局部回归维数重分形谱的上界估计

严珍珍[1], 陈二才[2], 李　雷[1]

(1. 南京邮电大学理学院, 江苏 南京 210003)
(2. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要]　考察局部 Poincar 回归时间维数的重分形分解, 得到了局部 Poincar 回归时间维数的 Hausdorff维数重分形谱的上界估计.

[关键词]　重分形分析, 回归时间维数, Hausdorff维数, (q, τ)-维数

[中图分类号] O189. 3　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2011)01-0029-06

Upper Estimate on Multifractal Spectrum of Local Dimension for Recurrence Time

Yan Zhenzhen[1], Chen Ercai[2], Li Lei[1]

(1. School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)
(2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract This paper is dedicated to study multifractal decomposition of local dimension for Poincar recurrence time. The upper estimate on multifractal spectrum with Hausdorff dimension of local dimension for Poincar recurrence time is obtained.

Key words multifractal analysis, local dimensions for recurrence time, Hausdorff dimension, (q, τ)-dimension

设 (X, d) 为紧致的度量空间, $T: X\to X$ 是连续映射, μ 是非原子的 Borel不变测度. 重分形分析的主要问题是描述测度的局部奇异性. 一般地, 重分形分析主要是与研究 Borel测度 μ 的局部(点态)维数相关联. 对于 $\alpha\geqslant 0$, 记 $X_\alpha=\{x\in \mathrm{supp}\mu \mid d_\mu(x)=\alpha\}$, 重分形的研究主要是通过以下函数 $f_\mu(\alpha)=\dim(X_\alpha)$ 和 $F_\mu(\alpha)=\mathrm{Dim}(X_\alpha)$ 来估计 X_α 的大小, 其中 dim, Dim 分别是 Hausdorff维数和填充维数. 自 1986年 Halsey等人在[1]中定义函数 $f(\alpha)$ 以来, 重分形理论和函数 $f(\alpha)$ 一直受到人们的关注. 上世纪 90年代, 人们对计算各种不同类型测度的重分形谱非常感兴趣, 这些测度都具有不同程度的自相似性, 见文[2-4]. 除了局部(点态)维数, 人们对动力系统或几何结构其他局部数量的渐近行为也感兴趣. 比如, 人们感兴趣于连续函数的遍历平均、局部熵、局部 Laypunov指数等, 这些数量可以提供描述测度或者动力系统的很多信息, 如混沌性、敏感依赖等.

动力系统维数论[5]的兴起, 使得局部特征函数的选取更加多样化. 2000年, Takens和 Verbitski[6]用不变测度的局部熵取代了局部点态维数, 同时用集合的拓扑熵取代了集合的 Hausdorff维数, 其重分形谱是熵谱 $\xi(\alpha)=h_{top}(T, \{h_\mu(T, x)=\alpha\})$. 他们研究了任意不变测度局部熵的重分形分析, 并且给出了局部熵重分形谱的上界估计. 文[7, 8]研究了高维局部熵重分形谱, 并给出了上界估计. 动力系统的维数论的兴起也对经典 Poincar 回归有了新的定量描述. Afraimovich等[9, 10]引进与 Poincar 回归有关的维数, 并得到了在光滑系统中它们与熵和指数的关系. 文[11]讨论了回归时间维数的拓扑熵重分形谱. 本文将对回归时间维数(回归率)作特定的重分形分解, 给出回归时间维数的 Hausdorff维数谱的上界估计.

收稿日期: 2010-12-02
基金项目: 国家自然科学基金(61070234)、南京邮电大学攀登计划(NY210018).
通讯联系人: 严珍珍, 博士, 副教授, 研究方向: 动力系统和分形几何. E-mail: yzztn@163.com

1　集合的(q,τ)-维数的定义

设μ为(X,d)上的有限测度,$T:X\to X$是保测变换.设$U\subseteq X$,$x\in U$第一次回归到U的回归时间定义为

$$\tau_U(x)=\inf\{k>0\mid T^k(x)\in U\}.$$

为了方便,假如x不回到U,将回归时间记为无穷大.

设$r>0$,$x\in X$.下面的定义来自于文[12].x处的下、上局部(点态)回归时间维数分别定义为

$$\underline{d}_\tau(x)=\liminf_{r\to 0}\frac{-\log\tau_{B(x,r)}(x)}{\log r},\quad \overline{d}_\tau(x)=\limsup_{r\to 0}\frac{-\log\tau_{B(x,r)}(x)}{\log r}.$$

由文[12]的定理4,定理5,可以给出下面的定义.

定义1　若$\underline{d}_\tau(x)=\overline{d}_\tau(x)$,则称这个共同的数为$x\in X$处的局部(点态)回归时间维数,记为$d_\tau(x)$.

下面将用Carathéodory结构理论定义集合的(q,τ)-维数.先给出集合$E\subseteq X$的(q,τ)-维数的定义,这种思想来自文[5,13].设$q,t\in\mathbf{R}$以及$\delta>0$.称X中的有限或可数闭球族$\mathscr{B}=\{B(x_i,r_i)\}_i$是$E$的中心$\delta$-覆盖,如果$E\subseteq\bigcup_i B(x_i,r_i)$,$x_i\in E$且对任意的$i\geqslant 1$都有$0<r_i<\delta$.当$E\neq\varnothing$,记

$$H^{q,t}_{\tau,\delta}(E)=\inf\{\sum_i\tau^q_{B(x_i,r_i)}(x_i)(2r_i)^t\mid\{B(x_i,r_i)\}_i\text{是}E\text{的中心}\delta\text{覆盖}\}.$$

若$E=\varnothing$,令$H^{q,t}_{\tau,\delta}(\varnothing)=0$.集合$E$的$t$-维$(q,\tau)$-测度定义为

$$\overline{H}^{q,t}_{\tau}(E)=\sup_{\delta>0}H^{q,t}_{\tau,\delta}(E)=\lim_{\delta\to 0}H^{q,t}_{\tau,\delta}(E).$$

这里采用的是集合E的中心δ-覆盖,$\overline{H}^{q,t}_{\tau}(E)$关于集合$E$不具有单调性.因此,令

$$H^{q,t}_{\tau}(E)=\sup_{F\subseteq E}\overline{H}^{q,t}_{\tau}(F).$$

由上述定义,参考文[5],不难证明下面各引理成立.

引理1　集函数$H^{q,t}_{\tau}(\cdot)$具有以下性质.

(1) $H^{q,t}_{\tau}(\varnothing)=0$.

(2) 若$E_1\subseteq E_2\subseteq X$,则$H^{q,t}_{\tau}(E_1)\leqslant H^{q,t}_{\tau}(E_2)$.

(3) 设$E_i\subseteq X$,$i=1,2,\cdots$,则$H^{q,t}_{\tau}(\bigcup_{i\geqslant 1}E_i)\leqslant\sum_{i\geqslant 1}H^{q,t}_{\tau}(E_i)$.

引理2　存在惟一确定的数$\dim^q_\tau(E)\in[-\infty,+\infty]$,使得

$$H^{q,t}_{\tau}(E)=\begin{cases}+\infty, & t<\dim^q_\tau(E),\\ 0, & t>\dim^q_\tau(E).\end{cases}$$

引理3　下面的结论成立.

(1) $\dim^q_\tau(\varnothing)=-\infty$.

(2) 若$E_1\subseteq E_2\subseteq X$,则$\dim^q_\tau(E_1)\leqslant\dim^q_\tau(E_2)$.

(3) 设$E_i\subseteq X$,$i=1,2,\cdots$,则$\dim^q_\tau(\bigcup_{i\geqslant 1}E_i)=\sup_{i\geqslant 1}\{\dim^q_\tau(E_i)\}$.

定义2　称$\dim^q_\tau(E)$为集合E的(q,τ)-维数.

由引理2,集合E的(q,τ)-维数还可以表示为下面的形式.

$$\dim^q_\tau(E)=\sup\{t:H^{q,t}_{\tau}(E)=+\infty\}=\inf\{t:H^{q,t}_{\tau}(E)=0\}.$$

2　集合的(q,τ)-维数与Hausdorff维数之间的关系

从重分形的观点来看,集合E的(q,τ)-维数$\dim^q_\tau(E)$与集合E的Hausdorff维数$\dim(E)$类似.事实上,当$q=0$时,这两者是一致的.

定理1　对任意的$E\subseteq X$,有$\dim^0_\tau(E)=\dim(E)$.

证明　设$E\subseteq X$以及任意的$t\in\mathbf{R}$.若$E=\varnothing$,两边均为$-\infty$,结论成立.若$E\neq\varnothing$,设$\mathscr{B}=\{B(x_i,r_i)\}_i$是$E$的任一有限或可数中心$\delta$覆盖$(0<r_i<\delta)$.取$E_i=B(x_i,r_i)$,则$\{E_i\}_i$是$E$的一个$2\delta$覆盖.因此,

$$H^t_\delta(E) \leqslant \sum_i |E_i|^t = \sum_i (2r_i)^t.$$

由 $\mathscr{B} = \{B(x_i, r_i)\}_i$ 的任意性,

$$H^t_\delta(E) \leqslant \inf_{\mathscr{B}} \sum_i (2r_i)^t = H^{0,t}_{\tau,\delta}(E) \leqslant H^{0,t}_{\tau,\delta}(E).$$

令 $\delta \to 0$, 则

$$H^t(E) \leqslant H^{0,t}_\tau(E). \tag{1}$$

另一方面, 设 $F \subseteq E$, 且 $\mathscr{F} = \{E_i\}_i$ 为 F 的任一 δ- 覆盖. 不妨假设对任意的 $i \geqslant 1$, $E_i \cap F \neq \varnothing$, 否则可以选择更小的且仍能覆盖 F 的 $\{E_i\}_i$. 对任意的 $i \geqslant 1$, 记 $r_i = |E_i| < \delta$ 取 $x_i \in E_i \cap F$, 则 $E_i \subseteq B(x_i, r_i)$. 因此, $\mathscr{B} = \{B(x_i, r_i)\}_i$ 为 F 的中心 δ- 覆盖. 从而,

$$H^{0,t}_{\tau,\delta}(F) = \inf_{\mathscr{B}} \sum_i (2r_i)^t = \inf_{\mathscr{F}} 2^t \sum_i |E_i|^t \leqslant 2^t H^t_\delta(F).$$

令 $\delta \to 0$, 则 $H^{0,t}_\tau(F) \leqslant 2^t H^t(F) \leqslant 2^t H^t(E)$. 由于 $F \subseteq E$ 的任意性, 有

$$H^{0,t}_\tau(E) = \sup_{F \subseteq E} H^{0,t}_{\tau,\delta}(F) \leqslant 2^t H^t(E). \tag{2}$$

联立 (1) 和 (2), 得

$$2^{-t} H^{0,t}_\tau(E) \leqslant H^t(E) \leqslant H^{0,t}_\tau(E). \tag{3}$$

对任意的 $t < \dim(E)$, 有 $H^t(E) = +\infty$. 由 (3) 式的右边, 有 $H^{0,t}_\tau(E) = +\infty$. 由引理 2, $t \leqslant \dim^0_\tau(E)$. 由 $t < \dim(E)$ 的任意性,

$$\dim(E) \leqslant \dim^0_\tau(E). \tag{4}$$

反之, 对任意的 $s < \dim^0_\tau(E)$, 由引理 2, $H^{0,s}_\tau(E) = +\infty$. 由 (3) 式的左边, 有 $H^s(E) = +\infty$, 从而 $s \leqslant \dim(E)$. 由 $s < \dim^0_\tau(E)$ 的任意性,

$$\dim^0_\tau(E) \leqslant \dim(E). \tag{5}$$

联立式 (4) 和 (5), 即得结论成立.

3 回归时间维数重分形谱的上界估计

设 $\alpha \geqslant 0$, 记

$$X^\alpha = \{x \in X \mid \overline{d}_\tau(x) \leqslant \alpha\}, \qquad X_\alpha = \{x \in X \mid \overline{d}_\tau(x) \geqslant \alpha\},$$
$$\underline{X}^\alpha = \{x \in X \mid \underline{d}_\tau(x) \leqslant \alpha\}, \qquad \underline{X}_\alpha = \{x \in X \mid \underline{d}_\tau(x) \geqslant \alpha\}.$$

令 $K_\alpha = \{x \in X \mid d_\tau(x) = \alpha\}$, 则 $K_\alpha = X^\alpha \cap \underline{X}_\alpha$.

引理 4 设 $\alpha \geqslant 0$, q, $t \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, 且 $0 < \delta < q\alpha + t$, 则下面的结论成立.

(1) 当 $q \geqslant 0$时, $H^{q\alpha+t+\delta}(X^\alpha) \leqslant 2^{q\alpha+\delta} H^{q,t}_\tau(X^\alpha)$.

(2) 当 $q \leqslant 0$时, $H^{q\alpha+t+\delta}(\underline{X}_\alpha) \leqslant 2^{q\alpha+\delta} H^{q,t}_\tau(\underline{X}_\alpha)$.

(3) 设 $q\alpha + \dim^q_\tau(X) \geqslant 0$, 当 $q \geqslant 0$时, $\dim(X^\alpha) \leqslant q\alpha + \dim^q_\tau(X)$; 当 $q \leqslant 0$时, $\dim(\underline{X}_\alpha) \leqslant q\alpha + \dim^q_\tau(X)$.

证明 当 $q = 0$时, 由 (3) 式, (1) 和 (2) 成立, 而 (3) 显然成立. 下面假设 $q \neq 0$

(1) 由于 $q > 0$, 对任意的 $m \in \mathbf{N}$, 记

$$K_m = \left\{ x \in X^\alpha \mid \frac{-\log \tau_{B(x,r)}(x)}{\log r} \leqslant \alpha + \frac{\delta}{q}, 0 < r < \frac{1}{m} \right\}.$$

令 $0 < \eta < 1/m$. 设 $\mathscr{B} = \{B(x_i, r_i)\}_i$ 是 K_m 的任一 η- 中心覆盖, 则

$$\frac{-\log \tau_{B(x_i, r_i)}(x_i)}{\log r_i} \leqslant \alpha + \frac{\delta}{q}.$$

当 $q > 0$时,

$$\tau^q_{B(x_i, r_i)}(x_i)(2r_i)^t \geqslant 2^t r_i^{q\alpha+t+\delta}.$$

因此,

$$H^{q\alpha+\delta+t}_\eta(K_m) \leqslant \sum_i |B(x_i, r_i)|^{q\alpha+\delta+t} = \sum_i (2r_i)^{q\alpha+\delta+t} = 2^{q\alpha+\delta+t} \sum_i r_i^{q\alpha+\delta+t} \leqslant 2^{q\alpha+\delta} \sum_i \tau^q_{B(x_i, r_i)}(x_i)(2r_i)^t.$$

由 $\mathscr{B}=\{B(x_i,r_i)\}_i$ 的任意性,当 $\eta<1/m$ 时,

$$H_\eta^{q\alpha+\delta+t}(K_m)\leqslant 2^{q\alpha+\delta}H_{\tau,\eta}^{q,t}(K_m).$$

令 $\eta\searrow 0$,则

$$H^{q\alpha+\delta+t}(K_m)\leqslant 2^{q\alpha+\delta}H_\tau^{q,t}(K_m).$$

又当 $m\to+\infty$ 时,$K_m\nearrow X_\alpha$. 因此,

$$H^{q\alpha+\delta+t}(X_\alpha)=\sup_m H^{q\alpha+\delta+t}(K_m)\leqslant 2^{q\alpha+\delta}\sup_m H_\tau^{q,t}(K_m)\leqslant 2^{q\alpha+\delta}H_\tau^{q,t}(X_\alpha).$$

(2) 由于 $q<0$,对任意的 $m\in\mathbf{N}$,记

$$K_m=\left\{x\in\underline{X}_\alpha \mid \alpha+\frac{\delta}{q}\leqslant\frac{-\log\tau_{B(x,r)}(x)}{\log r},\ 0<r<\frac{1}{m}\right\}.$$

后面的证明类似于(1)的证明.

(3) 设 $t>\dim_\tau^q(X)$,由引理 2,$H_\tau^{q,t}(X)=0$

当 $q>0$ 时,由(1),

$$H^{q\alpha+t+\delta}(X^\alpha)\leqslant 2^{q\alpha+\delta}H_\tau^{q,t}(X^\alpha)\leqslant 2^{q\alpha+\delta}H_\tau^{q,t}(X)=0$$

从而,$q\alpha+t+\delta\geqslant\dim(X^\alpha)$. 由 $\delta>0$ 和 $t>\dim_\tau^q(X)$ 的任意性,有

$$q\alpha+\dim_\tau^q(X)\geqslant\dim(X^\alpha).$$

当 $q<0$ 时,由(2)类似可以证明

$$q\alpha+\dim_\tau^q(X)\geqslant\dim(\underline{X}_\alpha).$$

引理 5　设 $\alpha\geqslant 0$,$q,t\in\mathbf{R}$,$\delta>0$,且 $0<\delta<q\alpha+t$,则下面的结论成立.

(1) 当 $q\leqslant 0$ 时,若 $A\subseteq X^\alpha$,则 $H_\tau^{q,t}(A)\leqslant 2^tH^{q\alpha+t-\delta}(A)$.

(2) 当 $q\geqslant 0$ 时,若 $A\subseteq\underline{X}_\alpha$,则 $H_\tau^{q,t}(A)\leqslant 2^tH^{q\alpha+t-\delta}(A)$.

证明　当 $q=0$ 时,由(3)式,结论成立. 下面假设 $q\neq 0$

(1) 由于 $q<0$,对任意的 $m\in\mathbf{N}$,记

$$K_m=\left\{x\in A \mid \frac{-\log\tau_{B(x,r)}(x)}{\log r}\leqslant\alpha-\frac{\delta}{q},\ 0<r<\frac{1}{m}\right\}.$$

对任意的 $m\in\mathbf{N}$,假设 $E\subseteq K_m$,并且令 $0<\eta<1/m$. 设 $\{E_i\}_i$ 是 E 的任一 η-覆盖,则 $r_i=|E_i|<\eta$,记 $I=\{i\in\mathbf{N}\mid E_i\cap E\neq\varnothing\}$. 取 $x_i\in E_i\cap E$,则 $\mathscr{B}=\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ 是 E 的一个 η-中心覆盖,由于 $x_i\in E\subseteq K_m$,故

$$\frac{-\log\tau_{B(x_i,r_i)}(x_i)}{\log r_i}\leqslant\alpha-\frac{\delta}{q}.$$

当 $q<0$ 时,

$$\tau_{B(x_i,r_i)}^q(x_i)(2r_i)^t\leqslant 2^tr_i^{q\alpha+t-\delta}.$$

因此,

$$H_{\tau,\eta}^{q,t}(E)\leqslant\sum_{i\in I}\tau_{B(x_i,r_i)}^q(r_i)(2r_i)^t\leqslant\sum_i 2^tr_i^{q\alpha+\delta+t}=2^t\sum_i|E_i|^{q\alpha+\delta+t}.$$

由于 $\{E_i\}_i$ 是 E 任意一个 η-覆盖,当 $\eta<1/m$ 时,

$$H_{\tau,\eta}^{q,t}(E)\leqslant 2^tH^{q\alpha+t-\delta}(E).$$

令 $\eta\searrow 0$,则

$$H_\tau^{q,t}(E)\leqslant 2^tH^{q\alpha+t-\delta}(E)\leqslant 2^tH^{q\alpha+t-\delta}(K_m).$$

又由 $E\subseteq K_m$ 的任意性,对任意的 $m\in\mathbf{N}$,有

$$H_\tau^{q,t}(K_m)=\sup_{E\subseteq K_m}H_\tau^{q,t}(E)\leqslant 2^tH^{q\alpha+t-\delta}(K_m).$$

由于 $\bigcup_mK_m=A$,则

$$H_\tau^{q,t}(A)\leqslant 2^tH^{q\alpha+t-\delta}(A).$$

(2) 由于 $q>0$,对任意的 $m\in\mathbf{N}$,记

$$K_m=\left\{x\in A \mid \alpha-\frac{\delta}{q}\leqslant\frac{-\log\tau_{B(x,r)}(x)}{\log r},\ 0<r<\frac{1}{m}\right\}.$$

后面的证明类似于 (1) 的证明.

下面将讨论回归维数重分形谱的上界估计. 为此, 记

$$\underline{a} = \sup_{q>0}\frac{-\dim_\tau^q(X)}{q},\quad a = \inf_{q<0}\frac{-\dim_\tau^q(X)}{q}.$$

引理 **6** 设 $\alpha \geqslant 0$, 则

(1) 当 $\alpha > a$ 时, $\underline{X}_\alpha = \approxeq$;

(2) 当 $\alpha < \underline{a}$ 时, $X^\alpha = \approxeq$.

证明 (1) 采用反证法. 因为

$$a = \inf_{q<0}\frac{-\dim_\tau^q(X)}{q} < \alpha,$$

则存在 $\varepsilon > 0$ 以及 $q_0 < 0$, 使得

$$\frac{-\dim_\tau^{q_0}(X)}{q_0} < \alpha - \varepsilon,$$

从而,

$$-q_0(\alpha-\varepsilon) > \dim_\tau^{q_0}(X) \geqslant \dim_\tau^{q_0}(\underline{X}_\alpha). \tag{6}$$

记 $t = -q_0(\alpha-\varepsilon)$. 假设当 $\alpha > a$ 时, $\underline{X}_\alpha \neq \approxeq$, 取 $x \in X$, 则

$$\alpha-\varepsilon < \alpha < \liminf_{r\to 0}\frac{-\log\tau_{B(x,r)}(x)}{\log r}.$$

选取 $r_0 > 0$, 使得对任意的 r: $0 < r < r_0$, 满足

$$\alpha - \varepsilon < \frac{-\log\tau_{B(x,r)}(x)}{\log r}.$$

由于 $q_0 < 0$, 从而

$$r^{q_0(\alpha-\varepsilon)} \leqslant \tau_{B(x,r)}^{q_0}(x).$$

由 $t + q_0(\alpha-\varepsilon) = 0$, 故

$$2^t = 2^t r^{q_0(\alpha-\varepsilon)+t} = (2r)^t r^{q_0(\alpha-\varepsilon)} \leqslant \tau_{B(x,r)}^{q_0}(x)(2r)^t.$$

因此,

$$H_\tau^{q_0,t}(\{x\}) \geqslant H_\tau^{q_0,t}(\{x\}) \geqslant H_{\tau,r_0}^{q_0,t}(\{x\}) \geqslant 2^t > 0$$

由引理 2,

$$t = -q_0(\alpha-\varepsilon) \leqslant \dim_\tau^{q_0}(\{x\}) \leqslant \dim_\tau^{q_0}(\underline{X}_\alpha). \tag{7}$$

(6) 与 (7) 矛盾, 从而假设不成立.

(2) 与 (1) 的证明类似.

记 $d(q) = \dim_\tau^q(X)$. 下面用映射 $d(q)$ 的 Legendre 映射

$$d^*(\alpha) = \inf_{q\in\mathbf{R}}\{q\alpha + d(q)\}$$

给出层次集 K_α 的 Hausdorff 维数谱的上界估计.

定理 **2** 设 $\alpha \geqslant 0$ 以及 $q \in \mathbf{R}$, 则

(1) 当 $\alpha \in R\setminus[\underline{a}, a]$ 时, $\dim_\tau^q(K_\alpha) = 0$

(2) 当 $\alpha \in (\underline{a}, a)$ 时, $\dim_\tau^q(K_\alpha) \leqslant d^*(\alpha)$.

证明 (1) 当 $\alpha \in R\setminus[\underline{a}, a]$ 时, 若 $\alpha < \underline{a}$, 由引理 6(2), $X^\alpha = \approxeq$. 若 $\alpha > a$, 由引理 6(1), $\underline{X}_\alpha = \approxeq$. 因此, $K_\alpha = X^\alpha \cap \underline{X}_\alpha = \approxeq$, 故 $\dim_\tau^q(K_\alpha) = 0$.

(2) 当 $q = 0$ 时, $K_\alpha \subseteq X$, 结论显然成立. 下面假设 $q \neq 0$, 当 $\alpha \in (\underline{a}, a)$ 时,

$$\sup_{q>0}\frac{-\dim_\tau^q(X)}{q} \leqslant \alpha \leqslant \inf_{q<0}\frac{-\dim_\tau^q(X)}{q}.$$

因此, 当 $q \neq 0$ 时, $\dim_\tau^q(X) + q\alpha > 0$, 由引理 4(3), 当 $q > 0$ 时, $\dim(X^\alpha) \leqslant q\alpha + \dim_\tau^q(X)$; 当 $q < 0$ 时, $\dim(\underline{X}_\alpha) \leqslant q\alpha + \dim_\tau^q(X)$. 从而, $\dim(K_\alpha) = \dim\left(\underline{X}_\alpha \cap X^\alpha\right) \leqslant q\alpha + \dim_\tau^q(X)$. 因此,

$$\dim(K_\alpha) \leqslant \inf_{q\in\mathbf{R}}\{q\alpha + \dim_\tau^q(X)\} = \inf_{q\in\mathbf{R}}\{q\alpha + d(q)\} = d^*(\alpha).$$

[参考文献]

[1] Halsey T C, Jensen M H, Kadanoff L, et al. Fractal measures and their singularitis the characterization of strange sets[J]. Phys Rev A, 1986, 34(3): 1141-1151.

[2] Lau K S. Self-similarity, L^p-spectrum for recurrent IFS attractors[J]. Nonlinearity, 1992, 6: 337-348.

[3] Olsen O. Self-affine multifractal Sierpinski sponges in R^d[J]. Pacific J Math, 1998, 183(1): 143-199.

[4] Falconer K J. Techniques in Fractal Geometry[M]. Chrchester: Wiley, 1997.

[5] Pesin Y. Dimension Theory in Dynamical System[M]. Chicago: Univ of Chicago Press, IL, 1997.

[6] Takens F, Verbitski E. General multifractal analysis of local entropies[J]. Fundamenta Mathematicae, 2000, 165(2): 203-237.

[7] 严珍珍, 陈二才. 局部熵的高维重分形分析[J]. 系统科学与数学, 2008, 28(1): 40-50.

[8] Yan Z Z, Chen E C. Upper estimates on the higher-dimensional multifractal spectrum of local entropy[J]. Northeast Math J, 2008, 24(6): 471-484.

[9] Afraimovich V, Chazottes J, Saussol B. Local dimensions for Poincar recurrences[J]. Electronic Research Announcements of Amer Math Soc, 2000, 6: 64-74.

[10] Afraimovich V, Chazottes J, Saussol B. Pointwise dimensions for Poincar recurrences associated with maps and flows[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems A, 2003, 9: 263-280.

[11] Yan Z Z, Chen E C. Multifractal analysis of local entropies for recurrence time[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 33(5): 1584-1591.

[12] Barreira L, Saussol B. Hausdorff dimension of measure via Poincar recurrence[J]. Comm Math Phys, 2001, 219: 443-463.

[13] Olsen L. A multifractal formalism[J]. Advances in Mathematics, 1995, 116(1): 82-196.

[责任编辑: 丁　蓉]