第 34卷第 2期　　南京师大学报(自然科学版)　　Vol 34 No. 2
2011年 6月　　JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)　　June, 2011

一种改进的自适应投影法解广义纳什均衡问题

李小焕, 何洪津, 韩德仁

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 广义纳什均衡是非合作博弈论中一个重要的概念, 在经济学、管理科学、交通规划等领域有着广泛的应用. 本文提出一种改进的自适应投影方法求解广义纳什均衡问题, 并证明了新算法的全局收敛性. 数值实验结果也表明新方法的可靠性和有效性.

[关键词] 投影法, 广义纳什均衡问题, 拟变分不等式, 余强制

[中图分类号] O225　[文献标志码] A　[文章编号] 1001-4616(2011)02-0010-05

An Improved Self-Adaptive Projection Method for Solving Generalized Nash Equilibrium Problems

Li Xiaohuan, He Hongjin, Han Deren

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract This paper presents an improved self-adaptive projection method for generalized Nash equilibrium problems, which can be found wide applications in economics, management sciences and traffic assignment, etc. The global convergence of the new method is established under the co-coercive assumption, and preliminary numerical results demonstrate the proposed method is reliable and efficient in practice.

Key words projection method, generalized Nash equilibrium problem, quasi-variational inequality, co-coercive

广义纳什均衡问题作为非合作博弈论中最核心的概念, 在经济学、管理科学及交通规划等领域都有着广泛的应用[1-4]. 然而, 如何有效地求解广义纳什均衡问题仍是备受关注的研究课题. 众所周知, 广义纳什均衡问题可以等价转化为一个拟变分不等式问题[2], 这为求解广义纳什均衡问题开辟了一条有效的途径[4,5]. 本文构造一个新的搜索方向, 提出了一种改进的自适应投影算法, 并在较弱的条件假设下证明了该算法的全局收敛性, 最后的数值模拟结果也进一步说明了新方法的可靠性与有效性.

1　问题描述

假设有N个参与者, 第 $i(i = 1, 2, \dots, N)$个参与者的决策变量记为$x^i \in \mathbf{R}^{n_i}$, 且将所有参与者的决策变量所组成的向量记为$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \dots, x^N)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, 其中$n = \sum_{i=1}^{N}$. $\boldsymbol{x}^{-i}$表示除参与者 i之外的所有参与者所构成的决策变量. 为方便讨论, 我们有时也用$(x^i, \boldsymbol{x}^{-i})$代替$\boldsymbol{x}$. 记第 i个参与者的可行决策集为$X^i \subset \mathbf{R}^{n_i}$, 所有参与者所构成的可行策略集记为$\boldsymbol{X} = \prod_{j \in N} X^j \subset \mathbf{R}_n$, 而$\boldsymbol{X}^{-i} = \prod_{j \in N, j \neq i} X^j$表示除参与者 i之外的所有参与者所构成的可行决策集. 在这个非合作博弈中, 每个参与者 i都选定自己的策略 x^i极小化其支出函数 u^i, 即

$$(\mathrm{P}) \qquad \min_{x^i \in \mathbf{R}^{n_i}} u^i(x^i, \boldsymbol{x}^{-i}), \qquad \forall x^i \in K^i(\boldsymbol{x}^{-i}),$$

其中映射$K^i(\cdot): \boldsymbol{X}^{-i} \to X^i$表示受所有 $j \neq i$的参与者的决策影响的可行策略集, 则对所有$\boldsymbol{x}^{-i} \in \boldsymbol{X}^{-i}$, 都有

收稿日期: 2011-02-21.

基金项目: 国家自然科学基金(11071122)、江苏省自然科学基金(BK2009397).

通讯联系人: 韩德仁, 教授, 研究方向: 变分不等式及交通规划. E-mail: handeren@njnu.edu.cn

$K^i(\boldsymbol{x}^{-i}) \subseteq X^i$, 且 $K(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{N} K^i(\boldsymbol{x}^{-i})$. 若 $S_i(\boldsymbol{x}^{-i})$ 表示极小化问题 (P) 的解集, 则广义纳什均衡问题为找一向量 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ 使得对所有 i 都有 $x^i \in S_i(\boldsymbol{x}^{-i})$, $\boldsymbol{x}$ 称为广义纳什均衡点.

假设每个可行策略集 X^i 都是凸集, 支出函数 $u^i(\cdot, \boldsymbol{x}^{-i})$ 在 $\mathbf{R}^{n_i}$ 上是凸的连续可微函数, $K^i(\boldsymbol{x}^{-i}) \subseteq X^i$ 是 $\mathbf{R}^{n_i}$ 的闭凸子集, 则求解极小化问题 (P) 等价于求解一个变分不等式问题[2,6], 即找一点 $x^i \in K^i(\boldsymbol{x}^{-i})$, 使得

$$(\mathrm{VI}) \qquad (y^i - x^i)^{\mathrm{T}} \nabla_{x^i} u^i(x^i, \boldsymbol{x}^{-i}) \geqslant 0, \qquad \forall y^i \in K^i(\boldsymbol{x}^{-i}).$$

根据 $K(\boldsymbol{x})$ 定义, $\boldsymbol{x}$ 是广义纳什均衡点的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}$ 是下面拟变分不等式的解[2], 即

$$(\mathrm{QVI}) \qquad (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} F(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in K(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

其中 $F(\boldsymbol{x}) = (\nabla_{x^i} u^i(x^i, \boldsymbol{x}^{-i}))_{i=1}^{N} \in \mathbf{R}^n$.

2 预备知识

记 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$ 为向量的 2-范数, $P_\Omega(\cdot)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 到 Ω 上的投影算子, 即 $P_\Omega(v) := \arg\min\{\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\| \mid \boldsymbol{u} \in \Omega\}$. 根据投影算子 $P_\Omega(\cdot)$ 定义可得如下两个基本性质:

$$(\boldsymbol{u} - P_\Omega(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}(w - P_\Omega(\boldsymbol{u})) \leqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n, \forall w \in \Omega, \tag{2}$$

$$\|P_\Omega(\boldsymbol{u}) - P_\Omega(\boldsymbol{v})\| \leqslant \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n. \tag{3}$$

引理 1[2] 对 $\forall \beta > 0$, $\boldsymbol{x}^*$ 是 (QVI) 的解的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}^* = P_{K(\boldsymbol{x}^*)}(\boldsymbol{x}^* - \beta F(\boldsymbol{x}^*))$.

对 $\forall \beta > 0$, 令 $e(\boldsymbol{x}, \beta) = P_\Omega(\boldsymbol{x} - \beta F(\boldsymbol{x}))$, 则有如下引理.

引理 2[2,7] 对任意的 $\beta_2 \geqslant \beta_1 > 0$, 有 $\|e(\boldsymbol{u}, \beta_2)\| \leqslant \beta_2 \|e(\boldsymbol{u}, \beta_1)/\beta_1\|$, 并且 $\|e(\boldsymbol{u}, \beta_2)\| \geqslant \|e(\boldsymbol{u}, \beta_1)\|$.

从上面引理 2易得, 对 $\forall \beta > 0$, 有 $\min\{1, \beta\}\|e(\boldsymbol{u}, 1)\| \leqslant \|e(\boldsymbol{u}, \beta)\| \leqslant \max\{1, \beta\}\|e(\boldsymbol{u}, 1)\|$. 为方便讨论, 在整篇文章中, 我们作如下假设:

(A1) 解集 $S^* = \{\boldsymbol{u} \in S \mid (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} F(\boldsymbol{u}) \geqslant 0, \forall \boldsymbol{v} \in S\}$ 非空, 且 $K(\cdot)$ 在 X 上连续, 其中 $S = \bigcap_{\boldsymbol{u} \in X} K(\boldsymbol{u})$ 和 $S = \bigcup_{\boldsymbol{u} \in X} K(\boldsymbol{u})$;

(A2) 映射 $F(\cdot)$ 在 S 上是连续的, 且是 μ-余强制的, 即存在常数 $\mu > 0$, 对 $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$, 使得 $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}(F(\boldsymbol{u}) - F(\boldsymbol{v})) \geqslant \mu \|F(\boldsymbol{u}) - F(\boldsymbol{v})\|^2$ 成立.

注 1 (i) 假设 (A1) 并不容易验证, 但它是保证 (QVI) 的解集非空的一个充分条件. (ii) 假设 (A2) 映射 $F(\cdot)$ 是余强制的, 则必是单调映射, 即满足 $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}(F(\boldsymbol{u}) - F(\boldsymbol{v})) \geqslant 0$, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$.

3 算法及收敛性分析

算法 1 改进的自适应投影法.

(S0) 给定 $l, \mu, c \in (0, 1)$, $\lambda \in (0, 2)$, $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$, $\beta_0 = \gamma = 1$. 选择 $\boldsymbol{x}_{-1} \in X$, $\boldsymbol{x}_0 \in K(\boldsymbol{x}_{-1})$, 令 $k := 0$.

(S1) 若 $\|e(\boldsymbol{x}_k, \beta_k)\| \leqslant \varepsilon$ 停止; 否则, 转步 (S2).

(S2) 找最小的非负整数 m_k, 使得 $\beta_k = \gamma l^{m_k}$ 满足

$$\beta_k \|F(\boldsymbol{x}_k) - F(\tilde{\boldsymbol{x}}_k)\| \leqslant c \|\boldsymbol{x}_k - \tilde{\boldsymbol{x}}_k\|, \tag{4}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{x}}_k = P_{K(\boldsymbol{x}_k)}[\boldsymbol{x}_k - \beta_k F(\boldsymbol{x}_k)]$.

(S3) 计算

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k - \alpha_k d(\boldsymbol{x}_k, \beta_k)), \tag{5}$$

其中步长 α_k 为:

$$\alpha_k = \frac{\lambda e(\boldsymbol{x}_k, \beta_k)^{\mathrm{T}} \left\{ \theta \left(1 - \frac{\beta_k}{4\mu} \right) e(\boldsymbol{x}_k, \beta_k) + g(\boldsymbol{x}_k, \beta_k) \right\}}{(1 + \theta) \|d(\boldsymbol{x}_k, \beta_k)\|^2}.$$

(S4) 若 $\beta_k \|F(\boldsymbol{x}_k) - F(\tilde{\boldsymbol{x}}_k)\| \leqslant 0.4 \|\boldsymbol{x}_k - \tilde{\boldsymbol{x}}_k\|$, 取 $\gamma = \beta_k / 0.5$; 否则 $\gamma = \beta_k$. 令 $k := k + 1$, 转步 (S1).

算法中步 (S3) 的搜索方向 $d(\boldsymbol{x}_k, \beta_k)$ 定义为:

$$d(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)=e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)+\frac{1}{1+\theta}\beta_k F(\tilde{\boldsymbol{x}}_k),\tag{6}$$

且步长 α_k 中的 $g(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)$ 定义如下:

$$g(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)=e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)-\beta_k(F(\boldsymbol{x}_k)-F(\tilde{\boldsymbol{x}}_k)).\tag{7}$$

引理 **3**　若假设(A2)成立,且由算法产生的迭代点 $\boldsymbol{x}_k$ 不是(QVI)的解,则必存在某个 $\beta_k\in(0,\beta_{\max})$,使得(4)式成立.

证明　假设(4)式不成立,即

$$\beta_k\|F(\boldsymbol{x}_k)-F(\tilde{\boldsymbol{x}}_k)\|>c\|\boldsymbol{x}_k-\tilde{\boldsymbol{x}}_k\|,\ \forall\beta_k>0\tag{8}$$

由映射 $F(\cdot)$ 和投影算子的连续性可知,当 $\beta_k\to 0$ 时,有 $\tilde{\boldsymbol{x}}_k\to P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k)$. 分别考虑下面两种情况:

(i) 若 $\boldsymbol{x}_k\in K(\boldsymbol{x}_k)$,则由 $\beta_k\to 0$ 得 $\tilde{\boldsymbol{x}}_k\to\boldsymbol{x}_k$. 根据引理2及(8)式可得

$$0=\lim_{\beta_k\to 0}\|F(\boldsymbol{x}_k)-F(\tilde{\boldsymbol{x}}_k)\|\geqslant c\lim_{\beta_k\to 0}\frac{\|e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\|}{\beta_k}\geqslant c\|e(\boldsymbol{x}_k,1)\|>0$$

上式显然是矛盾的.

(ii) 若 $\boldsymbol{x}_k\notin K(\boldsymbol{x}_k)$,由(8)式得

$$0=\lim_{\beta_k\to 0}\beta_k\|F(\boldsymbol{x}_k)-F(P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k))\|\geqslant c\|\boldsymbol{x}_k-P_{K(\boldsymbol{x}_k)}(\boldsymbol{x}_k)\|>0$$

显然也是矛盾的. 综上所述,假设不成立,即引理结论是正确的. 证毕.

上面引理说明新算法能在有限步内找到一个合适的 $\beta_k>0$,使其满足(4)式. 而且,容易验证 $\inf\{\beta_k\}=\beta_{\min}>0$[8,9].

记 $\boldsymbol{x}^*$ 是(QVI)的解,若 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}d(\boldsymbol{x})\leqslant 0$,则表明 $d(\boldsymbol{x})$ 是距离函数 $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|^2$ 的一个下降方向. 下面引理说明,在 $F(\cdot)$ 和 β_k 满足一定条件下,由(7)式定义的 $g(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)$ 是个上升方向.

引理 **4**[8]　假设 $F(\cdot)$ 在 S 上是连续单调的,参数 β_k 满足(4)式,$\boldsymbol{x}^*\in S^*$,则对任意 $\boldsymbol{x}_k\notin S^*$,存在 $c\in(0,1)$ 使得

$$g(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*)\geqslant e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\geqslant(1-c)\|e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\|^2>0$$

引理 **5**　若假设(A1)、(A2)成立,且 $\boldsymbol{x}^*\in S^*$,则对任意的 $\boldsymbol{x}_k\in S$,有

$$(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\geqslant\left(1-\frac{\beta_k}{4\mu}\right)\|e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\|^2.\tag{9}$$

证明　一方面,在(1)式中,令 $y:=P_{K(\boldsymbol{x}_k)}[\boldsymbol{x}_k-\beta_k F(\boldsymbol{x}_k)]$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$,有

$$\{P_{K(\boldsymbol{x}_k)}[\boldsymbol{x}_k-\beta_k F(\boldsymbol{x}_k)]-\boldsymbol{x}^*\}^{\mathrm{T}}F(\boldsymbol{x}^*)\geqslant 0\tag{10}$$

另一方面,在(2)式中,令 $u:=P_{K(\boldsymbol{x}_k)}[\boldsymbol{x}_k-\beta_k F(\boldsymbol{x}_k)]$, $w:=\boldsymbol{x}^*$,则有

$$\{[\boldsymbol{x}_k-\beta_k F(\boldsymbol{x}_k)]-P_{K(\boldsymbol{x}_k)}[\boldsymbol{x}_k-\beta_k F(\boldsymbol{x}_k)]\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{x}^*-P_{K(\boldsymbol{x}_k)}[\boldsymbol{x}_k-\beta_k F(\boldsymbol{x}_k)]\}\leqslant 0\tag{11}$$

不等式(10)乘以 β_k 加上(11)式,根据假设(A2),重新整理得:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)&\geqslant\|e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\|^2+\beta_k(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}(F(\boldsymbol{x}_k)-F(\boldsymbol{x}^*))-\\&\beta_k(F(\boldsymbol{x}_k)-F(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\geqslant\|e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\|^2+\beta_k\mu\|F(\boldsymbol{x}_k)-F(\boldsymbol{x}^*)\|^2-\\&\beta_k(F(\boldsymbol{x}_k)-F(\boldsymbol{x}^*))^{\mathrm{T}}e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)=\|e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\|^2+\\&\|\sqrt{\beta_k\mu}(F(\boldsymbol{x}_k)-F(\boldsymbol{x}^*))-\sqrt{\beta_k/(4\mu)}e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\|^2-\frac{\beta_k}{4\mu}\|e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\|^2\geqslant\left(1-\frac{\beta_k}{4\mu}\right)\|e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\|^2.\end{aligned}$$

由 S^* 的定义和 $x_k\in K(\boldsymbol{x}_{k-1})$,有 $F(\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*)\geqslant 0$ 由假设(A2)易得

$$F(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*)\geqslant 0\tag{12}$$

引理 **6**　若假设(A2)成立,$\boldsymbol{x}^*\in S^*$,参数 $\beta_k<4\mu$ 且满足(4)式,迭代点 $\boldsymbol{x}_k$ 不是(QVI)的解,则 $d(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)$ 是一个上升方向.

证明　令 $d(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)=e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)+\beta_k F(\tilde{\boldsymbol{x}}_k)$,则由(7)式得 $d(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)=g(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)+\beta_k F(\boldsymbol{x}_k)$.

由引理5和(12)式,可得

$$d(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*)\geqslant e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\geqslant(1-c)\|e(\boldsymbol{x}_k,\beta_k)\|^2>0\tag{13}$$

不等式(9)乘以 $\theta>0$ 加上(13)式, 整理得

$$(x_k-x^*)^{\mathrm T}\{(1+\theta)e(x_k,\beta_k)+\beta_kF(\tilde x_k)\}\geqslant e(x_k,\beta_k)^{\mathrm T}\left(g(x_k,\beta_k)+\theta\left(1-\frac{\beta_k}{4\mu}\right)e(x_k,\beta_k)\right)\geqslant$$

$$\left(1-c+\theta\left(1-\frac{\beta_k}{4\mu}\right)\right)\|e(x_k,\beta_k)\|^2=\theta\|e(x_k,\beta_k)\|^2. \tag{14}$$

由 $d(x_k,\beta_k)$ 的定义(6)式, 上面(14)式等价于

$$(x_k-x^*)^{\mathrm T}d(x_k,\beta_k)\geqslant\frac{\theta}{1+\theta}\|e(x_k,\beta_k)\|^2.$$

因此, 若 $\beta_k<4\mu$ 且满足(4)式, 当 x_k 不是(QVI)的解, 则上式大于零成立, 即 $d(x_k,\beta_k)$ 是一个上升方向.

为方便下面讨论, 记

$$\phi(x_k,\beta_k)=e(x_k,\beta_k)^{\mathrm T}\left\{\theta\left(1-\frac{\beta_k}{4\mu}\right)e(x_k,\beta_k)+g(x_k,\beta_k)\right\}.$$

若引理 6的假设条件都成立, 则由引理 4和引理 5易得 $\phi(x_k,\beta_k)\geqslant\theta\|e(x_k,\beta_k)\|^2>0$, 那么步长 $\alpha_k>0$ 显然也成立.

定理 1 若假设(A1)、(A2)成立, $\beta_k<4\mu$, 则由算法 1产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 是有界的.

证明　令 $x^*\in S^*$, 由(5)式及(3)式, 可得

$$\|x_{k+1}-x^*\|^2=\|P_{K(x_k)}(x_k-\alpha_kd(x_k,\beta_k))-x^*\|^2\leqslant\|x_k-x^*-\alpha_kd(x_k,\beta_k)\|^2=$$

$$\|x_k-x^*\|^2-2\alpha_k(x_k-x^*)^{\mathrm T}d(x_k,\beta_k)+\alpha_k^2\|d(x_k,\beta_k)\|^2. \tag{15}$$

将(14)式重新整理, 得

$$(x_k-x^*)^{\mathrm T}d(x_k,\beta_k)\geqslant\frac{1}{1+\theta}\phi(x_k,\beta_k).$$

将上式带入(15)式, 根据 α_k 的定义有

$$\|x_{k+1}-x^*\|^2\leqslant\|x_k-x^*\|^2-\frac{2-\lambda}{1+\theta}\alpha_k\phi(x_k,\beta_k). \tag{16}$$

根据 $\phi(x_k,\beta_k)>0$, $\alpha_k>0$, 从(16)式立得

$$\|x_{k+1}-x^*\|^2\leqslant\|x_k-x^*\|^2\leqslant\cdots\leqslant\|x_0-x^*\|^2. \tag{17}$$

这说明序列 $\{x_k\}$ 是有界的. 证毕.

定理 2 若假设(A1)、(A2)成立, 参数 $\beta_k<4\mu$, 则由算法 1产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 的任意聚点是(QVI)问题的一个解.

证明　不等式(17)说明 $\{\|x_k-x^*\|\}$ 是单调下降的有界序列, 因而必有聚点, 且由(16)式可得 $\lim\limits_{k\to+\infty}\alpha_k\phi(x_k,\beta_k)=0$, 即 $\lim\limits_{k\to+\infty}\phi(x_k,\beta_k)^2\setminus\|d(x_k,\beta_k)\|^2=0$. 根据 $\phi(x_k,\beta_k)\geqslant\theta\|e(x_k,\beta_k)\|^2$ 有

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\|e(x_k,\beta_k)\|^2}{\|d(x_k,\beta_k)\|}=0. \tag{18}$$

假设(A1)、(A2)成立, 由(5)式和(6)式, 容易验证序列 $\{d(x_k,\beta_k)\}$ 也是有界的. 从而由(18)式可得

$$\lim_{k\to+\infty}\|x_k-\tilde x_k\|=\lim_{k\to+\infty}\|e(x_k,\beta_k)\|=0 \tag{19}$$

令 $\bar x$ 是序列 $\{x_k\}$ 的一个聚点, $\{x_{k_j}\}_{k_j\in\mathcal N}$ 是相应的子序列, 即 $\lim\limits_{k_j\in\mathcal N,j\to+\infty}x_{k_j}=\bar x$, 其中 $\mathcal N\subseteq\{0,1,\cdots\}$. 下证 $\bar x$ 是(QVI)问题的一个解.

由(19)式得 $\lim\limits_{k_j\in\mathcal N,j\to+\infty}\tilde x_{k_j}=\bar x$, 结合 $K(\cdot)$ 上半连续和 $\tilde x_k\in K(x_k)$, 可以得到 $\bar x\in K(\bar x)$. 下面只需证明 $(x-\bar x)^{\mathrm T}F(\bar x)\geqslant0$, $\forall x\in K(\bar x)$.

首先说明 $\{e(x_k,1)\}$ 至少存在一个子序列 $\{\|e(x_{k_j},1)\|\}_{k_j\in\mathcal N}$, 使得 $\lim\limits_{k_j\in\mathcal N,j\to+\infty}\|e(x_{k_j},1)\|=0$

由于 $\inf\{\beta_k\}=\beta_{\min}>0$, 由引理 2和(19)式, 有

$$\lim_{k_j\in\mathcal N,j\to+\infty}\|e(x_{k_j},1)\|\leqslant\lim_{k_j\in\mathcal N,j\to+\infty}\frac{\|e(x_{k_j},\beta_{k_j})\|}{\min\{1,\beta_{\min}\}}=0$$

因为 $K(\cdot)$ 又是下半连续的, 对任意的 $y\in K(\bar x)$, 存在 $y_k\in K(x_k)$ 使得 $\lim\limits_{k_j\in\mathcal N,j\to+\infty}y_{k_j}=y$. 令(2)式中 u:

$= \boldsymbol{x}_{k_j} - F(\boldsymbol{x}_{k_j}), w = y_{k_j} \in K(\boldsymbol{x}_{k_j})$ 和 $\Omega = K(\boldsymbol{x}_{k_j})$, 可得

$$\{y_{k_j} - \boldsymbol{x}_{k_j} + e(\boldsymbol{x}_{k_j}, 1)\}^{\mathrm{T}} F(\boldsymbol{x}_{k_j}) - \{y_{k_j} - \boldsymbol{x}_{k_j} + (e\boldsymbol{x}_{k_j}, 1)\}^{\mathrm{T}} e(\boldsymbol{x}_{k_j}, 1) \geqslant 0.$$

上式中令 $j \to +\infty$, 立得 $(y - \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} F(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 再由 y 的任意性可知 $\boldsymbol{x}$ 是(QVI)问题的解. 证毕.

4 数值实验

为了说明本文新算法的可行性和有效性, 我们考虑一个修改的 Stackelberg-Cournot-Nash 均衡问题[4], 其中产品成本参数具体设置与文献[4]中的设置相同. 同时, 我们将文献[4]中的算法 1(记为: ZQX) 与本文提出的算法(记为: SAPM)进行比较. 所有程序都用 Matlab 语言编写, 并在 HP 台式机上运行. 整个实验中, 我们设定弹性需求参数 $\eta = 1.1$, 而在 ZQX 算法中参数设置为 $\gamma = 1$, $l = 0.5$, $\mu = 0.3$ 和 $\rho = 1.99$, 本文 SAPM 算法中参数设定为 $\theta = 3.5$, $\gamma = 1$, $l = 0.5$, $c = 0.85$, $\mu = 0.9$ 和 $\lambda = 1.99$. 另外, 计算中我们设定最大迭代次数为 1 000次, 停机准则为 $\|e(\boldsymbol{x}, 1)\| = 10^{-6}$.

两种算法最终得到 5个公司最大的利润分别为 (36.932, 41.818, 43.706, 42.659, 39.179). 表 1给出了不同初始点情况下, 两种算法的计算迭代次数, 函数值 $F(\cdot)$ 的预估次数及运算 CPU 时间的比较结果. 从表中我们也明显看出, 新算法 SAPM 较 ZQX 更快速, 有效.

表 1　两种算法的迭代次数, 函数值计算次数以及计算时间比较结果

Table1　Comparison of number of iterations, function evaluations and CPU time of two methods

Starting point	Num. Iter		Num. Fun. Eval		CPU time/s	
	ZQX	SAPM	ZQX	SAPM	ZQX	SAPM
50* ones(5, 1)	86	34	104	34	0.043	0.015
10* ones(5, 1)	99	33	175	35	0.046	0.015
5* ones(5, 1)	102	34	194	37	0.048	0.016
1* ones(5, 1)	109	38	259	45	0.053	0.015
0.1* ones(5, 1)	109	43	263	55	0.031	0.016
10* rand(5, 1)	101	34	192	36	0.047	0.015

5 结论

本文主要通过构造一个新的下降方向, 提出了一种改进的自适应投影法求解广义纳什均衡问题, 并在映射 F(·)是余强制的条件下, 证明了算法的全局收敛性. 文中数值结果进一步说明了改进的有效性.

[参考文献]

[1] Contreras J, Klusch M, Krawczyk J B. Numerical solutions to Nash-Cournot equilibria in coupled constraint electricity markets [J]. IEEE Transaction on Power Systems, 2004, 19(1): 195-206.

[2] Facchinei F, Pang J S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[3] 刘肇军, 刘宗谦, 冯素芬. 有限策略型博弈中的相关策略与具有合约的博弈及其均衡[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2008, 31(3): 33-38.

[4] Zhang J Z, Qu B, Xiu N H. Some projection-like methods for the generalized Nash equilibria[J]. Computational Optimization and Applications, 2010, 45(1): 89-109.

[5] Panicucci P, Pappalardo M, Passacantando M. On solving generalized Nash equilibrium problems via optimization[J]. Optimization Letters, 2009, 3(3): 419-435.

[6] Sun W Y, Yuan Y X. Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming[M]. New York: Springer, 2006.

[7] Zhu T, Yu Z G. A simple proof for some important properties of the projection mapping[J]. Mathematical Inequalities and Applications, 2004, 7(3): 453-456.

[8] Han D R, Lo H K. Two new self-adaptive projection methods for variational inequality problems[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 43(12): 1 529-1 537.

[9] He B S, He X Z, Liu H X, et al. Self-adaptive projection method for co-coercive variational inequalities[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 196(1): 43-48.

[责任编辑: 丁　蓉]