两参数随机过程的强马尔科夫性

杜保建, 何朝兵, 袁付顺

(安阳师范学院数学与统计学院, 河南 安阳 455000)

[摘要] 定义了几种两参数随机过程的参数变化为随机的宽过去强马尔科夫性, 给出了一类随机过程满足强右选马氏性的充分条件, 讨论了几种强马氏性之间的关系, 推广了参数变化为非随机的相应结果.

[关键词] 两参数, 随机过程, 强马尔科夫性

[中图分类号] O211.62 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2011)01-0035-04

Strong Markov Properties for Two-Parameter Stochastic Process

Du Baojian, He Chaobing, Yuan Fushun

(School of Mathematics and Statistics, Anyang Normal University, Anyang 455000, China)

Abstract This paper proposes the general definitions of the wide-past strong Markov properties for two-parameter stochastic process, these stochastic process parameters change is random. These results are extensions of the corresponding those in parameters change is nonrandom. We obtain a sufficient condition which satisfies this definition and discuss the relations between various strong Markov properties.

Key words two-parameter, stochastic process, strong Markov property

在两参数马氏过程理论中, 强马氏性是一个非常重要的基本概念. 而两参数随机过程的宽过去强马氏性的参数变化分为随机的[1]和非随机的[2-4]两种情况. [2, 3]中定义了几种宽过去强马尔科夫过程, 给出了满足强右选马氏过程的一个充分条件, 讨论了几种强马氏性之间的关系, 这些强马氏性的参数变化为非随机的. 对参数变化为随机的情况, 至今还没有人去研究, 本文以[5]中的理论为基础, 把[2, 3]中的强马氏性创造性地推广到了参数变化为随机的情况, 利用[6-8]中的概念定义了介于马氏性和强马氏性之间的新的马氏性, 研究了它们的一些性质.

记 $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbf{R}_+^2 = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$. 在 $\mathbf{R}_+^2$ 上引进通常的半序, 即对 $\forall Z_1 = (s_1, t_1)$, $Z_2 = (s_2, t_2) \in \mathbf{R}_+^2$, 定义 $Z_1 \leqslant Z_2 \Leftrightarrow s_1 \leqslant s_2$ 且 $t_1 \leqslant t_2$, $Z_1 < Z_2 \Leftrightarrow s_1 < s_2$ 且 $t_1 < t_2$, $Z_1 \circ Z_2 = (s_1, t_2)$. 在不会误解时, 将 $(0, 0)$ 简记为 0, $(+\infty, +\infty)$ 简记为 ∞. 记 $\lambda_0 = (\{0\} \times \mathbf{R}_+) \cup (\mathbf{R}_+ \times \{0\})$, $\overline{\mathbf{R}_+^2} = \mathbf{R}_+^2 \cup \{\infty\}$.

设 $(\Omega, \mathscr{F}^0, P)$ 为概率空间, $(\mathscr{F}_Z^0)_{Z\in \mathbf{R}_+^2}$ 为 $\mathscr{F}^0$ 的一族上升的子 σ - 域, 即当 $Z_1 \leqslant Z_2$ 时, $\mathscr{F}_{Z_1}^0 \subset \mathscr{F}_{Z_2}^0$. 对 $Z = (s, t) \in \mathbf{R}_+^2$, 令 $\mathscr{F}_Z^{01} = \bigvee_{t\geqslant 0} \mathscr{F}_{st}^0$, $\mathscr{F}_Z^{02} = \bigvee_{s\geqslant 0} \mathscr{F}_{st}^0$, $\mathscr{F}_Z^{0*} = \mathscr{F}_Z^{01} \vee \mathscr{F}_Z^{02}$. 对 $Z > 0$, 令 $\mathscr{F}_{Z-}^{0*} = \bigvee_{u<z} \mathscr{F}_u^{0*}$, 对 $Z \in \lambda_0$, 规定 $\mathscr{F}_{z-}^{0*} = \mathscr{F}_z^{0*}$. 对 $Z \in \mathbf{R}_+^2$, 令 $\mathscr{F}_{Z+}^{0*} = \bigcap_{u>z} \mathscr{F}_u^{0*}$, 规定 $\mathscr{F}_\infty^{0*} = \mathscr{F}^0$.

Ω 到 $\overline{\mathbf{R}_+^2}$ 的映射 τ 关于 $(\mathscr{F}_Z^{0*})$ 的可选点、可料点、可及点和绝不可及点全体所成的集合分别记为 $\mathscr{O}^{0*}$, $\mathscr{P}^{0*}$、$\mathscr{A}^{0*}$、$\mathscr{J}^{0*}$. 关于 $(\mathscr{F}_{Z+}^{0*})$ 的相应集合分别记为 $\mathscr{O}_+^{0*}$, $\mathscr{P}_+^{0*}$, $\mathscr{A}_+^{0*}$, $\mathscr{J}_+^{0*}$. 对 $\tau \in \mathscr{O}^{0*}$ 定义下列 σ - 域:

$$\mathscr{F}_{\tau-}^{0*} = \sigma\{\mathscr{F}_0^{01} \cap \mathscr{F}_0^{02}; A \cap (\tau > r): A \in \mathscr{F}_r^{0*}, r \in \mathbf{R}_+^2\},$$

$$\mathscr{F}_\tau^{0*} = \{B \in \mathscr{F}^0: B \cap (\tau \leqslant r) \in \mathscr{F}_r^{0*}, \forall r \in \mathbf{R}_+^2\},$$

$$\mathscr{F}_{\tau+}^{0*} = \{B \in \mathscr{F}^0: B \cap (\tau < r) \in \mathscr{F}_r^{0*}, \forall r \in \mathbf{R}_+^2\}.$$

收稿日期: 2010-04-28

基金项目: 河南省基础与前沿技术研究资助项目(092300410145)、河南省教育厅自然科学基金(2010B110001).

通讯联系人: 杜保建, 副教授, 研究方向: 马氏过程. E-mail: baojiandu6319@163.com

可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 上宽过去马氏转移函数 $P_1((u,v),x;(u,v+t_1),y;(u+s_1,v),z;(u+s_1,v+t_1),B)$ $(u\geqslant 0,v\geqslant 0,s_1>0,t_1>0,x,y,z\in E,B\in\mathscr{E})$ 的定义见[2]. 本文简记为 $P_1(u,v,u+s_1,v+t_1,x,y,z,B)$, 若令 $s=u+s_1$, $t=v+t_1$, 则简记为 $P_1(u,v,s,t,x,y,z,B)$ 或 $P_1((u,v),(s,t),x,y,z,B)$. 与[9]中方法一样, 对 P_1 补充定义:

$$P(u,v,s,t,x,y,z,B)=\begin{cases} P_1(u,v,s,t,x,y,z,B), & \text{当 } u<s, v<t \text{ 时;}\\ I_B(y), & \text{当 } u=s, v<t, x=z \text{ 时;}\\ I_B(z), & \text{当 } u<s, v=t, x=y \text{ 时;}\\ I_B(x), & \text{当 } u=s, v=t, x=y=z \text{ 时.}\end{cases}$$

设 $X=(X_z)_{z\in\mathbf{R}_+^2}$ 是取值于 $(E,\mathscr{E})$, 适应于 $(\mathscr{F}_Z^0)_{Z\in\mathbf{R}_+^2}$ 的随机过程, 则 X 是具有转移函数 $P(u,v,s,t,x,y,z,B)$ 的宽过去马氏过程的充要条件是

$$E[f(X_{st})\mid\mathscr{F}_{uv}^{0*}]=P(u,v,s,t,X_{uv},X_{ut},X_{sv},f),$$

对 $\forall(u,v),(s,t)\in\mathbf{R}_+^2$, $(u,v)\leqslant(s,t)$, $f\in b\varepsilon$ 成立. 因此, 以后也可以把 $P(u,v,s,t,x,y,z,B)$ 称为宽过去马氏过程 X 的转移函数.

1 强马氏性的一般定义

引进 μ^0 类函数集: $\overline{\mathbf{R}_+^2}\subset\mu^0\subset\mathscr{O}^{0*}$. 由于 (X_Z) 仅定义于 $\mathbf{R}_+^2$ 上, 故以后对于 $\tau\in\mathscr{O}^{0*}$ 提到 X_τ 时, 均限于 $\{\tau<\infty\}$.

定义 1 设 $X=(X_z)_{z\in\mathbf{R}_+^2}$ 为具有转移函数 $P(u,v,s,t,x,y,z,B)$ 的宽过去马氏过程, 若对于 $\forall\tau,\eta\in\mu^0$, $\eta\geqslant\tau$ 且 $\eta\in\mathscr{F}_\tau^{0*}$, 有

(i) 对固定的 $B\in\mathscr{E}$, 映射 $(u,v,s,t,x,y,z)\to P(u,v,s,t,x,y,z,B)$ 是 $[\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)]^4\times\mathscr{E}^3$ 可测的;

(ii) (强 μ^0 可测性) $X_\eta\in\mathscr{F}^0$, $X_\tau,X_{\tau\circ\eta},X_{\eta\circ\tau}\in\mathscr{F}_\tau^{0*}$;

(iii) (强 μ^0 马氏性) $E[f(X_\eta)I_{(\eta<\infty)}\mid\mathscr{F}_\tau^{0*}]=P(\tau,\eta,X_\tau,X_{\tau\circ\eta},X_{\eta\circ\tau},f)I_{(\eta<\infty)}$,

对 $\forall f\in b\mathscr{E}$ 成立, 则称 X 为强 μ^0 宽过去马氏过程.

如果状态空间 $(E,\mathscr{E})$ 具有某种拓扑结构, 则我们还可以考虑左右两方的情况.

定义 2 设 $(E,\mathscr{E})$ 为拓扑可测空间, $X=(X_z)_{z\in\mathbf{R}_+^2}$ 为具有转移函数 $P(u,v,s,t,x,y,z,B)$ 的宽过去马氏过程, 且 X 的样本函数在 $\mathbf{R}_+^2$ 上的右极限 a. s 存在. 若对 $\forall\tau,\eta\in\mu^0$, $\eta\geqslant\tau$ 且 $\eta\in\mathscr{F}_\tau^{0*}$, 有

(i) 同定义 1中(i);

(ii) (强右 μ^0 可测性) $X_\eta\in\mathscr{F}^0$, $X_{\tau+},X_{\tau\circ\eta+},X_{\eta\circ\tau+}\in\mathscr{F}_{\tau+}^{0*}$;

(iii) (强右 μ^0 马氏性) $E[f(X_\eta)I_{(\eta<\infty)}\mid\mathscr{F}_{\tau+}^{0*}]=P(\tau,\eta,X_{\tau+},X_{\tau\circ\eta+},X_{\eta\circ\tau+},f)I_{(\eta<\infty)}$,

对 $\forall f\in b\mathscr{E}$ 成立, 则称 X 为强右 μ^0 宽过去马氏过程.

定义 3 设 $(E,\mathscr{E})$ 为拓扑可测空间, $X=(X_z)_{z\in\mathbf{R}_+^2}$ 为具有转移函数 $P(u,v,s,t,x,y,z,B)$ 的宽过去马氏过程, 且 X 的样本函数在 $\mathbf{R}_+^2-\lambda_0$ 上的左极限 a. s 存在(对 $Z\in\lambda_0$ 规定 $X_{Z-}=X_Z$). 若对 $\forall\tau,\eta\in\mu^0$, $\eta\geqslant\tau$ 且 $\eta\in\mathscr{F}_{\tau-}^{0*}$, 有

(i) 同定义 1中(i);

(ii) (强左 μ^0 可测性) $X_\eta\in\mathscr{F}^0$, $X_{\tau-},X_{\tau\circ\eta-},X_{\eta\circ\tau-}\in\mathscr{F}_{\tau-}^{0*}$;

(iii) (强左 μ^0 马氏性) $E[f(X_\eta)I_{(\eta<\infty)}\mid\mathscr{F}_{\tau-}^{0*}]=P(\tau,\eta,X_{\tau-},X_{\tau\circ\eta-},X_{\eta\circ\tau-},f)I_{(\eta<\infty)}$,

对 $\forall f\in b\mathscr{E}$ 成立, 则称 X 为强左 μ^0 宽过去马氏过程.

注: 定义 2中若 τ 是停点, 把"$\eta\in\mathscr{F}_\tau^{0*}$"换成"$\eta\in\mathscr{F}_{\tau+}^{0*}$", 则只能推出 η 是宽停点. $\eta=\tau+(h,k)$ ($h\geqslant 0,k\geqslant 0$ 为常数)时, $\eta\in\mathscr{F}_{\tau-}^{0*}$, 故定义 3中的 η 应满足 $\eta\in\mathscr{F}_{\tau-}^{0*}$. 易证本文的强 $\mathscr{O}^{0*}$ 宽过去马氏过程必是[9]中的宽过去强马氏过程. 在 $\eta=\tau+(s,t)$ ($s\geqslant 0,t\geqslant 0$ 为常数)时, 本文的强 $\mathscr{O}^{0*}$ 宽过去马氏过程就是[2]中的强 $\mathscr{O}^{0*}$ 马氏过程. 本文的强 $\mathscr{O}^{0*}$ 宽过去马氏过程未必是[1]中的强马氏过程, 因为此时 $P(\tau,\eta,X_\tau,X_{\tau\circ\eta},X_{\eta\circ\tau},f)I_{(\eta<\infty)}$ 不一定是 $\sigma(X_\tau,X_{\tau\circ\eta},X_{\eta\circ\tau})$ 可测的.

下面的定理 1给出了马氏过程为强右 $\mathscr{O}^{0*}$ 宽过去马氏过程的一个充分条件.

定理 1 设状态空间 $(E, \mathscr{E})$ 为距离可测空间, 右连续宽过去马氏过程 $X=(X_Z)_{Z\in \mathbf{R}_+^2}$ 的转移函数 $P(u, v, s, t, x, y, z, B)$ 满足:

对任意固定的连续函数 $f\in b\mathscr{E}$, $F(u, v, s, t, x, y, z) \triangleq P(u, v, s, t, x, y, z, f)$ 有如下连续性, 当 $x\to x_0$, $y\to y_0$, $z\to z_0$, $u\downarrow u_0$, $v\downarrow v_0$, $s\downarrow s_0$, $t\downarrow t_0$ 时, 有

$$F(u, v, s, t, x, y, z)\to F(u_0, v_0, s_0, t_0, x_0, y_0, z_0),$$

则 X 是强右 $\mathscr{O}^{0*}$ 宽过去马氏过程.

证明 由[9]中引理 2.1可知 X 满足定义 2中(i), 由[1]中定理 3.1可知 X 具有强 $\mathscr{O}^{0*}$ 可测性, 即 $X_\tau, X_{\tau\circ\eta}, X_{\eta\circ\tau}\in \mathscr{F}_\tau^{0*}\subset \mathscr{F}_{\tau+}^{0*}$, 再由 X 的右连续性可得 $X_{\tau+}, X_{\tau\circ\eta+}, X_{\eta\circ\tau+}\in \mathscr{F}_{\tau+}^{0*}$, 即 X 满足强右 $\mathscr{O}^{0*}$ 可测性. 以下证明 X 的强右 $\mathscr{O}^{0*}$ 马氏性.

设 $\tau=(\tau^1, \tau^2)\in \mathscr{O}^{0*}$, $\eta=(\eta^1, \eta^2)\in \mathscr{F}_\tau^{0*}$ 且 $\eta\geqslant\tau$, f为任一有界连续函数, 要证

$$E[f(X_\eta)I_{(\eta<\infty)}\mid \mathscr{F}_{\tau+}^{0*}]=P(\tau^1, \tau^2, \eta^1, \eta^2, X_\tau, X_{\tau\circ\eta}, X_{\eta\circ\tau}, f)I_{(\eta<\infty)}. \tag{1}$$

显然上式右边为 $\mathscr{F}_{\tau+}^{0*}$ 可测, 故只要证对一切 $A\in \mathscr{F}_{\tau+}^{0*}$ 成立

$$\int_A f(X_\eta)I_{(\eta<\infty)}P(\mathrm{d}\omega)=\int_A P(\tau^1, \tau^2, \eta^1, \eta^2, X_\tau, X_{\tau\circ\eta}, X_{\eta\circ\tau}, f)I_{(\eta<\infty)}P(\mathrm{d}\omega).$$

令

$$\eta_n^m\triangleq\begin{cases}2^{-n}j, & 若\dfrac{j-1}{2^n}\leqslant\eta^m<\dfrac{j}{2^n};\\ +\infty, & 若\ \eta^m=+\infty.\end{cases}\qquad \tau_n^m\triangleq\begin{cases}2^{-n}j, & 若\dfrac{j-1}{2^n}\leqslant\tau^m<\dfrac{j}{2^n};\\ +\infty, & 若\ \tau^m=+\infty.\end{cases}\quad (m=1, 2)$$

$$\tau_n\triangleq(\tau_n^1, \tau_n^2),\ \eta_n\triangleq(\eta_n^1, \eta_n^2).$$

$$A(n, i, j, k, l)\triangleq A\cap\left\{\left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{j-1}{2^n}\right)\leqslant\tau<\left(\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right), \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{l-1}{2^n}\right)\leqslant\eta<\left(\frac{k}{2^n}, \frac{l}{2^n}\right)\right\}.$$

易知 $A(n, i, j, k, l)\in \mathscr{F}_{2^{-n}i, 2^{-n}j}^{0*}$, 利用马氏性得

$$\int_A f(X_{\eta_n})I_{(\eta<\infty)}P(\mathrm{d}\omega)=\sum_{\substack{i\leqslant k\\ j\leqslant l}}\int_{A(n, i, j, k, l)}f(X_{2^{-n}k, 2^{-n}l})P(\mathrm{d}\omega)=$$

$$\sum_{\substack{i\leqslant k\\ j\leqslant l}}\int_{A(n, i, j, k, l)}P(2^{-n}i, 2^{-n}j, 2^{-n}k, 2^{-n}l, X_{2^{-n}i, 2^{-n}j}, X_{2^{-n}i, 2^{-n}l}, X_{2^{-n}k, 2^{-n}j}, f)P(\mathrm{d}\omega)=$$

$$\int_A P(\tau_n^1, \tau_n^2, \eta_n^1, \eta_n^2, X_{\tau_n}, X_{\tau_n\circ\eta_n}, X_{\eta_n\circ\tau_n}, f)I_{(\eta<\infty)}P(\mathrm{d}\omega).$$

令 $n\to\infty$, 由已知条件可得(1)式成立. 由 $\mathscr{L}-$系方法可证对任意 $f\in b\mathscr{E}$, (1)也成立.

注: 从证明中可以看出, 如果转移函数满足定义 2中的条件(i), 定理中 $F(u, v, s, t, x, y, z)$ 的条件换成 $\Phi(u, v, s, t)\triangleq F(u, v, s, t, X_{uv}, X_{ut}, X_{sv})$ 关于 (u, v) 右连续, 定理结果仍然成立.

推论 1 [4]中定义的 OUP_2 过程是强右 $\mathscr{O}^{0*}$ 宽过去马氏过程.

证明类似于[9]中推论 2.1, 故从略.

现在我们考虑完备化情况, 记 $\mathscr{F}^0$关于 P 的完备化为 $\mathscr{F}$, 相应 $(\mathscr{F}_z^0)$ 的完备化记为 $(\mathscr{F}_z^*)$, $\forall z\in \mathbf{R}_+^2$, 其他符号类推, 把右上角"0"符号去掉就是相应的完备化. μ^0 函数集变成 μ类, $\overline{\mathbf{R}_+^2}\subset\mu\subset\mathscr{O}^*$, 相应地, 我们得到强(强左, 强右)$\mu$马氏过程的概念, 这时定义 3中的 $X_{\tau-}\in \mathscr{F}_{\tau-}^*$ 是多余的.

特别, 取 $\mu=\mathscr{O}^*$, 我们得到强选(强左选)宽过去马氏过程的概念, 在强选的定义中, $X_\eta\in \mathscr{F}$是多余的. 取 $\mu=\mathscr{O}_+^*$, 得到强右选宽过去马氏过程的概念, 此时, 在强右选的定义中, $X_{\alpha+}\in \mathscr{F}_{\alpha+}$是多余的. 取 $\mu=\mathscr{P}^*$, 得到强料(强左料)马氏过程的概念, 取 $\mu=\mathscr{P}_+^*$, 得到强右料马氏过程的概念. 完全类似地, 我们可以定义强(强左, 强右)及宽过去马氏过程, 强(强左, 强右)不及宽过去马氏过程. 注意定义强不及宽过去马氏过程时, 要取 $\mu=\mathscr{J}^*\cup\overline{\mathbf{R}_+^2}$.

在完备化的情况, 定理 1是强右选马氏性的一个充分条件, 这时样本函数右连续的条件可以减弱为 a.s 右连续.

为了简单起见, 下面只考虑完备化情况.

2 各种宽过去强马氏性之间的关系

定理 2 设 μ_1 和 μ_2 是两个 μ 类函数集, 且 $\mu_1 \subset \mu_2$, 则每个强(强左, 强右) μ_2 宽过去马氏过程是强(强左, 强右) μ_1 宽过去马氏过程.

定理 3 设状态空间 $(E, \mathscr{E})$ 为距离可测空间, 宽过去马氏过程 X 的样本函数 a. s 右连续, $\overline{\mathbf{R}_+^2} \subset \mu \subset \mathscr{O}^*$. 则: X 是强右 μ 马氏过程 $\Rightarrow X$ 是强 μ 马氏过程. 特别, 若 $(\mathscr{F}_z^*)$ 右连续, 则"$\Rightarrow$"可换成"$\Leftrightarrow$".

证明　因为 X 适应右连续, 所以 X 宽过去循序可测, 由[1]中定理 3. 1可知 X 具有强 μ 可测性. 由定义 2中强右 μ 马氏性得

$$E[f(X_\eta) I_{(\eta<\infty)} \mid \mathscr{F}_{\tau+}^*] = P(\tau, \eta, X_\tau, X_{\tau\circ\eta}, X_{\eta\circ\tau}, f) I_{(\eta<\infty)},$$

两边关于 $\mathscr{F}_\tau^*$ 求条件数学期望得定义 1中的强 μ 马氏性.

定理 4 设宽过去马氏过程 X 的样本函数在 $\mathbf{R}_+^2$ 上 a. s 左连续, $\overline{\mathbf{R}_+^2} \subset \mu \subset \mathscr{O}^*$, 且对 $\forall \tau, \eta \in \mu$, 任意 $\Omega \to \overline{\mathbf{R}_+^2}$ 的 $\mathscr{F}_\tau^*$ 可测映射 η, $\eta \geqslant \tau$, 有 $X_\tau, X_{\tau\circ\eta}, X_{\eta\circ\tau} \in \mathscr{F}_{\tau-}^*$, 则: X 是强 μ 马氏过程 $\Rightarrow X$ 是强左 μ 马氏过程.

与[2]中不同, 对于 $\tau \in \mathscr{O}^*$, 存在 A, 使 τ_A 为可及点和 τ_{A^c} 为绝不可及点, 但 η_A 不一定是可及点. 因此, 我们未能得到: X 是强选宽过去马氏过程, 当且仅当 X 同时是强及和强不及宽过去马氏过程.

[参考文献]

[1] 侯强. 两指标马尔科夫过程的停点变换[J]. 西北电讯工程学院学报, 1986(3): 13-20.
[2] 周健伟. 两指标强马尔科夫过程[J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 1989(4): 7-11.
[3] 周健伟. 两指标过程的强马尔科夫性[J]. 应用概率统计, 1986, 2(4): 302-306.
[4] 王梓坤. 二参数 ORNSTEIN-UHLENBECK过程[J]. 数学物理学报, 1983, 4(3): 395-406.
[5] 杨向群, 李应求. 两参数马尔科夫过程论[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1996: 85-132.
[6] 任晓红, 陈慧婵, 张卓奎. 强鞅的停止性质[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2003, 41(2): 463-465.
[7] 张卓奎, 任晓红, 陈慧婵. 两指标停时及其性质[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2002, 40(2): 127-130.
[8] 王生喜. N指标随机过程的停止[J]. 新疆大学学报: 自然科学版, 2003, 20(1): 26-28.
[9] 杜保建. 两指标过程的宽过去强 Markov性[J]. 数理统计与应用概率, 1995, 10(4): 25-30.

[责任编辑: 丁　蓉]