

双频标准映射不变环面的破裂

曾令宏¹, 陈媛媛², 周济林²

(1 柳州师范高等专科学校, 广西 柳州 545004)

(2 南京大学天文系, 江苏 南京 210093)

[摘要] 利用旋转数方法以及周期轨道方法确定了双频标准映射中最后一个不变环面破裂的频率为 $(73 + 13\sqrt{5}) / (309 + 55\sqrt{5})$, 属于黄金分割频率族, 其在连分数展开下具有 $[4, 4, 3, 3, 1, \dots, 1, \dots]$ 的形式. 该环面破裂的临界摄动参数约为 0.4476. 与单频标准映射相比, 增加激发频率可以导致最后一个环面的临界摄动参数减小, 使得系统的全局不稳定性增加, 一些轨道更容易扩散到相空间作用量较大的地方.

[关键词] 保守系统, KAM 环面, 临界现象, 轨道扩散

[中图分类号] O415.5 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)04-0039-05

Breakup of Last KAM Torus in Double-Frequency Standard Map

Zeng Linghong¹, Chen Yuanyuan², Zhou Jilin²

(1 L iuzhou Teachers College, L iuzhou 545004 China)

(2 Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Abstract The last KAM torus in the double-frequency standard map under perturbation is investigated with the methods of rotation number and periodic orbits. It has frequency $(73 + 13\sqrt{5}) / (309 + 55\sqrt{5})$, which belongs to the Golden mean group and has the form of $[4, 4, 3, 3, 1, \dots, 1, \dots]$ under continuation fraction expansion. The critical perturbation parameter is roughly 0.4476 for this tori. As compared with the last KAM torus in the standard map, the additional excitation frequency decreases the critical perturbation parameter, which increases the instability of the system, thus some orbits can be easier to diffuse away in the phase space.

Key words conservative systems, KAM tori, critical phenomenon, orbital diffusion

保守系统是一类重要的动力系统, 以相空间任一区域的相体积随时间演化不变为特征. 哈密顿系统是保守系统的典型代表. 一般哈密顿系统通常是不可积的, 因此不能得到一般解的分析表达式及其稳定性. 天体力学中的牛顿 N 体系统就是不可积系统的重要范例^[1]. 但自然界有很多哈密顿系统为近可积的, 如描述太阳系大行星运动的系统, 由于行星之间的摄动比较小, 忽略行星之间相互摄动就是可积的二体运动. KAM 定理证明了, 对于满足一定可微条件的非退化可积哈密顿系统, 在充分小扰动下存在充分多的不变环面. 不变环面上的轨道是拟周期的, 因此是有界的. 对于两个自由度的哈密顿系统, 二维不变环面的存在可以保证环面内的轨道不扩散到环面外, 从而保证环面内轨道的稳定性.

当摄动参数足够大时, 系统多数不变环面已经破裂, 相空间轨道充分混沌, 处于混沌区的一些轨道可以扩散到相空间很远的区域. 对于二维映射, 轨道的全局扩散只有在全局不变环面破裂后才有可能发生, 因此确定最后一个不变环面存在的最大摄动参数对实际系统的稳定性有重要的意义. 尽管 KAM 定理给出的环面破裂的临界参数充分小, 在实际的物理系统中, 不变环面存在的最大摄动参数往往会比较大. 一个典型的模型是标准映射, 它描述了周期激励下旋转子的运动:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + K \sin y_n \\ x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi} \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2010-10-02

基金项目: 国家科技部“973”计划 (2007CB814800)、国家自然科学基金 (10833001)、教育部博士点基金 (20090091110002).

通讯联系人: 曾令宏, 副教授, 研究方向: 应用物理与非线性物理. E-mail: ZLH8188@163.com

最难破裂的环面具有黄金分割数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的频率,其破裂的临界摄动参数可以达到 $K=0.971\,635\,4\dots$ ^[2].摄动参数充分大时,系统几乎全是混沌轨道,研究其中的轨道扩散一直是哈密顿动力系统的经典课题.例如:文献[3]研究了具有多个激发频率项的标准映射

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + K \sum_{j=1}^n \sin jx_n, \\ x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi}. \end{cases} \tag{2}$$

并得到KS熵随摄动参数变化的分析表达式.文献[4]研究了三自由度哈密顿系统中轨道扩散规律.研究保守系统最后一个环面的破裂及其临界参数,大致有2个方向.一是研究高维映射,例如文献[5,6]研究了2个标准映射耦合得到的四维标准映射,探讨了其中最后1个不变环面破裂的临界参数以及临界标度率.然而,由于高维映射不变环面频率组的有理数逼近牵涉到数论中一些未解决的难题,该方向近年来研究进展不大.另一个方向是将标准映射推广到更实际的二维映射.标准映射只有一个频率的激发项.一般物理系统会具有更多的频率项,例如文献[7]在研究彗星运动时,得到的保面积映射模型就具有多个频率项.本文以1个具有2个频率项的二维映射为例,利用两种方法:旋转数方法和周期轨道方法研究其最后1个不变环面的破裂情况.

1 模型与方法

本文采用以下形式的双频标准映射,

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + K(\sin x_n + \sin 2x_n), \\ x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi}. \end{cases} \tag{3}$$

其中 y_n, x_n 分别为作用量和角变量, K 为摄动参数.

旋转数方法就是通过旋转数的计算来确定一条轨道所在环面(或者环面破裂后的不变集)的频率.一条轨道的旋转数定义为:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{2\pi n}. \tag{4}$$

对1组尚未破裂的不变环面而言,其频率随 y_n 的增加单调增加.对周期轨道附近的不变岛屿,其频率随 y_n 的增加为有理数平台.

最后破裂的环面具有的频率一般是远离有理数的、满足Diophantine条件的无理数.一个无理数离有理数的远近可以用无理数的有理逼近来描述,其中最佳逼近方法是连分数展开方法.对于 $[0,1]$ 中任意一个无理数 ω ,通过如下定义得到一组整数序列 a_i :

$$a_i = [1/\omega_i], \quad \omega_{i+1} = \frac{1}{\omega_i} - a_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \omega_1 = \omega, \tag{5}$$

其中方括号代表取不大于该实数的整数部分.于是 ω 在连分数展开可以表示成:

$$\omega = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \tag{6}$$

或者简记成 $\omega = [a_1, a_2, a_3, \dots]$.我们把展开式截断到 a_n 得到的有理数 $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ 称为 ω 的 n 次有理逼近:

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n], \tag{7}$$

展开式中 $a_i (i = 1, \dots, n)$ 较小的无理数 ω 离有理数较远.几何上看,以 ω 为频率的不变环面附近在每一个层次上较大的岛屿就是以 $\frac{p_n}{q_n}$ 为频率的周期轨道.这些以 $\frac{p_n}{q_n}$ 为频率的周期轨道是空间中以下作用量的极值点^[8],

$$L = \sum_{i=1}^{q_n} \left[\frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 - K \left(\cos x_i + \frac{1}{2} \cos 2x_i \right) \right]. \tag{8}$$

因此, 这些周期轨道可以通过牛顿求根的方法求得^[9]. 以 ω 为频率的不变环面临近破裂的时候, Greene 发现这些周期轨道有非常特殊的性质. 设由 (3) 定义的 $\frac{p_n}{q_n}$ 周期岛屿的变分矩阵 $A_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_{q_n}}{\partial y_0} & \frac{\partial y_{q_n}}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x_{q_n}}{\partial y_0} & \frac{\partial x_{q_n}}{\partial x_0} \end{pmatrix}$ 的

迹为 $\text{Trace}(A_n)$, Greene 定义了^[2]

$$R_n = \frac{2 - \text{Trace} A_n}{4}. \tag{9}$$

并从数值上发现

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \begin{cases} = 0 & K < K_c \\ = 0.25 \dots, & K = K_c \\ = \infty, & K > K_c \end{cases} \tag{10}$$

由此可以准确确定标准映射以 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 为频率的最后一个环面破裂的临界摄动参数为 0.971 635 4...

2 结果

首先从相图大致确定映射 (3) 最后一个不变环面的位置及其频率. 图 1 和图 2 分别给出了 $K = 0.423\ 0$ 与 $K = 0.447\ 6$ 的相图. 可见最后一个环面破裂的临界摄动参数 $K_c \approx 0.447\ 6$ 图 3 给出了 $K = 0.447\ 6$ 和 $K = 0.447\ 600\ 5$ 参数下最后一个环面附近的旋转数图. 当 $K = 0.447\ 6$ 时, 由旋转数图可看出在旋转数范围 $[0.236\ 279\ 3\ 0.236\ 279\ 6]$ 仍然有几个单调上升区间, 而当参数略微增加到 $K = 0.447\ 600\ 5$ 时, 可看出只有最后一个环面存在 (迭代到 10^{10} 次), 其频率大约为

$$0.236\ 279\ 4 < \gamma < 0.236\ 279\ 5 \tag{11}$$

并且破裂的临界参数值

$$K_c \approx 0.447\ 6 \tag{12}$$

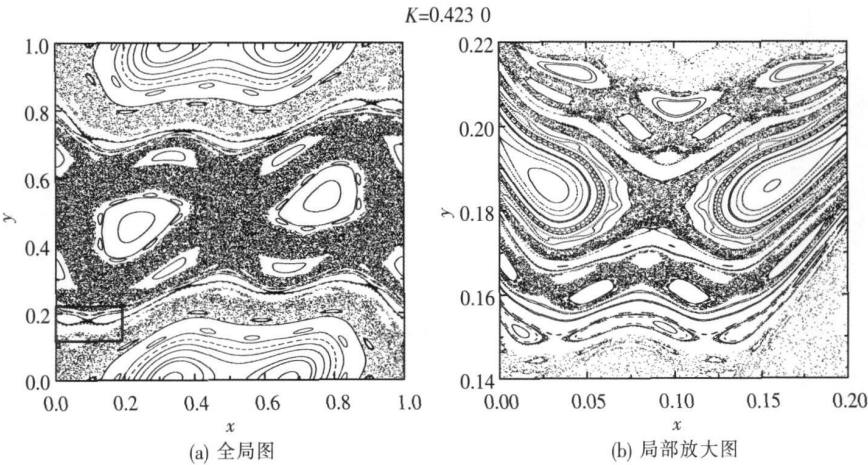


图 1 映射(3)当摄动参数 $K=0.423\ 0$ 的相图

Fig.1 The phase plane of the map (3) when perturbation parameter $K=0.423\ 0$

采用 Greene 的周期轨道方法. 用连分数展开方法, 双频标准映射 (3) 最后一个破裂的环面的旋转数 (11) 可表示为:

$$\gamma = [4\ 4\ 3\ 3\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots]. \tag{13}$$

从 (11) 的表达式中的范围, 我们只能确定上述连分数展开的前 8 位. 不过从离开有理数最远的角度, 猜测该环面的频率应该是其余数字均为 1, 该无理数于是应该为:

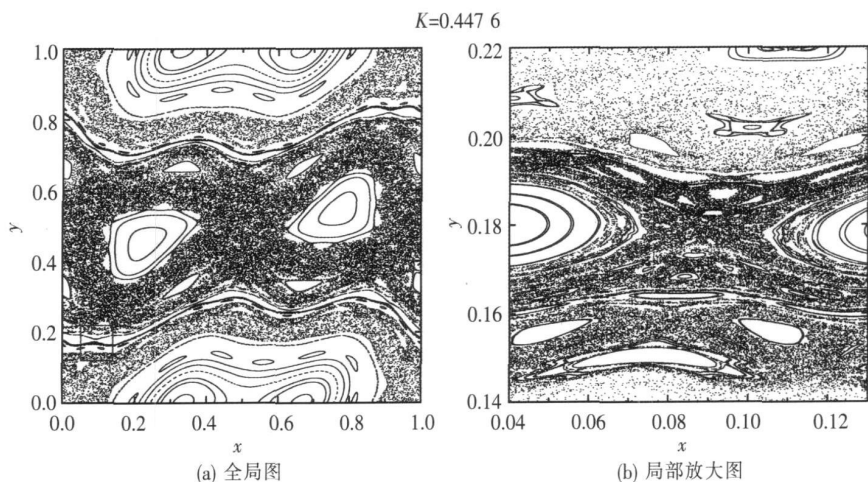


图 2 映射(3)当摄动参数 $K=0.447\ 6$ 的相图

Fig.2 The phase plane of the map (3) when perturbation parameter $K=0.447\ 6$

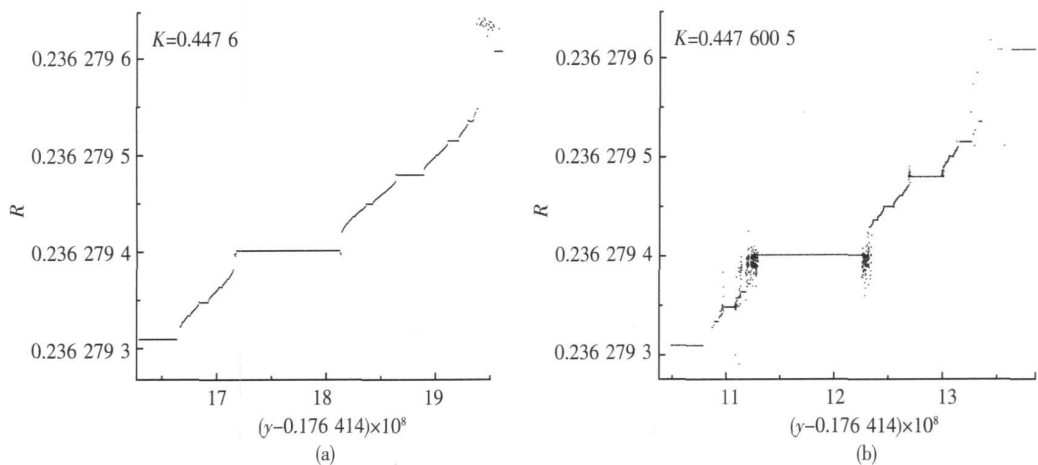


图 3 映射(3)中 $x_0=0$ 的轨道频率(旋转数)随 y_0 的变化

Fig.3 Orbital frequency (rotation number) versus y_0 in the map (3)

$$\gamma = \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}}}}} = \frac{73 + 13\sqrt{5}}{309 + 55\sqrt{5}} \quad (14)$$

也属于黄金分割频率族。
趋近此频率的由连分数给出的周期轨道 $\left\{ \frac{p_n}{q_n}, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$, 则有:

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{17}, \frac{13}{55}, \frac{43}{182}, \frac{56}{237}, \dots \quad (15)$$

对于这些周期轨道, 当 $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 时, 给出的 R_n 的结果见图 4

可见, 与单频标准映射相比, 双频标准映射 (3) 在 $K < K_c$ 但比较接近 K_c 时, R_n 会在一个有限值区间内振荡, 而

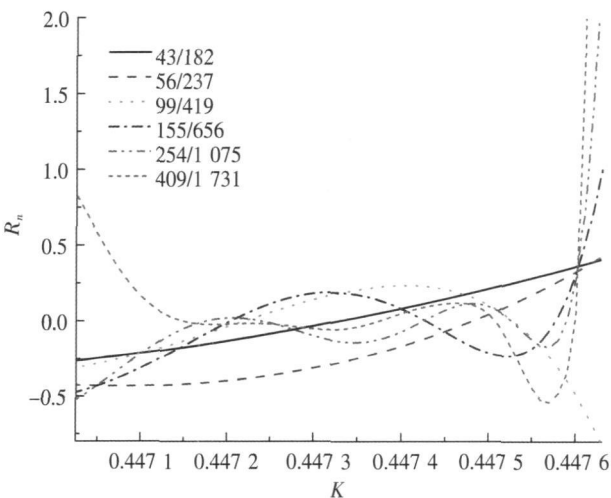


图 4 映射(3)中最后一个环面的有理逼近岛屿的 R_n 随摄动参数 K 的变化

Fig.4 R_n for periodic orbits approaching the last torus versus perturbation parameter K in the map (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \begin{cases} = 0.32 \sim 0.37 \dots, & k = k_c \\ = \infty, & k > k_c \end{cases} \quad (16)$$

对于多数的周期轨道仍然成立. 由此也进一步得到了映射 (3) 最后一个环面破裂的临界值与通过旋转数方法确定的值 (12) 在我们所能分辨的误差范围内是一致的.

3 结论与讨论

本文利用旋转数方法以及周期轨道方法确定了双频标准映射 (3) 中最后一个不变环面破裂的临界摄动参数约为 0.447 6 与单频标准映射的临界参数 0.971 635 4 相比, 临界值减低了. 这个结果可以这样理解, 如果双频标准映射 (3) 中只有 $\sin 2x_n$ 项, 没有 $\sin x_n$ 项, 将此映射的表达式两边均乘以 2 通过坐标变换 $2x_n = x'_n$, $2y_n = y'_n$, 可以得到摄动参数为 $2K$ 的标准映射 (1). 于是该系统最后一个破裂的环面具有黄金分割数的旋转数, 临界参数 K_c 为 0.971 635 4 的一半, 即为 0.485 817 7. 因此, 双频标准映射 (3) 的最后一个环面不仅频率变了, 其临界摄动参数也变小了. 这可能是由于双频标准映射 (3) 中 2 个谐频项相互作用的结果. 这也可能是引起真实系统中临界参数比较小的原因.

双频标准映射 (3) 另一个与单频标准映射 (1) 不同的地方是, 双频标准映射最后一个破裂的不变环面其附近周期轨道的 R_n 在摄动参数趋向 K_c 时表现更为复杂, 呈现一些振荡现象. 其原因可能是在数值上寻找在环面附近周期轨道时, 不易区分具有相同最佳逼近频率的不同周期轨道. 这一现象是否是本质的困难还有待于今后工作的进一步研究.

[参考文献]

- [1] 孙义燧, 周济林. 现代天体力学导论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008
- [2] Greene JM. A method for determining a stochastic transition [J]. Journal of Mathematics and Physics, 1979, 20(6): 1183-1201.
- [3] 孙义燧, Froeschl C. 二维保面积映射的 Kolmogorov 熵 [J]. 中国科学, 1982, 25(4): 357-363.
- [4] Froeschle C, Guzzo M, Lega E. Graphical evolution of the Arnold web from order to chaos [J]. Science, 2000, 289(5487): 2108-2110.
- [5] Zhou J L, Hu B, Sun Y S. Break-up of three-frequency KAM tori: determination of the critical parameters [J]. Chinese Physics Letter, 2001, 18(6): 734-736.
- [6] Zhou J L, Hu B, Sun Y S. Universal behaviour on the breakup of the spiral mean motions [J]. Chinese Physics Letter, 2001, 18(12): 1550-1553.
- [7] Liu J, Sun Y S. Chaotic motions of comets in near-parabolic orbits: mapping approaches [J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1994, 60(1): 3-28.
- [8] Peyrard M, Augry S. Critical behaviour at the transition by breaking of analyticity in the discrete Frenkel-Kontorova model [J]. Journal of Physics C: Solid State Physics, 1983, 16(9): 1593-1608.
- [9] Kook H, Meiss J D. Application of Newton's method to Lagrangian mappings [J]. Physica D, 1989, 36(3): 317-326.

[责任编辑: 顾晓天]