第 34卷第 1期
2011年 3月
南京师大学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)
Vol. 34 No. 1
Mar. 2011

广义 Smash积和广义 Smash余积的 Maschke形式定理

潘群星[1,2], 李　强[1], 张良云[1]

(1. 南京农业大学理学院, 江苏 南京 210095)
(2. 南京大学数学系, 江苏 南京 210093)

[摘要]　利用积分映射给出广义 smash积的一个 Maschke形式定理: 假设 H 是有限维半单 Hopf代数, 并且存在一个代数满同态的积分映射 $\phi: H \to B$. 如果 A 是半单的, 那么 $A\#B$ 也是半单的. 对偶地, 给出广义 smash余积的一个 Maschke形式定理.

[关键词]　Hopf代数, 广义 smash积, 广义 smash余积, Maschke形式定理
[中图分类号] O153.3　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2011)01-0019-04

Maschke-Type Theorems for Generalized Smash Product and Generalized Smash Coproduct

Pan Qunxing[1,2], Li Qiang[1], Zhang Liangyun[1]

(1. School of Science, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China)
(2. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Abstract Using the integral map, this paper gives a Maschke-type theorem for generalized smash products: assume H is a finite semisimple Hopf algebra and there exists an integral $\phi: H \to B$ which is a surjective algebra map. If A is semisimple, then $A\#B$ is also semisimple. Dually, this paper gives a Maschke-type theorem for generalized smash coproducts.

Key words Hopf algebra, generalized smash product, generalized smash coproduct, Maschke-type theorem

Maschke形式定理是经典表示论中一个关键性结论, 它指的是有限群上的群环是半单的当且仅当域的特征不能整除群的阶. 因为群环是 Hopf代数的一个特例, 所以人们自然会问 Maschke形式定理能否推广到任意有限维 Hopf代数上去. 1986年, Cohen和 Fishman在文献[1]中给出 smash积的 Maschke形式定理: 设 H 是有限维半单 Hopf代数, A 是左 H-模代数. 如果 A 是半单的, 那么 $A\#H$ 也是半单的.

1995年, Kassel在文献[2]中引入广义 smash积和广义 smash余积的概念. 随后, 许多作者对这两个结构进行了研究. 例如, 文献[3]给出了它们之间的一个新对偶. 本文的主要目的是将 Cohen和 Fishman的 Maschke形式定理推广到广义 smash积, 并且对偶地给出广义 smash余积的 Maschke形式定理.

本文所有空间是域 k 上的向量空间, 映射是 k-线性的, 记号同文[4]. 例如, 记余代数 C 的余乘法 $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$; 记左 C-余模 M 的余作用 $\rho(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$; 记右 C-余模 M 的余作用 $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$.

设 H 是一个 Hopf代数, A 是一个代数, C 是一个余代数.

(1) A 是一个左 H-模代数, 如果 A 是一个左 H-模, 并且对任意 $a, b \in A$, $h \in H$,

$$h\cdot(ab) = \sum (h_1\cdot a)(h_2\cdot b),\quad h\cdot 1 = \varepsilon(h)1.$$

(2) A 是一个左 H-余模代数, 如果 A 是一个左 H-余模, 并且对任意 $a, b \in A$,

$$\rho(ab) = \sum a_{(-1)}b_{(-1)} \otimes a_{(0)}b_{(0)},\quad \rho(1) = 1\otimes 1.$$

收稿日期: 2010-05-10
基金项目: 国家自然科学基金(10571153)、教育部科学技术核心基金(108154)、南京农业大学青年创新基金(KJ08026).
通讯联系人: 潘群星, 博士研究生, 讲师, 研究方向: 代数学. E-mail: pqxjs98@njau.edu.cn

(3) C 是一个左 H – 模余代数, 如果 C 是一个左 H – 模, 并且对任意 $c \in C$, $h \in H$,

$$\Delta(h\cdot c) = \Sigma h_1\cdot c_1 \otimes h_2\cdot c_2,\quad \varepsilon(h\cdot c) = \varepsilon(c)\varepsilon(h).$$

(4) C 是一个左 H – 余模余代数, 如果 C 是一个左 H – 余模, 并且对任意 $c \in C$,

$$\Sigma c_{(-1)} \otimes c_{(0)1} \otimes c_{(0)2} = \Sigma c_{1(-1)}c_{2(-1)} \otimes c_{1(0)} \otimes c_{2(0)},\quad \Sigma c_{(-1)}\varepsilon(c_{(0)}) = \varepsilon(c)1.$$

1　广义 Smash 积的 Maschke 形式定理

定义 1　设 H 是一个 Hopf代数, A 是一个左 H – 模代数, B 是一个左 H – 余模代数. 作为向量空间记 $A\#B = A \otimes B$, 在 $A\#B$ 上定义乘法

$$(a\#x)(b\#y) = \Sigma a(x_{(-1)}\cdot b)\#x_{(0)}y.$$

则 $A\#B$ 是一个以 $1\#1$ 为单位元的结合代数, 称其为广义 smash积.

定义 2　设 H 是一个 Hopf代数, B 是一个左 H – 余模代数. 如果映射 $\phi: H \to B$ 是一个左 H – 余模映射, 那么称 ϕ 是一个积分映射[5].

定义 3　设 H 是一个 Hopf代数, $l \in H$ ($r \in H$). 如果对任意 $h \in H$,

$$hl = \varepsilon(h)l\ (rh = r\varepsilon(h)),$$

那么称 $l \in H$ ($r \in H$) 是一个左(右)积分元, 左(右)积分空间记为 $\int_H^l$ ($\int_H^r$).

引理 1　如果 H 是有限维半单 Hopf代数, 那么存在 $e \in \int_H^l$ ($e \in \int_H^r$) 使得 $\varepsilon(e) = 1$.

引理 2　设 H 是有限维 Hopf代数, $x \in \int_H^r$, $V, W \in {}_{A\#B}M$, $\lambda: V \to W$ 是左 A – 模范畴 ${}_AM$ 中的态射. 如果存在一个代数满同态的积分映射 $\phi: H \to B$, 那么

$$\lambda: V \to W,\ v \mapsto \Sigma\phi(S(x_1))\cdot\lambda(\phi(x_2)\cdot v)$$

是 ${}_{A\#B}M$ 中的态射.

证明　首先, 证明对任意 $a \in A$, $v \in V$, $a\cdot\lambda(v) = \lambda(a\cdot v)$. 实际上,

$$\begin{aligned}
&\lambda(a\cdot v) = \Sigma\phi(S(x_1))\cdot\lambda(\phi(x_2)\cdot(a\cdot v)) = \\
&\Sigma(1\#\phi(S(x_1)))\cdot\lambda((1\#\phi(x_2))(a\#1)\cdot v) = \\
&\Sigma(1\#\phi(S(x_1)))\cdot\lambda((\phi(x_2)_{(-1)}\cdot a\#\phi(x_2)_{(0)})\cdot v) = \\
&\Sigma(1\#\phi(S(x_1)))\cdot\lambda((\phi(x_2)_{(-1)}\cdot a\#1)(1\#\phi(x_2)_{(0)})\cdot v) = \\
&\Sigma(1\#\phi(S(x_1)))(\phi(x_2)_{(-1)}\cdot a\#1)\cdot\lambda((1\#\phi(x_2)_{(0)})\cdot v) = \\
&\Sigma(\phi(S(x_1))_{(-1)}\phi(x_2)_{(-1)}\cdot a\#\phi(S(x_1))_{(0)})\cdot\lambda(\phi(x_2)_{(0)}\cdot v) = \\
&\Sigma(S(x_2)x_3\cdot a\#\phi(S(x_1)))\cdot\lambda(\phi(x_4)\cdot v) = \Sigma(a\#\phi(S(x_1)))\cdot\lambda(\phi(x_2)\cdot v) = \\
&\Sigma(a\#1)(1\#\phi(S(x_1)))\cdot\lambda(\phi(x_2)\cdot v) = a\cdot\lambda(v).
\end{aligned}$$

其次, 证明对任意 $b \in B$, $v \in V$, $b\cdot\lambda(v) = \lambda(b\cdot v)$.

因为 ϕ 和 S 都是满的, 所以对任意 $b \in B$, 存在元素 $h \in H$ 使得 $b = \phi(S(h))$. 因此,

$$\begin{aligned}
&b\cdot\lambda(v) = \Sigma\phi(S(h))\phi(S(x_1))\cdot\lambda(\phi(x_2)\cdot v) = \\
&\Sigma\phi(S(x_1h))\cdot\lambda(\phi(x_2)\cdot v) = \Sigma\phi(S(x_1h_1))\cdot\lambda(\phi(x_2h_2S(h_3))\cdot v) = \\
&\Sigma\phi(S(x_1))\cdot\lambda(\phi(x_2S(h))\cdot v)\ (\Delta(xh) = \varepsilon(h)\Delta(x)) = \\
&\Sigma\phi(S(x_1))\cdot\lambda(\phi(x_2)\cdot(\phi(S(h))\cdot v)) = \lambda(b\cdot v).
\end{aligned}$$

证毕.

命题 1　设 H 是有限维半单 Hopf代数, $V \in {}_{A\#B}M$, W 是 V 的左 $A\#B$ – 子模. 如果在 ${}_AM$ 中 W 是 V 的直和项, 并且存在一个代数满同态的积分映射 $\phi: H \to B$, 那么在 ${}_{A\#B}M$ 中 W 也是 V 的直和项.

证明　根据引理 1, 存在 $e \in \int_H^r$ 使得 $\varepsilon(e) = 1$.

假设 $\lambda: V \to W$ 是 ${}_AM$ 中的满同态, 那么根据引理 2,

$$\lambda: V \to W,\ v \mapsto \Sigma\phi(S(e_1))\cdot\lambda(\phi(e_2)\cdot v)$$

是 ${}_{A\#B}M$ 中的态射.

另外, 对任意 $w \in W$,

$$\lambda(w) = \Sigma\phi(S(e_1))\cdot\lambda(\phi(e_2)\cdot w) = \Sigma\phi(S(e_1))\cdot(\phi(e_2)\cdot w) = \Sigma\phi(S(e_1)\phi(e_2))\cdot w =$$
$$\Sigma\phi(S(e_1)e_2)\cdot w = \Sigma\phi(\varepsilon(e)1)\cdot w = \phi(1)\cdot w = 1\cdot w = w.$$

所以, $\lambda: V \to W$ 是 ${}_{A\#B}M$ 中的满同态.

证毕.

定理 1 设 H 是有限维半单 Hopf代数, 并且存在一个代数满同态的积分映射 $\phi: H \to B$. 如果 A 是半单的, 那么 $A\#B$ 也是半单的.

例 1 记 $H = k\{1, g, g^2\}$ 是特征 $\mathrm{char}k \neq 3$的群代数, 则 H 是半单的. 设 $B = H$ 是左 H – 余模代数, 它的余模结构如下:

$$\rho: B \to H \otimes B,\ 1 \mapsto 1 \otimes 1,\ g \mapsto g^2 \otimes g,\ g^2 \mapsto g \otimes g^2.$$

定义 $\phi: H \to B$, $1 \mapsto 1$, $g \mapsto g^2$, $g^2 \mapsto g$. 不难证明, $\phi: H \to B$ 是一个代数满同态的积分映射. 从而, 根据定理 1, 对任意左 H – 模代数 A, 如果 A 是半单的, 那么 $A\#B$ 也是半单的.

2 广义 Smash余积的 Maschke形式定理

定义 4 设 H 是一个 Hopf代数, C 是一个左 H – 余模余代数, D 是一个左 H – 模余代数. 作为向量空间记 $C \times D = C \otimes D$, 在 $C \times D$ 上定义余乘法和余单位

$$\Delta(c \times d) = \Sigma c_1 \times c_{2(-1)}\cdot d_1 \otimes c_{2(0)} \times d_2,\quad \varepsilon(c \times d) = \varepsilon(c)\varepsilon(d),$$

则 $C \times D$ 是一个余结合余代数, 称其为广义 smash余积.

不难验证, $\pi: C \times D \to C$, $c \times d \mapsto \varepsilon(d)c$ 和 $\gamma: C \times D \to D$, $c \times d \mapsto \varepsilon(c)d$ 是两个余代数映射.

引理 3 设 H 是一个 Hopf代数, 则对任意 $c \in C$, $d \in D$,

$$(\gamma \otimes \pi)\Delta(c \times d) = \Sigma\pi(c_1 \times c_{2(-1)}\cdot d_1)_{(-1)}\cdot\gamma(c_{2(0)} \times d_2) \otimes \pi(c_1 \times c_{2(-1)}\cdot d_1)_{(0)}.$$

证明 这是直接的.

引理 4 设 H 是一个 Hopf代数, $(M, \rho) \in {}^{C\times D}M$ (左 $C \times D$ – 余模范畴). 则对任意 $m \in M$,

$$\Sigma m_{[-1]} \otimes m_{[0]\langle -1\rangle} \otimes m_{[0]\langle 0\rangle} = \Sigma m_{\langle -1\rangle(-1)}\cdot m_{\langle 0\rangle[-1]} \otimes m_{\langle -1\rangle(0)} \otimes m_{\langle 0\rangle[0]}. \quad (A)$$

这里, $\rho_M^C: M \to C \otimes M, m \mapsto \Sigma m_{\langle -1\rangle} \otimes m_{\langle 0\rangle}$ 和 $\rho_M^D: M \to D \otimes M, m \mapsto \Sigma m_{[-1]} \otimes m_{[0]}$ 分别是 M 的左 C – 余模和左 D – 余模结构映射, 并且

$$\rho_M^C: M \xrightarrow{\rho} C \times D \otimes M \xrightarrow{\pi} C \otimes M,\quad \rho_M^D: M \xrightarrow{\rho} C \times D \otimes M \xrightarrow{\gamma} D \otimes M.$$

证明 由引理 3直接证得.

引理 5 设 H 是有限维 Hopf代数, $t \in \int_{H^*}^{r}$. 则对任意 h, $\in H$,

$$\Sigma\langle t, S(\ h_1)\rangle h_2 = \Sigma\langle t, S(\ _2 h)\rangle\ _1. \quad (B)$$

证明 定义

$$\rightharpoonup: H \otimes H^* \to H^*,\ x \otimes f \mapsto x \rightharpoonup f,\ \langle x \rightharpoonup f, y\rangle = \langle f, S(x)y\rangle,$$
$$\leftharpoonup: H^* \otimes H \to H^*,\ f \otimes x \mapsto f \leftharpoonup x,\ \langle f \leftharpoonup x, y\rangle = \langle f, xy\rangle.$$

容易证明 $(H^*, \rightharpoonup)$ 是一个左 H – 模和 $(H^*, \leftharpoonup)$ 是一个右 H – 模.

因为对任意 $f \in H^*$,

$$\Sigma\langle\ _2 \rightharpoonup t(f \leftharpoonup\ _1), h\rangle = \Sigma\langle f,\ _1 S(\ _2)h_2\rangle\langle t, S(\ _3)h_1\rangle = \Sigma\langle f, h_2\rangle\langle t, S(\ h_1)\rangle,$$
$$\Sigma\langle\ _2 \rightharpoonup t(f \leftharpoonup\ _1), h\rangle = \Sigma\langle f \leftharpoonup\ _1, 1\rangle\langle\ _2 \rightharpoonup t, h\rangle = \Sigma\langle f,\ _1\rangle\langle t, S(\ _2)h\rangle,$$

所以 $\Sigma\langle t, S(\ h_1)\rangle h_2 = \Sigma\langle t, S(\ _2 h)\rangle\ _1$.

证毕.

定义 5 设 H 是一个 Hopf代数, D 是一个左 H – 模余代数. 如果映射 $\psi: D \to H$ 是一个左 H – 模映射, 那么称 ψ 是一个余积分映射[5].

引理 6 设 H 是有限维 Hopf代数, $t \in \int_{H^*}^{r}$, $M, N \in {}^{C\times D}M$. 如果 $f: M \to N$ 是左 C – 余模范畴 ${}^{C}M$ 中的态射, 并且存在一个余代数单同态的余积分映射 $\psi: D \to H$, 那么

$$f: M \to N,\ m \mapsto \sum \langle t, S(\phi(m_{[-1]}))\phi(f(m_{[0]})_{[-1]})\rangle f(m_{[0]})_{[0]}$$

是$^{C\times D}M$中的态射.

证明　对任意 $m\in M$,

$$(I\otimes f)\rho^D_M(m) = \sum m_{[-1]}\otimes \langle t, S(\phi(m_{[0][-1]}))\phi(f(m_{[0][0]})_{[-1]})\rangle f(m_{[0][0]})_{[0]} =$$
$$\sum m_{[-1]1}\otimes\langle t, S(\phi(m_{[-1]2}))\phi(f(m_{[0]})_{[-1]})\rangle f(m_{[0]})_{[0]} \overset{(B)}{=}$$
$$\sum f(m_{[0]})_{[-1]2}\otimes \langle t, S(\phi(m_{[-1]}))\phi(f(m_{[0]})_{[-1]1})\rangle f(m_{[0]})_{[0]} = \rho^D_N f(m),$$

$$(\phi\otimes I)\rho^C_N f(m) = \sum\langle t, S(\phi(m_{[-1]}))\phi(f(m_{[0]})_{[-1]})\rangle \phi(f(m_{[0]})_{[0]\langle -1\rangle})\otimes f(m_{[0]})_{[0]\langle 0\rangle} \overset{(A)}{=}$$
$$\sum \langle t, S(\phi(m_{[-1]}))\phi(f(m_{[0]})_{\langle -1\rangle(-1)}\cdot f(m_{[0]})_{\langle 0\rangle[-1]})\rangle\phi(f(m_{[0]})_{\langle -1\rangle(0)})\otimes f(m_{[0]})_{\langle 0\rangle[0]} =$$
$$\sum\langle t, S(\phi(m_{[-1]}))f(m_{[0]})_{\langle -1\rangle(-1)}\phi(f(m_{[0]})_{\langle 0\rangle[-1]})\rangle \phi(f(m_{[0]})_{\langle -1\rangle(0)})\otimes f(m_{[0]})_{\langle 0\rangle[0]} =$$
$$\sum\langle t, S(\phi(m_{[-1]}))m_{[0]\langle -1\rangle(-1)}\phi(f(m_{[0]\langle 0\rangle})_{[-1]})\rangle\phi(m_{[0]\langle -1\rangle(0)})\otimes f(m_{[0]\langle 0\rangle})_{[0]} \overset{(A)}{=}$$
$$\sum\langle t, S(\phi(m_{\langle -1\rangle(-1)}\cdot m_{\langle 0\rangle[-1]}))m_{\langle -1\rangle(0)(-1)}\phi(f(m_{\langle 0\rangle[0]})_{[-1]})\rangle\phi(m_{\langle -1\rangle(0)(0)})\otimes f(m_{\langle 0\rangle[0]})_{[0]} =$$
$$\sum\langle t, S(\phi(m_{\langle 0\rangle[-1]}))S(m_{\langle -1\rangle(-1)})m_{\langle -1\rangle(0)(-1)}\phi(f(m_{\langle 0\rangle[0]})_{[-1]})\rangle\phi(m_{\langle -1\rangle(0)(0)})\otimes f(m_{\langle 0\rangle[0]})_{[0]} =$$
$$\sum\langle t, S(\phi(m_{\langle 0\rangle[-1]}))S(m_{\langle -1\rangle(-1)1})m_{\langle -1\rangle(-1)2}\phi(f(m_{\langle 0\rangle[0]})_{[-1]})\rangle\phi(m_{\langle -1\rangle(0)})\otimes f(m_{\langle 0\rangle[0]})_{[0]} =$$
$$\sum\langle t, S(\phi(m_{\langle 0\rangle[-1]}))\phi(f(m_{\langle 0\rangle[0]})_{[-1]})\rangle\phi(m_{\langle -1\rangle})\otimes f(m_{\langle 0\rangle[0]})_{[0]} = (\phi\otimes f)\rho^C_M.$$

因为 ϕ 是单的, 所以 $(I\otimes f)\rho^C_M = \rho^C_N f(m)$.

证毕.

根据文献[6], 我们知道: 如果 C 是有限维余代数, 那么 C 是余半单的当且仅当 C^* 是半单的.

命题2　设 H 是有限维余半单 Hopf 代数, $M\in {}^{C\times D}M$, N 是 M 的左 $C\times D$ - 子余模. 如果在^{C}M中 N 是 M 的直和项, 并且存在一个余代数单同态的余积分映射 $\phi: D\to H$, 那么在$^{C\times D}M$中 N 也是 M 的直和项.

证明　根据引理1, 存在一个右积分元 $t\in H^*$, 使得 $\langle t, 1\rangle = 1$.

假设 $f: M\to N$ 是^{C}M中的满同态, 那么根据引理6,

$$f: M \to N,\ m \mapsto \sum \langle t, S(\phi(m_{[-1]}))\phi(f(m_{[0]})_{[-1]})\rangle f(m_{[0]})_{[0]}$$

是$^{C\times D}M$中的态射.

另外, 对任意 $n\in N$,

$$f(n) = \sum\langle t,S(\phi(n_{[-1]}))\phi(f(n_{[0]})_{[-1]})\rangle f(n_{[0]})_{[0]} = \sum\langle t, S(\phi(n_{[-1]}))\phi(n_{[0][-1]})\rangle n_{[0][0]} =$$
$$\sum\langle t, S(\phi(n_{[-1]1}))\phi(n_{[-1]2})\rangle n_{[0]} = \sum\langle t,\varepsilon(\phi(n_{[-1]}))1\rangle n_{[0]} = n.$$

所以, $f: M\to N$ 是$^{C\times D}M$中的满同态.

证毕.

定理2　设 H 是有限维余半单 Hopf 代数, 并且存在一个余代数单同态的余积分映射 $\phi: D\to H$. 如果 C 是余半单的, 那么 $C\times D$ 也是余半单的.

推论1　设 H 是有限维余半单 Hopf 代数, $C\times H$ 是 smash 余积. 如果 C 是余半单的, 那么 $C\times H$ 也是余半单的.

[参考文献]

[1] Cohen M, Fishman D. Hopf algebra actions[J]. Journal of Algebra, 1986, 100: 363-379.

[2] Kassel C. Quantum Groups[M]. New York, Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[3] 潘群星, 张良云. 广义 Smash 积与 Smash 余积之间的新对偶[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2007, 30(3): 10-14.

[4] Sweedler M E. Hopf Algebras[M]. New York: Benjamin, 1969.

[5] Doi Y. On the structure of relative Hopf modules[J]. Communication in Algebra, 1983, 11(3): 243-255.

[6] Montgomery S. Hopf Algebras and Their Actions on Rings[M]. New York: CBMS, 1993.

[责任编辑: 丁　蓉]