y$, 由 $P-T_2$ 性, 知 $\exists U_1,V_1\in\mathscr{T}_1$, U_2, $V_2\in\mathscr{T}_2$, 使得 $x\in U_1$, $y\in V_1$, $x\in U_2$, $y\in V_2$, 且 $U_1\cap V_2=\Phi$, $U_2\cap V_1=\Phi$. 即 $\chi_{X-U_1}\in\eta_1(x_\lambda)$, $\chi_{X-V_1}\in\eta_1(y_\mu)$, $\chi_{X-U_2}\in\eta_2(x_\lambda)$, $\chi_{X-V_2}\in\eta_2(y_\mu)$, 使得

$$\chi_{X-U_1}\vee\chi_{X-V_2}=\chi_{X-(U_1\cap V_2)}=\chi_X\supset(\lambda\vee\mu)^*,$$
$$\chi_{X-U_2}\vee\chi_{X-V_1}=\chi_{X-(U_2\cap V_1)}=\chi_X\supset(\lambda\vee\mu)^*,$$

所以 $(L^X,\omega_L(\mathscr{T}_1),\omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-T_2$ 空间.

定理 4　设 $(X,\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2)$ 是分明双拓扑空间, 则 $(L^X,\omega_L(\mathscr{T}_1),\omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 空间 $\Leftrightarrow(X,\mathscr{T}_i)$ 为 T_1 空间 $(i=1,2)$.

证明　由定理 1, 知

$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}_1),\omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 空间 $\Leftrightarrow(L^X,\omega_L(\mathscr{T}_1))$, $(L^X,\omega_L(\mathscr{T}_2))$ 均为 $W-T_1$ 空间.

又由文[2]定理 2.8, $(L^X,\omega_L(\mathscr{T}_i))$ 为 $W-T_1$ 空间 $\Leftrightarrow(X,\mathscr{T}_i)$ 为 T_1 空间 $(i=1,2)$. 即证.

3　L-模糊双拓扑空间 (L^X,δ_1,δ_2) 中的 $WP-T_i$ 分离性 $(i=3,4)$

定义 11　设 (L^X,δ_1,δ_2) 是 L-模糊双拓扑空间, 若对 $\forall x_\lambda\in M^*(L^X)$, 及准分明 δ_i-伪闭集 $A_i(i=1,2)$, 当 $x\notin \mathrm{Supp}A_1\cup\mathrm{Supp}A_2$ 时, 有 $P_1\in\eta_1(x_\lambda)$, $Q_1\in\eta_2(A_1)$, 使得 $P_1\vee Q_1\supset[\lambda\vee p(A_1)]^*$; 且 $P_2\in\eta_2(x_\lambda)$, $Q_2\in\eta_1(A_2)$, 使得 $P_2\vee Q_2\supset[\lambda\vee p(A_2)]^*$, 则称 (L^X,δ_1,δ_2) 是 WP-正则空间. $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 的 WP-正则空间称为 $WP-T_3$ 空间.

定理 5　设 $(X,\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2)$ 是分明双拓扑空间, 则 $(L^X,\omega_L(\mathscr{T}_1),\omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 WP-正则空间 $\Leftrightarrow(X,\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2)$ 是 P-正则空间.

证明　必要性　设 $(L^X,\omega_L(\mathscr{T}_1),\omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 WP-正则空间, $E_i\in\mathscr{T}_i'$, $x\notin E_i(i=1,2)$, 任取 $\lambda\in M(L)$, 则 $\chi_{E_i}\wedge\lambda^*\in\omega_L(\mathscr{T}_i)'$ 且为准分明 $\omega_L(\mathscr{T}_i)$-伪闭集, $p(\chi_{E_i}\wedge\lambda^*)=\lambda(i=1,2)$, 且 $x\notin\mathrm{Supp}(\chi_{E_1}\wedge\lambda^*)\cup\mathrm{Supp}(\chi_{E_2}\wedge\lambda^*)$, 由 WP-正则性, 得

$\exists P_1\in\eta_1(x_\lambda)$, $Q_1\in\eta_2(\chi_{E_1}\wedge\lambda^*)$ 及 $P_2\in\eta_2(x_\lambda)$, $Q_2\in\eta_1(\chi_{E_2}\wedge\lambda^*)$, 使得

$$P_1\vee Q_1\supset[\lambda\vee p(\chi_{E_1}\wedge\lambda^*)]^*=\lambda^*,\ P_2\vee Q_2\supset[\lambda\vee p(\chi_{E_2}\wedge\lambda^*)]^*=\lambda^*.$$

令

$$U_1=\{z\in X\mid P'_1(z)\nleqslant\lambda'\},\ V_1=\{z\in X\mid Q'_1(z)\nleqslant\lambda'\},$$
$$U_2=\{z\in X\mid P'_2(z)\nleqslant\lambda'\},\ V_2=\{z\in X\mid Q'_2(z)\nleqslant\lambda'\},$$

则 $U_1,V_2\in\mathscr{T}_1$, $U_2,V_1\in\mathscr{T}_2$. 又

$P_1(x)\ngeqslant\lambda\Rightarrow P'_1(x)\nleqslant\lambda'\Rightarrow x\in U_1$, $Q_1\in\eta_2(\chi_{E_1}\wedge\lambda^*)$, $\forall y\in E_1$, $(\chi_{E_1}\wedge\lambda^*)(y)=\lambda>0\Rightarrow\lambda\leqslant Q_1(y)\Rightarrow Q'_1(y)\nleqslant\lambda'\Rightarrow y\in V_1$, 即 $E_1\subset V_1$.

不难证明 $U_1\cap V_1=\Phi$, 若不然 $\exists z\in U_1$, $z\in V_1$, 使得

$P_1(z) \ngeq \lambda, Q_1(z) \ngeq \lambda \Rightarrow (P_1 \vee Q_1)(z) \ngeq \lambda$, 与 $P_1 \vee Q_1 \supset \lambda^*$ 矛盾!

同理可证 $x \in U_2, E_2 \subset V_2$, 且 $U_2 \cap V_2 = \phi$, 所以 $(X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 是 $P-$正则空间.

充分性　设 $(X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 是 $P-$正则空间.

$\forall x_\lambda \in M^*(L^X)$, 及准分明的 $\omega_L(\mathscr{T}_i)-$伪闭集 $A_i\ (i=1, 2)$, 当 $x \notin \mathrm{Supp}A_1 \cup \mathrm{Supp}A_2$ 时, 令 $E_1 = \{y \in X \mid A_1(y) \geqslant p(A_1)\} = \{y \in X \mid A'_1(y) \leqslant p(A_1)'\}$, 则 $E_1 \in \mathscr{T}'_1$, 而且 $x \notin \mathrm{Supp}A_1 = \mathrm{Supp}A_1 \Rightarrow A_1(x) = 0 \ngeq p(A_1) \Rightarrow x \notin E_1$, 由 $P-$正则性, 知 $\exists x \in U_1 \in \mathscr{T}_1, E_1 \subset V_1 \in \mathscr{T}_2$, 使得 $U_1 \cap V_1 = \phi$, 令 $P_1 = \chi_{X-U_1}$, $Q_1 = \chi_{X-V_1}$, 则 $P_1 \in \eta_1(x_\lambda), Q_1 \in \eta_2(A_1)$, 事实上,

$$P_1(x) = \chi_{X-U_1}(x) = 0 \ngeq \lambda \Rightarrow x_\lambda \nleqslant P_1 \in \omega_L(\mathscr{T}_1)' \Rightarrow P_1 \in \eta_1(x_\lambda);$$

$$\forall y \in X, A_1(y) > 0 \Rightarrow A_1(y) \geqslant p(A_1) \Rightarrow y \in E_1 \Rightarrow y \notin X - V_1$$

$$\Rightarrow Q_1(y) = \chi_{X-V_1}(y) = 0 \ngeq A_1(y) \text{ 且 } Q_1 \in \omega_L(\mathscr{T}_2)' \Rightarrow Q_1 \in \eta_2(A_1).$$

又 $P_1 \vee Q_1 = \chi_{X-U_1} \vee \chi_{X-V_1} = \chi_{X-(U_1 \cap V_1)} = \chi_X \supset [\lambda \vee p(A_1)]^*$, 同理可证, $\exists P_2 \in \eta_2(x_\lambda), Q_2 \in \eta_1(A_2)$, 使得 $P_2 \vee Q_2 \supset [\lambda \vee p(A_2)]^*$, 所以 $(L^X, \omega_L(\mathscr{T}_1), \omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-$正则空间.

定义 12　设 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 是 *L*–模糊双拓扑空间, 若 A_i 是准分明 δ_i-伪闭集 $(i=1, 2)$, 当 $\mathrm{Supp}A_1 \cap \mathrm{Supp}A_2 = \phi$ 时, 有 $P \in \eta_2(A_1), Q \in \eta_1(A_2)$, 使得 $P \vee Q \supset [p(A_1) \vee p(A_2)]^*$, 则称 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 是 $WP-$正则空间. $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 的 $WP-$正规空间称为 $WP-T_4$ 空间.

定理 6　设 $(X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 是分明双拓扑空间, 则 $(L^X, \omega_L(\mathscr{T}_1), \omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-$正规空间 $\Leftrightarrow (X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 是 $P-$正规空间.

证明　必要性　设 $(L^X, \omega_L(\mathscr{T}_1), \omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-$正规空间, $E_i \in \mathscr{T}'_i\ (i=1, 2)$, $E_1 \cap E_2 = \phi$, 则 $\chi_{E_i} \in \omega_L(\mathscr{T}_i)'$, 任取 $\lambda \in M(L)$, 有 $\chi_{E_i} \wedge \lambda^* \in \omega_L(\mathscr{T}_i)'\ (i=1, 2)$, 且 $\mathrm{Supp}(\chi_{E_1} \wedge \lambda^*) \cap \mathrm{Supp}(\chi_{E_2} \wedge \lambda^*) = E_1 \cap E_2 = \phi$, 又 $\chi_{E_i} \wedge \lambda^*$ 为准分明 $\omega_L(\mathscr{T}_i)-$伪闭集 $(i=1, 2)$, 由 $WP-$正规性, 知 $\exists P \in \eta_2(\chi_{E_1} \wedge \lambda^*), Q \in \eta_1(\chi_{E_2} \wedge \lambda^*)$, 使得 $P \vee Q \supset [p(\chi_{E_1} \wedge \lambda^*) \vee p(\chi_{E_2} \wedge \lambda^*)]^* = \lambda^*$.

令 $U = \{z \in X \mid P'(z) \nleqslant \lambda'\}$, $V = \{z \in X \mid Q'(z) \nleqslant \lambda'\}$, 则 $U \in \mathscr{T}_2, V \in \mathscr{T}_1$, 又 $\forall y \in E_1$, $(\chi_{E_1} \wedge \lambda^*)(y) = \lambda > 0 \Rightarrow \lambda \nleqslant P(y) \Rightarrow P'(y) \nleqslant \lambda' \Rightarrow y \in U$, 即 $E_1 \subset U$.

同理可证, $E_2 \subset V$.

不难证明 $U \cap V = \phi$, 事实上, 若 $\exists z \in U, z \in V \Rightarrow P'(z) \nleqslant \lambda'$ 及 $Q'(z) \nleqslant \lambda' \Rightarrow P(z) \ngeq \lambda, Q(z) \ngeq \lambda \Rightarrow (P \vee Q)(z) \ngeq \lambda$ 与 $P \vee Q \supset \lambda^*$ 矛盾!

故 $(X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 是 $P-$正规空间.

充分性　设 $(X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 是 $P-$正规空间.

设 A_i 是准分明的 $\omega_L(\mathscr{T}_i)-$伪闭集 $(i=1, 2)$, 且 $\mathrm{Supp}A_1 \cap \mathrm{Supp}A_2 = \phi$, 令 $E_i = \{x \in X \mid A_i(x) \geqslant p(A_i)\}\ (i=1, 2)$, 则 E_i 是 $\mathscr{T}_i-$闭集 $(i=1, 2)$, 且 $E_1 \cap E_2 = \phi$.

事实上, 若 $\exists z \in E_1 \cap E_2$, 则 $A_1(z) \geqslant p(A_1) > 0, A_2(z) \geqslant p(A_2) > 0$ 由 A_1, A_2 是准分明的伪闭集, 知 $A_1(z) > 0, A_2(z) > 0 \Rightarrow z \in \mathrm{Supp}A_1 \cap \mathrm{Supp}A_2$, 矛盾!

由 $P-$正规性, 知 $\exists U \in \mathscr{T}_2, V \in \mathscr{T}_1$, 使得 $E_1 \subset U, E_2 \subset V, U \cap V = \phi$, 令 $P = \chi_{X-U}, Q = \chi_{X-V}$, 则 $P \in \eta_2(A_1), Q \in \eta_1(A_2)$, 事实上, $\forall x \in X, A_1(x) > 0 \Rightarrow A_1(x) \geqslant p(A_1) \Rightarrow x \in E_1 \Rightarrow x \notin X - U \Rightarrow P(x) = \chi_{X-U}(x) = 0 \ngeq A_1(x) \Rightarrow P \in \omega_L(\mathscr{T}_2)' \Rightarrow P \in \eta_2(A_1)$, 同理, $Q \in \eta_1(A_2)$, 而且 $P \vee Q = \chi_{X-(U \cap V)} = \chi_X \supset [p(A_1) \vee p(A_2)]^*$. 故 $(L^X, \omega_L(\mathscr{T}_1), \omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-$正规空间.

定理 7　设 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 是 *L*–模糊双拓扑空间, 则 $WP-T_4 \Rightarrow WP-T_3 \Rightarrow WP-T_2$.

证明　先证 $WP-T_4 \Rightarrow WP-T_3$.

设 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 是 $WP-T_4$ 空间, $\forall x_\lambda \in M^*(L^X)$, A_i 是准分明 δ_i-伪闭集 $(i=1, 2)$, $x \notin \mathrm{Supp}A_1 \cup \mathrm{Supp}A_2$, 由 $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 性及定理 1, 文 [2] 定理 2.4 得 x_λ 是准分明 δ_i-伪闭集 $(i=1, 2)$. 由 $x \notin \mathrm{Supp}A_1$, 即 $\mathrm{Supp}x_\lambda \cap \mathrm{Supp}A_1 = \phi$, 且 x_λ 是准分明 δ_2-伪闭集, 及 $WP-$正规性, 知 $\exists P_1 \in \eta_1(x_\lambda), Q_1 \in \eta_2(A_1)$, 使得 $P_1 \vee Q_1 \supset [\lambda \vee p(A_1)]^*$. 同理, 由 $x \notin \mathrm{Supp}A_2$, 即 $\mathrm{Supp}x_\lambda \cap \mathrm{Supp}A_2 = \phi$, 且 x_λ 是准分明 δ_1-伪闭集, 知 $\exists P_2 \in \eta_2(x_\lambda)$. $Q_2 \in \eta_1(A_2)$, 使得 $P_2 \vee Q_2 \supset [\lambda \vee p(A_2)]^*$. 综上, 知 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 是 $WP-T_3$ 空

间.

再证 $WP-T_3 \Rightarrow WP-T_2$.

设 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 是 $WP-T_3$ 空间, $\forall x_\lambda, y_\mu \in M^*(L^X)$, $x \neq y$, 由 $WP-T_{1\frac{1}{2}}$ 性及定理 1、文[2]定理 4知 y_μ 是准分明 δ_i-伪闭集($i=1,2$). 由 $x \notin \mathrm{Supp}y_\mu \cup \mathrm{Supp}y_\mu$, 且 y_μ 既为 δ_1-伪闭集又为 δ_2-伪闭集, 及 WP-正则性, 知

$\exists P_1 \in \eta_1(x_\lambda), Q_2 \in \eta_2(y_\mu)$, 使得 $P_1 \vee Q_2 \supset [\lambda \vee p(y_\mu)]^* = (\lambda \vee \mu)^*$;

及 $\exists P_2 \in \eta_2(x_\lambda), Q_1 \in \eta_1(y_\mu)$, 使得 $P_2 \vee Q_1 \supset [\lambda \vee p(y_\mu)]^* = (\lambda \vee \mu)^*$.

即证得 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 是 $WP-T_2$ 的空间.

注 7　定理 7中的 3类空间之间无其它的蕴含关系.

例 3　设 $(\mathbf{R}, \mathscr{T})$ 为实数空间, 令 $K_1=\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in Z_+\right\}$, $\mathscr{T}_1=\{G-E \mid G \in \mathscr{T}, E \subset K_1\}$, 则 $\mathscr{T}_1$ 为 $\mathbf{R}$ 上的一个分明拓扑; 令 $K_2=\mathbf{Q}$, $\mathscr{T}_2=\{G-E \mid G \in \mathscr{T}, E \subset K_2\}$, 则 $\mathscr{T}_2$ 也为 $\mathbf{R}$ 上的一个分明拓扑, 故 $(\mathbf{R}, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 为一个分明双拓扑空间. 由 $(\mathbf{R}, \mathscr{T})$ 为 T_2 空间, 及 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_1$, $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_2$ 推得 $(\mathbf{R}, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 为 $P-T_2$ 空间. 又对于点 $0 \notin K_1 \in \mathscr{T}'_2$, 易证 $\forall 0 \in U \in \mathscr{T}_2, K_1 \subset V \in \mathscr{T}_1$, 有 $U \cap V \neq \phi \Rightarrow (\mathbf{R}, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 不是 P-正则空间.

由定理 3及定理 5知, 若 L 为任一模糊格, 则 L-模糊双拓扑空间 $(L^R, \omega_L(\mathscr{T}_1), \omega_L(\mathscr{T}_2))$ 是 $WP-T_2$ 空间, 但非 WP-正则空间, 更非 $WP-T_3$ 空间.

类似地, 可找到分明双拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$ 为 $P-T_3$ 空间, 但非 $P-T_4$ 空间. 由定理 5及定理 6知 $WP-T_3$ 空间推不出 $WP-T_4$ 空间.

推论 1　在 L-模糊双拓扑空间 $(L^X, \delta_1, \delta_2)$ 中,

$WP-T_4 \Rightarrow WP-T_3 \Rightarrow WP-T_2 \Rightarrow WP-T_{1\frac{1}{2}} \Rightarrow WP-T_1 \Rightarrow WP-T_0$, 反之不然.

[参考文献]

[1] 王国俊. L-fuzzy拓扑空间论[M]. 西安: 陕西师大出版社, 1988.

[2] 方锦暄, 任百林. L-模糊拓扑空间的弱分离公理[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 1994, 17(4): 1-8.

[3] Fang Jinxuan, Ren Bailin. A set of new separation axioms in L-fuzzy topological spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 96: 359-366.

[4] 徐国华, 方锦暄. L-模糊拓扑空间的一组新的弱分离公理[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2006, 29(3): 1-4.

[5] Das N R, Das P. Fuzzy bitopological space induced by fuzzy quasi pseudo morm and its conjugate[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 119: 539-542.

[责任编辑: 丁　蓉]