

用指标理论对凸哈密顿系统周期解的一个存在性定理的推广

李科强

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 考虑凸哈密顿系统周期解的存在性, 利用对偶变分方法和 Ekeland 指标理论, 得到了一个新结果, 改进了 Mawhin 证明的哈密顿系统周期解的一个存在性定理.

[关键词] 凸哈密顿系统, 周期解, Ekeland 指标, 对偶泛函

[中图分类号] O175.8 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2011)01-0012-07

A Generalization of Existence of Periodic Solution of Convex Hamiltonian System by Using Ekeland Index Theory

Li Keqiang

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract In this paper, considering the existence of periodic solutions of convex Hamiltonian systems and utilizing the dual variance methods and Ekeland index theories, we get a new result which improve an existence theorem, proved by Mawhin. The existence theory of periodic solutions of convex Hamiltonian system.

Key words convex Hamilton systems, periodic solutions, Ekeland index, dual functional

我们考虑周期边值问题

$$\begin{aligned} Ju\dot{x}(t) + \dot{x}^* H(t, u(t)) &= 0 \quad a.e. t \in [0, T] \\ u(0) &= u(T), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ 是标准的辛矩阵, $H: [0, T] \times \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}$, $(t, u) \mapsto H(t, u)$ 对于每一个 $u \in \mathbf{R}^{2n}$ 关于 t 是可测的和对于几乎处处的 $t \in [0, T]$ 关于 u 是连续可微的和凸的.

考虑哈密顿系统 (1) 的周期解存在性等同于证明其泛函:

$$\Phi(u) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} (Ju\dot{x}(t), u(t)) + H(t, u(t)) \right] dt \quad (2)$$

的临界点的存在性. 但是, 在很多情况下, 直接证明 (2) 的临界点的存在性是一件困难的事情. 然而在很多时候证明 (2) 的对偶泛函

$$\chi(u) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} (Jv\dot{x}(t), v(t)) + H^*(t, v\dot{x}(t)) \right] dt \quad (3)$$

(其中, $v\dot{x} = -Ju\dot{x}^*$ 为 H 的 Legendre 变换) 的临界点却相对容易. 这样在对偶泛函临界点存在性得证的情况下, 通过对偶关系 (1) 的周期解的存在性即可得到证明.

若 $H(t, u) = \frac{1}{2} (A(t)u, u)$, 其中 $A \in L^\infty([0, T]; GL_s(\mathbf{R}^{2n})) = \{A: [0, T] \rightarrow GL_s(\mathbf{R}^{2n}) \mid A(t) :=$

收稿日期: 2010-09-25

基金项目: 国家自然科学基金 (10871095).

通讯联系人: 李科强, 博士研究生, 研究方向: Ekeland 指标和金融数学. E-mail: lkeqiang000@sina.com

$(a_{ij}(t))_{2n \times 2n}, a_{ij} \in L^\infty(0, T), a_{ij} = a_{ji}$, 对所有的 $i, j = 1, 2, \dots, 2n$ 且 $\exists \varepsilon > 0$ 对所有的 $x \in \mathbf{R}^{2n}, (A(t)x, x) > \varepsilon \|x\|^2, a.e. t \in (0, T)$, 则 (3) 可化为

$$\chi(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} (Ju \dot{v}, v) + (Bu \dot{v}, v) \right] dt, \quad (4)$$

(4) 可以用来定义 A 的 Ekeland 指标.

对于 $\forall A \in L_+^\infty([0, T]; GL_s(\mathbf{R}^{2n}))$ 且 A 关于 $t \in [0, T]$ 是连续的, A 的 Ekeland 指标在文 [1] 中首次给出定义. 文 [2] 也有它的定义, 而对于 $t \in [0, T]$ 本性有界的矩阵函数 $A \in L_+^\infty([0, T]; GL_s(\mathbf{R}^{2n}))$ 的 Ekeland 的指标的定义在文 [3] 中给出. 对于更广泛的关于辛道路的 Maslov 型指标可以查看文 [4-7].

这些理论在研究非线性的哈密顿系统时有重要的应用. [5-8] 研究了渐近线性哈密顿系统的多重周期解, [9] 研究了 Rabinowitz 的极小周期问题.

本文中规定 $\forall A_1, A_2 \in L_+^\infty([0, T]; GL_s(\mathbf{R}^{2n}))$, 记号 $A_1 \leq A_2$ 表示 $((A_2 - A_1)x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^{2n}$; 记号 $A_1 < A_2$ 表示 $A_1 \leq A_2$ 且 $((A_2 - A_1)x, x) > 0 \quad a.e. t \in (0, T), \forall x \in \mathbf{R}^{2n}$.

1 Ekeland 指标的性质和一些引理

设 $A \in L_+^\infty([0, T]; GL_s(\mathbf{R}^{2n}))$, 即 A 是一个对称的 $2n \times 2n$ 阶矩阵且存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得 $A \geq \varepsilon I_{2n}$. 对于几乎处处的 $t \in [0, T]$, 考虑下面的系统

$$Ju \dot{x}(t) + Au(t) = 0 \quad (5)$$

$$u(0) = u(T). \quad (6)$$

设 $H_T^1 = \{x \in L^2(0, T; \mathbf{R}^{2n}) \mid x(0) = x(T)\}$, 其上的内积和范数分别定义为 $(x, y) = \int_0^T [(x(t), y(t)) + (x \dot{x}(t) + y \dot{y}(t))] dt$ 和 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \forall x, y \in H_T^1$. 我们可以建立与 (5)、(6) 相联系的二次型

$$q_A(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{1}{2} (Ju \dot{x}(t), v(t)) + (Bu \dot{v}, v) \right] dt \quad (7)$$

其中 $B = A^{-1}, u, v \in H_T^1 = \left\{ x \in H_T^1 \mid \int_0^T x(t) dt = 0 \right\}$.

定理 1 (Ekeland) 二次型 $q_A(\cdot, \cdot)$ 可以把空间 H_T^1 分解为如下形式:

$$H_T^1 = E^+(A) \oplus E^0(A) \oplus E^-(A).$$

q_A 在 $E^+(A), E^-(A)$ 分别是正定的、负定的, 而 $E^0(A)$ 是它的核且 $E^0(A)$ 和 $E^-(A)$ 是有限维的.

注 1 由 [10] 我们知, 若二次型 q_A 在 $E^+(A), E^-(A)$ 上分别是正定的、负定的, 则存在 $\delta > 0$ 使

$$q_A(v, v) \geq \delta \|v\|^2, v \in E^+(A), \quad (8)$$

和

$$q_A(v, v) \leq -\delta \|v\|^2, v \in E^-(A). \quad (9)$$

定义 1 对于 $\forall A \in L_+^\infty([0, T]; GL_s(\mathbf{R}^{2n}))$, 我们定义 $v_T(A) = \dim E^0(A), i_*(A) = \dim E^-(A), v_T(A)$ 和 $i_*(A)$ 分别称为零维数和 Ekeland 指标.

从文 [1-3] 得到关于 Ekeland 指标的下列常用性质.

命题 1 (a) $i_*(A), v_T(A)$ 是有限的.

(b) $v_T(A)$ 是系统 (5)、(6) 解空间的维数.

(c) $i_*(A)$ 是解空间的维数和:

$$i_*(A) = \sum_{0 < s < T} v_T(sA).$$

(d) 对于 $A \in L_+^\infty([0, T]; GL_s(\mathbf{R}^{2n}))$, 当 $i_*(A) = 0, v_T(A) = 0$ 时, 存在一个充分小的 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $i_*(A + \varepsilon_0 I_{2n}) = 0, v_T(A + \varepsilon_0 I_{2n}) = 0$

引理 1 (见 [10]) 若 φ 在自反的 Banach 空间 X 上是弱下半连续的且有一个有界的极小化向量序列, 则 φ 在 X 上有一个极小值点.

引理 2 (见 [10]) 设 X 是一个赋范空间, $\varphi: X \rightarrow (-\infty, +\infty)$ 是凸的且下半连续的, 则 φ 是弱下半

连续的.

引理 3(见 [10]) 若序列 (u_k) 在 $W_T^{1,p} (= \{u \mid u \in L^p([0, T]; \mathbf{R}^{2n}), u(0) = u(T)\})$, $0 < p < 1$ 弱收敛于 u 则 (u_k) 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 u

所有的有效定义域 $D(F) = \{u \in \mathbf{R}^n : F(u) < \infty\}$ 是非空的且为凸下半连续的函数 $F: \mathbf{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$ 记为 $\Gamma_0(\mathbf{R}^n)$.

引理 4(见 [10]) 对于 $\alpha > 0, q > 1, \beta \geq 0, \gamma > 0$ 设 $F \in \Gamma_0(\mathbf{R}^n)$ 使得

$$-\beta \leq F(u) \leq \alpha q^{-1} |u|^q + \gamma, \forall u \in \mathbf{R}^n,$$

则, 若 $v \in \partial F(u)$, 有

$$\alpha^{-p/q} p^{-1} |v|^p \leq (\gamma, u) + \beta + \gamma$$

和

$$|v| \leq \{p \alpha^{p/q} [|u| + \beta + \gamma] + 1\}^{q-1}.$$

引理 5(见 [10]) 设 $H: [0, T] \times \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}, (t, u) \mapsto H(t, u)$ 对每个 $u \in \mathbf{R}^{2n}$ 关于 t 是可测的且对于几乎处处的 $t \in [0, T]$ 关于 u 是严格凸的和连续可微的. 假设存在 $0 < p < \infty, \alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma \in L^p([0, T]; \mathbf{R}^+)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 使得对于所有的 $u \in \mathbf{R}^{2n}$ 和 $a \in t \in [0, T]$, 有下面的不等式成立

$$\delta(|u|^q/q - \beta(t)) \leq H(t, u) \leq \alpha(|u|^q/q) + \gamma(t),$$

则对偶泛在 $W_T^{1,p} \left[= \left\{ v \in W_T^{1,p} : \int_0^T v(t) dt = 0 \right\} \right]$ 上是连续可微的且若 $v \in W_T^{1,p}$ 是 Φ 的临界点, 则通过下式定义的

$$u(t) = J^* H^* (t, v(t))$$

满足 $u(t) = J^* H^* (t, u(t))$ 和 $u(0) = u(T)$.

引理 6(见 [10]) 对于每个 $u \in H_T^1$,

$$\int_0^T (Ju(t), u(t)) dt \geq -\frac{T}{2\pi} \int_0^T |u(t)|^2 dt$$

2 存在性的一个基本定理和例子

现在考虑 (1) 的周期解, 我们给出一个比文 [10] 中更一般化的定理.

定理 2 假设

(A₁) 存在一个 $l \in L^4([0, T]; \mathbf{R}^{2n})$, 使得对于所有 $u \in \mathbf{R}^{2n}$ 和几乎处处的 $t \in [0, T]$, 有

$$H(t, u) \geq (l(t), u).$$

(A₂) 存在 $A \in L_+^\infty([0, T]; GL_s(\mathbf{R}^{2n}))$, $i_T(A) = 0, v_T(A) = 0 \exists \gamma \in L^2([0, T]; \mathbf{R}^+)$ 使得对于每个 $u \in \mathbf{R}^{2n}$ 和几乎处处的 $t \in [0, T]$, 有下式成立

$$H(t, u) \leq \frac{1}{2} (Au, u) + \gamma(t).$$

(A₃) $\int_0^T H(t, u) dt \rightarrow +\infty$, 当 $|u| \rightarrow \infty$.

则周期问题 (1) 至少有一个解 u 使得

$$v(t) = -J \left[u(t) - \frac{1}{T} \int_0^T u(s) ds \right]$$

是对偶泛函

$$\Phi: H_T^1 \rightarrow (-\infty, \infty), \quad v \mapsto \int_0^T \left[\frac{1}{2} (Jv, v) + H^* (t, v) \right] dt$$

的极小值点.

注 2 若假设条件 (A₂) 中的 $A \in L_+^\infty([0, T]; GL_s(\mathbf{R}^{2n}))$ 是一个正定对称的常值矩阵, 则由矩阵的性质, A 有 $2n$ 个正的特征值 (重根按重数算) $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, 2n$, 其中可能有相同的. 不妨设最大的一个为 λ_{2n} , 又由 $i_T(A) = 0, v_T(A) = 0$ 可知 $0 < \lambda_{2n} < \frac{2\pi}{T}$. 由 (A₂) 知下面不等式成立

$$H(t, u) \leq \frac{1}{2}(Au, u) \leq \frac{\lambda_{2n}}{2} \|u\|^2 + \gamma(t).$$

这样, 问题又回到了文 [10] 中的定理.

在此我们可以看出本文的定理 2 是文 [10] 中定理 3.1 的推广.

证 我们先证明问题 (1) 的一个扰动问题周期解的存在性, 然后利用极限的思想得到原问题的周期解的存在性.

(1) 一个带有扰动的周期边值问题解的存在性.

由于假设 (A_2) 中的 $v_T(A) = 0$, $\dot{v}(A) = 0$ 和命题 1 的 (d), 我们知存在 $\varepsilon' > 0$ 使得 $\dot{v}(A + \varepsilon' I_{2n}) = 0$, $\dot{v}(A + \varepsilon' I_{2n}) = 0$.

设 $|H_\varepsilon| : [0, T] \times \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}$, $(t, u) \mapsto \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 + H(t, u)$, 其中 $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, 显然由 H_ε 的定义知对于几乎处处的 $t \in [0, T]$, $H_\varepsilon(t, \cdot)$ 是凸的和连续可微的. 由 (A_1) 和 (A_2) 得

$$-|l(t)| \|u\| + (\varepsilon' I_{2n} u, u) \leq H_\varepsilon(t, u) \leq \frac{1}{2}((A + \varepsilon' I_{2n})u, u) + \gamma(t).$$

因此有

$$\frac{\varepsilon'}{4} - \frac{|l(t)|^2}{\varepsilon'} \leq H_\varepsilon(t, u) \leq \frac{1}{2}((A + \varepsilon' I_{2n})u, u) + \gamma(t) \leq \frac{(M + \varepsilon')}{2} \|u\|^2 + \gamma(t). \quad (10)$$

所以通过引理 5 扰动的对偶泛函

$$\varphi_\varepsilon(v) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}(Jv, v) + H_\varepsilon(t, v) \right] dt$$

在 $H_T^1 = \{u \in H_T^1 \mid \int_0^T u dt = 0\}$ 上是连续可微的, 并且如果 $v_\varepsilon \in H_T^1$ 是 φ_ε 的临界点, 定义如下的函数 u_ε :

$$u_\varepsilon(t) = \dot{\varphi}_\varepsilon^*(t, v_\varepsilon(t))$$

是问题

$$\begin{aligned} Ju_\varepsilon(t) + \varepsilon u_\varepsilon(t) + \dot{\varphi}_\varepsilon^*(t, u_\varepsilon(t)) &= 0 \\ u(0) &= u(T) \end{aligned} \quad (11)$$

的一个解和关系式 $Jv_\varepsilon = u_\varepsilon$ 成立. 由 $v_T(A + \varepsilon' I_{2n}) = 0$, $\dot{v}(A + \varepsilon' I_{2n}) = 0$ 和定理 1 以及注 1, 我们有

$$\varphi_\varepsilon(v) \geq \int_0^T \left[\frac{1}{2}(Jv, v) + ((A + \varepsilon' I_{2n})^{-1} v, v) \right] dt - \int_0^T \gamma(t) dt \geq \|v\|^2 - \gamma(0), \quad \forall v \in H_T^1, \quad (12)$$

其中 $\gamma_0 = \int_0^T \gamma(t) dt = 0$. $\delta > 0$ 由 (12) 式知 $\varphi_\varepsilon(v)$ 是强制的. 设 (v_k) 是 φ_ε 的极小化向量序列, 则由 (12) 式得 $\|v_k\|$ 在 H_T^1 上有界. 由引理 2 和 3 可知, $\varphi_\varepsilon = \varphi_{\varepsilon_1} + \varphi_{\varepsilon_2}$ 弱下半连续, 其中 $\varphi_{\varepsilon_1} = \int_0^T H_\varepsilon^*(t, v) dt$, φ_{ε_2}

$= \frac{1}{2} \int_0^T (Jv, v) dt$ 更进一步 φ_{ε_2} 还是弱连续的. 由引理 1 知, φ_ε 在某点 $v_\varepsilon \in H_T^1$ 处有一个极小值.

(2) 对 u_ε 估计.

由 (A_2) 知存在一个 $M \in \mathbf{R}$, $M > 0$ 使得 $A \leq MI_{2n}$, 再由 (A_1) 和引理 4 得

$$|\dot{\varphi}_\varepsilon^*(t, u)| \leq 2M[\|u\| + l(t)\|u\| + \gamma(t)] + 1, \quad a.e. t \in [0, T]. \quad (13)$$

定义泛函 $H(u) = \int_0^T H(t, u) dt$, $\forall u \in \mathbf{R}^{2n}$. 由 (13) 易得 H 是连续可微的. 因此, 由 (A_3) , H 在某点 $u \in \mathbf{R}^{2n}$ 处有一个极小值且 u 满足 $\int_0^T \dot{H}(t, u) dt = 0$ 使得

$$v_\varepsilon(t) = \dot{H}^*(t, u) \quad (14)$$

在 H_T^1 中有惟一的一个解 w 满足 $\int_0^T v(s) ds = 0$ 由 (14), $H^*(t, w) = (w, u) - H(t, u)$ 且 $H^*(\cdot, w) \in L^1(0, T; \mathbf{R})$. 由于 $H(t, u) \leq H_\varepsilon(t, u)$, 我们得到 $H_\varepsilon^*(t, v) \leq H^*(t, v)$. 再由 (12) 式得

$$\delta \|v\|^2 - \gamma_0 \leq \varphi_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \varphi_\varepsilon(w) \leq \int_0^T \left[\frac{1}{2}(Jw, w) + H^*(t, w) \right] dt = c_1 < \infty.$$

由此 $\|v\| = \left[\int_0^T J(v, v) + (v, v) dt \right]^{\frac{1}{2}}$ 有界, 可得 $v \in L^2 = \left[\int_0^T |v|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq c_2$. 从 $Jv = u$ 我们有 $\|u_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$, 其中 $u_\varepsilon = u - u_\varepsilon$, $u_\varepsilon = \frac{1}{T} \int_0^T u_\varepsilon(t) dt$. 由 Wirtinger 不等式得 $\|u_\varepsilon\| \leq c_3$. 再由 $H(t, \cdot)$ 的凸性和 (11) 式, 我们得到

$$\begin{aligned} H\left(t, \frac{u_\varepsilon}{2}(t)\right) &= H\left(t, \frac{u_\varepsilon}{2} - \frac{u_\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{1}{2}H(t, u_\varepsilon) + \frac{1}{2}H(t, -u_\varepsilon) \leq \\ &\frac{1}{2}(\langle \dot{H}(t, u_\varepsilon), u_\varepsilon \rangle) + \frac{1}{2}H(t, 0) + \frac{1}{4}(A u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \frac{Y(t)}{2} \leq \\ &\frac{1}{2}(-J u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \|u_\varepsilon\|^2 + \frac{M}{4} \|u_\varepsilon\| + Y(t) \leq \\ &\frac{1}{2}(-J u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \frac{M}{4} \|u_\varepsilon\| + Y(t), \quad a.e. t \in [0, T]. \end{aligned}$$

利用引理 6 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^T H(t, u_\varepsilon) dt &\leq \int_0^T -\frac{1}{2}(J u_\varepsilon, u_\varepsilon) dt + \frac{M}{4} \|u_\varepsilon\|_{L^2}^2 + Y_0 \leq \\ &\frac{T}{4\pi} \|u_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{M}{4} \|u_\varepsilon\|_{L^2}^2 + Y_0 \leq \\ &\frac{T}{4\pi} c_2^2 + \frac{M}{4} c_3^2 + Y_0 = c_4. \end{aligned}$$

由 (A_3) 知, $\|u_\varepsilon\| \leq c_5$. 最后可得

$$\|u_\varepsilon\| \leq \|u\| + \|u_\varepsilon\| \leq c_3 + \sqrt{T} c_5 = c_6$$

(3) 问题 (1) 周期解的存在性.

由于 u_ε 在 H_T^1 中有界, 又由 H_T^1 是自反的 Banach 空间, 所以存在一个序列 $\varepsilon_n \in (0, \varepsilon')$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 和某个点 $u \in H_T^1$ 使得在 H_T^1 中 $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$. 当 $v_\varepsilon = -J u_\varepsilon$ 时, 更进一步有 $v_\varepsilon = -J(u_\varepsilon - u)$ 使得 (v_{ε_n}) 弱收敛到

$$v = -J(u - u). \quad (15)$$

由引理 3 $v_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}$ 在 $[0, T]$ 上分别一致收敛于 u, v . 由 (11) 得到积分形式

$$J u_{\varepsilon_n}(t) - J u_\varepsilon(0) + \int_0^t \varepsilon_n u_{\varepsilon_n}(s) + \langle \dot{H}(s, u_{\varepsilon_n}(s)), u_{\varepsilon_n}(s) \rangle ds = 0$$

进一步得到,

$$J u(t) - J u(0) + \int_0^t \langle \dot{H}(s, u_{\varepsilon_n}(s)), u_{\varepsilon_n}(s) \rangle ds = 0$$

即得 u 是 (1) 的一个解. 最后, 因为 $H_\varepsilon^*(t, v) \leq H^*(t, v)$, 对于所有的 $h \in H_T^1$, 我们有

$$\langle \dot{H}_\varepsilon(v_{\varepsilon_n}), v_{\varepsilon_n} \rangle \leq \langle \dot{H}_\varepsilon(h), h \rangle \leq \langle \dot{H}(h), h \rangle.$$

现在由 (1) 和 (15) 得 $v_\varepsilon(t) = \langle \dot{H}(t, u(t)), u(t) \rangle$, a.e. $t \in [0, T]$. 再由 u_{ε_n} 和 v_{ε_n} 的对偶, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \dot{H}_\varepsilon(v_{\varepsilon_n}), v_{\varepsilon_n} \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left[\frac{1}{2}(J v_{\varepsilon_n}, v_{\varepsilon_n}) + (u_{\varepsilon_n}, v_{\varepsilon_n}) - H_\varepsilon(t, u_{\varepsilon_n}) \right] dt = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left[\frac{1}{2}(J v_{\varepsilon_n}, v_{\varepsilon_n}) + (u_{\varepsilon_n}, v_{\varepsilon_n}) - H(t, u_{\varepsilon_n}) - \frac{\varepsilon_n}{2} \|u_{\varepsilon_n}\|^2 \right] dt = \\ &\int_0^T \left[\frac{1}{2}(J v, v) + (u, v) - H(t, u) \right] dt = \\ &\int_0^T \left[\frac{1}{2}(J v, v) + H^*(t, v) \right] dt = \langle \dot{H}(v), v \rangle, \end{aligned}$$

即对于任意的 $h \in H_T^1$, $\langle \dot{H}(v), v \rangle \leq \langle \dot{H}(h), h \rangle$. 定理得证.

本文主要的推广是假设 (A_2) 比文 [10] 中的定理假设条件更一般化. 下面举例以便更清楚地看到是如何引进指标使定理获得推广的.

例 1 考虑边值问题

$$\begin{aligned} Jx - Ax &= 0 \quad a \in t \in [0, 1], \\ x(0) &= x(1). \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{设 } A = \begin{cases} c_1 I_2, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ c_2 I_2, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \text{ 其中 } c_1 \neq c_2, c_1 > 0, c_2 > 0 \text{ 显然 } A \in L_+^\infty([0, T]; GL_2(\mathbf{R}^2)). \quad i(A), v(A)$$

分别表示 A 的 Ekeland 指标和零维数.

(1) 若 $v(A) \neq 0$ 由命题 1 的 (b) 知 (16) 有非平凡解, 设为 $x(t)$, 则由 (16) 解得

$$x(t) = \begin{cases} \exp^{c_1 J_2 t} x(0) = (\cos(c_1 t) I_2 + \sin(c_1 t) J_2) x(0), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \exp^{c_2 J_2 (t-1)} x(1) = (\cos c_2 (t-1) I_2 + \sin c_2 (t-1) J_2) x(1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

$x(t)$ 应满足 $x(0) = x(1)$ 和 $x\left[\frac{1}{2}-0\right] = x\left[\frac{1}{2}+0\right]$, 其中 $x\left[\frac{1}{2}-0\right], x\left[\frac{1}{2}+0\right]$ 分别为 x 在 $\frac{1}{2}$ 处的左、右极限, 由此得

$$\begin{aligned} x(0) &= \exp^{c_1 J_2 0} x(0) = \exp^{c_2 J_2 0} x(1) = x(1), \\ \cos \frac{c_1}{2} I_2 + \sin \frac{c_1}{2} J_2 &= \cos \frac{c_2}{2} I_2 - \sin \frac{c_2}{2} J_2 \end{aligned} \quad (17)$$

由 (17) 式得 $\cos \frac{c_1}{2} = \cos \frac{c_2}{2}, \sin \frac{c_1}{2} = -\sin \frac{c_2}{2}$, 即得

$$\frac{c_2}{2} = 2k\pi - \frac{c_1}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, i \in k \in \mathbf{Z}^+. \quad (18)$$

不妨设 $k = 1, c_1 = \pi$, 则 $c_2 = 3\pi$, 可知有解

$$x(t) = \begin{cases} (\cos(\pi t) I_2 + \sin(\pi t) J_2) x(0), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ (\cos 3\pi(t-1) I_2 + \sin 3\pi(t-1) J_2) x(1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

此时方程的解是二维的, 当 $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ 时, 基是 $\cos(\pi t) I_2, \sin(\pi t) J_2$; 当 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, 基是 $\cos(3\pi(t-1)) I_2, \sin(3\pi(t-1)) J_2$. 我们得 $v(A) = 2, i(A) = \sum_{0 < \lambda < 1} i(\lambda A)$, 而 $\lambda A = \begin{cases} \pi \lambda I_2, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 3\pi \lambda I_2, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$ 其中 c_1

$\neq c_2, c_1 > 0, c_2 > 0, \lambda \in (0, 1)$. 令 $c'_1 = \pi \lambda, c'_2 = 3\pi \lambda, c'_1 + c'_2 < 4\pi, \frac{c'_1}{2} < 2\pi - \frac{c'_2}{2}$, 不满足等式 (18),

所以 $i(\lambda A) = 0$ 进一步得 $i(A) = 0$. 若 $c_1 = \pi, c_2 = 2j\pi - \pi, j \in \mathbf{Z}^+, j > 1$, 由命题 1 的 (c) 知

$$i(A) = \sum_{0 < \lambda < 1} v(\lambda A), \text{ 其中 } \lambda A = \begin{cases} \lambda \pi I_2, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \lambda(4j\pi - \pi) I_2, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

由 (18) 式, 我们得 $\frac{\lambda(4j\pi - \pi)}{2} = 2k\pi - \frac{\lambda\pi}{2}$, 进一步得 $0 < \lambda = \frac{k}{j} < 1, k = 1, 2, \dots, j-1, i(A) = 2(j-1)$.

(2) 若 $i(A) = 0, v(A) = 0$ 我们可以令 $c_1 = \pi, c_2 < 3\pi$, 因为不满足关系式 (18), 我们知 $v(A) = 0$ 而 $i(A) = \sum_{0 < \lambda < 1} i(\lambda A)$, 而此时 $c_2 < 4\pi - \pi$, 即 $c_2 + \pi < 4\pi$, 对于 $0 < \lambda < 1$, 我们有 $\lambda(c_2 + \pi) < 4\pi$, 即 $\lambda c_2 < 4\pi - \lambda\pi$, 立得 $i(\lambda A) = 0, i(A) = \sum_{0 < \lambda < 1} i(\lambda A) = 0$. 此时情形恰为定理假设条件 (A_2) . 由定理 2

可知, 问题 (1) 至少有一个解 u 使得

$$v = -J_2\left[u(t) - \int_a^b u(s) ds\right]$$

为对偶泛函 $\varphi(v) = \int_a^b \frac{1}{2}(J_2 v, v) + H^*(t, v) dt$ 的极小值点.

[参考文献]

[1] Ekeland I. Une theorie de Morse pour les systemes hamiltoniens convexes[J]. Ann HP Analyse Non Lineaire, 1984, 1: 19-78

[2] Ekeland I. Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics[M]. Berlin: Springer, 1990

[3] Dong Y. P-index theory for linear Hamiltonian systems and multiple solutions for non linear Hamiltonian systems[J]. Nonlinearity, 2006, 19: 1275-1294

[4] Long Y. Index Theory for Symplectic Paths With Applications[M]. Basel: Birkhäuser, 2002

[5] Conley C, Zehnder E. Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1984, 37: 207-253

[6] Long Y. Maslov-type index theory, degenerate critical points and asymptotically linear Hamiltonian systems[J]. Sci China Ser A33, 1990, 12: 1409-1419

[7] Long Y. A Maslov-type index theory for symplectic paths[J]. Topol Methods Nonlinear Anal, 1997, 10(1): 47-78

[8] Li S, Liu J. Morse theory and asymptotic linear Hamiltonian system[J]. J Differential Equ, 1989, 78(1): 53-73

[9] Dong D, Long Y. The iteration formula of the Maslov-type index theory with applications to nonlinear Hamiltonian systems[J]. Trans Amer Math Soc, 1997, 349(7): 2619-2661.

[10] Mawhin J, Willen M. Critical Point Theory and Hamiltonian System[M]. Berlin: Springer, 1998

[责任编辑: 丁 蓉]