带有极大值项的中立型差分方程非振动解的渐近性

谭福锦, 邓艳平

(广西民族大学数学与计算机科学学院, 广西 南宁 530006)

[摘要] 研究了带有极大值项的一阶中立型差分方程 $\Delta(x_n + p_n x_{n-k}) + q_n \max_{s\in[n-l,n]} r_s x_s = 0, n\in \mathbf{N}$, 得到了方程非振动解的渐近性的一些充分条件, 拓广了相关的研究工作.

[关键词] 中立型差分方程, 极大值项, 非振动解, 渐近性

[中图分类号] O175 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)02-0015-03

The Asymptotic Behavior of Nonoscillatory Solutions of Neutral Difference Equations With "Maxima"

Tan Fujin, Deng Yanping

(College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationlities, Nanning 530006, China)

Abstract This paper considers the first order neutral difference equation, $\Delta(x_n + p_n x_{n-k}) + q_n \max_{s\in[n-l,n]} r_s x_s = 0, n\in \mathbf{N}$. Sufficient conditions for asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of the equation are obtained, related research work and results are extensioned.

Key words neutral difference equations, maxima, solution of nonoscillatory, asymptoic

近年来, 带有极大值项的中立型微分方程引起了一些专家学者的广泛关注, 并对此类方程的振动性和非振动解的存在性等进行了研究, 见文献[1, 2]等, 而相应的带有极大值项的差分方程的理论研究还较少, 张广和高英在文献[3]中讨论了方程

$$\Delta(x_n + px_{n-k}) + q_n \max_{s\in[n-l,n]} x_s = 0, \quad n\in \mathbf{N}, \tag{1}$$

得到了方程(1)的非振动解的渐近性的若干充分条件. 罗交晚等在文献[4]中讨论了方程

$$\Delta(x_n + p_n x_{n-k}) + q_n \max_{s\in[n-l,n]} x_s = 0, \quad n\in \mathbf{N} \tag{2}$$

的振动解和非振动解的渐近性, 得到了一些有意义的结果. 范彩霞等在文献[5]中讨论了带极大值项的一阶中立型差分方程

$$\Delta(x_n + p_n x_{n-k}) + q_n \max_{s\in[n-l,n]} r_s x_s = 0, \quad n\in \mathbf{N} \tag{3}$$

的振动性, 其中$\{p_n\}$为实数列, $\{q_n\}$为非负实数列, 而$\{r_n\}$为非负不减的实数列, $k, l\in \mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\}$, 得到了方程(3)所有解振动的若干充分条件, 推广并改进了文[4]中的结果. 本文讨论方程(3)的非振动解的渐近性, 获得了一些充分条件, 推广了文[4, 5]的部分结果.

1 定义和引理

定义 1 方程(3)的解是指满足方程(3)的实数列$\{x_n\}_{n_0}^{\infty}$, 方程(3)的解称为非振动的, 如果它最终为正或最终为负, 否则称为振动的.

定义 2 称 $\Delta Z_n = Z_{n+1} - Z_n$ 为向前差分算子.

收稿日期: 2010-12-20
基金项目: 广西省教育厅科研项目(201012MS075).
通讯联系人: 谭福锦, 教授, 研究方向: 差分方程与离散动力系统. E-mail: tanfujin@sina.com

对 $m, n\in\mathbf{N}$, $m<n$, 记 $[m, n]=\{m, m+1, \cdots, n\}$.

注 1　若无特别说明, 本文所有不等式均对充分大的 n 成立.

定义 3　称条件(H)成立, 如果

(H_1) k 和 l 为正整数;

(H_2) $\{p_n\}$ 为实数列;

(H_3) $\{q_n\}$ 为非负实数列, $\{r_n\}$ 为 $(0, 1]$ 上的非负不减的实数列;

(H_4) $\sum_{n=n_0}^{\infty}q_n\max_{s\in[n-l, n]}r_s=\infty$.

令

$$Z_n=x_n+p_nx_{n-k}, \tag{4}$$

则由(3)可得

$$\Delta Z_n=-q_n\max_{s\in[n-l, n]}r_sx_s. \tag{5}$$

引理 1　假设条件(H)成立,

(Ⅰ) 若 $p\leqslant p_n\leqslant -1$, 且 $\{x_n\}$ 是(3)的正解, 则 $\{Z_n\}$ 非增且 $Z_n<0$;

(Ⅱ) 若 $p\leqslant p_n\leqslant -1$, 且 $\{x_n\}$ 是(3)的负解, 则 $\{Z_n\}$ 非减且 $Z_n>0$;

(Ⅲ) 若 $-1\leqslant p_n\leqslant 0$, 且 $\{x_n\}$ 是(3)的正解, 则 $\{Z_n\}$ 非增且 $Z_n>0$;

(Ⅳ) 若 $-1\leqslant p_n\leqslant 0$, 且 $\{x_n\}$ 是(3)的负解, 则 $\{Z_n\}$ 非减且 $Z_n<0$.

证明　这里仅证(Ⅰ)和(Ⅲ), 采用与文[4]中的引理1类似的方法, 其余可类证.

(Ⅰ) 因为 $x_n>0$, 由(5)知, $\Delta Z_n\leqslant 0$, 即 $Z_{n+1}-Z_n\leqslant 0$ 或 $Z_{n+1}\leqslant Z_n$, 从而知 $\{Z_n\}$ 非增. 假设 $Z_n>0$, 则由 $p\leqslant p_n\leqslant -1$ 及(4)得, $x_n>-p_nx_{n-k}\geqslant x_{n-k}$, 可推出 $r_nx_n\geqslant r_{n-k}x_{n-k}$, 因此, 存在常数 $m>0$, 使得 $r_nx_n>m$, 故 $\max_{s\in[n-l, n]}r_sx_s>m$. 由(5)得, $\Delta Z_n\leqslant -mq_n$, 因此对充分大的 n_1, 有 $Z_n\leqslant Z_{n_1}-m\sum_{s=n_1}^{n}q_s\max_{s\in[n-l, n]}r_s$, 令 $n\to\infty$, 利用(H_4), 知 $Z_n\to-\infty$, 这与假设矛盾, 故 $Z_n<0$.

(Ⅲ) 因为 $x_n>0$, 由(5)知 $\Delta Z_n\leqslant 0$, 从而 $\{Z_n\}$ 非增. 假设 $Z_n<0$, 由 $-1\leqslant p_n\leqslant 0$ 及(4), 有

$$x_n\leqslant x_{n-k}, \tag{6}$$

从而 $\{x_n\}$ 为有界序列及 $\{Z_n\}$ 有界, 令 $\lim_{n\to\infty}Z_n=L<0$, $C=\liminf_{n\to\infty}r_nx_n$, 不妨设 $C>0$, 则对充分大的 n 有 $r_nx_n\geqslant\frac{C}{2}$, 故 $\max_{s\in[n-l, n]}r_sx_s\geqslant\frac{C}{2}$, 与(Ⅰ)中同样可证 $\lim_{n\to\infty}Z_n=-\infty$, 这与 $\{Z_n\}$ 有界矛盾, 因此, $\liminf_{n\to\infty}r_nx_n=0$, 并由 $0<r_nx_n\leqslant x_n(r_n\in(0, 1])$, 从而推出 $\liminf_{n\to\infty}x_n=0$, 即存在子序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $\lim_{i\to\infty}n_i=\infty$ 和 $\lim_{n_i\to\infty}x_{n_i-k}=0$, 由(6)知 $\lim_{n_i\to\infty}x_{n_i}=0$, 因此 $\lim_{i\to\infty}Z_{n_i}=0$, 这与 $\lim_{n\to\infty}Z_n=L<0$ 矛盾, 故 $Z_n>0$. 证毕.

2　主要结果与证明

定理 1　如果条件(H)成立, $l\geqslant k$, 且存在实数 p_1 和 p_2, 使得

$$-1<p_1\leqslant p_n\leqslant p_2, \tag{7}$$

若 $\{x_n\}$ 是(3)的正解, 则 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

证明　仅就 $-1<p_1<0$ 和 $p_2>0$ 的情形证明, 其余情形可类证. 以下分三步完成:

第一步证: $Z_n>0$.

由(5)和 $\{Z_n\}$ 非增, 假设 $Z_n<0$, 则存在常数 $C>0$, 使得 $Z_n<-C$ 且有 $p_n<0$, 因此

$$-x_{n-k}<p_nx_{n-k}<x_n+p_nx_{n-k}=Z_n<-C,$$

由(4)和(5)及 $x_{n-k}>C$ 得, $\lim_{n\to\infty}Z_n=-\infty$, 因此, $\limsup_{n\to\infty}x_n=\infty$.

另一方面, 因为 $Z_n<0$, 则由(5)和(7)知, $x_n<-p_nx_{n-k}<x_{n-k}$, 这与 $\limsup_{n\to\infty}x_n=\infty$ 矛盾, 故 $Z_n>0$.

第二步证: $\lim_{i\to\infty}Z_{n_i}=0$.

因为 $\{Z_n\}$ 非增且 $Z_n>0$, 故有有限极限 $L=\lim_{n\to\infty}Z_n\geqslant 0$, 若 $L>0$, 则由(4)和(7)得

$$L < x_n + p_n x_{n-k} \leqslant x_n + p_2 x_{n-k} \leqslant (1+p_2)\max\{x_n, x_{n-k}\},$$

故 $\max\{x_n, x_{n-k}\} > \dfrac{L}{1+p_2}$. 因为 $l \geqslant k$, 所以 $\max\limits_{s\in[n-l, n]} r_s x_s \geqslant \dfrac{L\bar{r}}{1+p_2}$, 其中 $\bar{r} = \min\limits_{s\in[n-l, n]}\{r_s\}$, 从而由(5)和($H_4$)得, $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = -\infty$, 这与 $Z_n > 0$矛盾, 故 $\lim\limits_{i\to\infty} Z_{n_i} = 0$.

第三步证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

假设$\{x_n\}$无界, 则存在子数列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_{ii}} = \infty$, 且 $\max\limits_{s\in[n-l, n]} r_s x_s = r_{n_i} x_{n_i}$, 则

$$Z_{n_i} = x_{n_i} + p_{n_i} x_{n_i-k} \geqslant x_{n_i} + p_1 x_{n_i-k} \geqslant (1+p_1) x_{n_i}.$$

因为 $1+p_1 > 0$, 所以 $\lim\limits_{i\to\infty} Z_{n_i} = \infty$, 这与(2)矛盾, 故$\{x_n\}$有界. 令 $d = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, 则 $d < \infty$, 选择子数列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} n_j = \infty$, $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = d$, 因为$\{x_{n_j-k}\}$和$\{p_{n_j}\}$有界, 可选择子序列: $\{n_t\}_{t=1}^{\infty} \subseteq \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, 使得$\{p_{n_t}\}$和$\{x_{n_t-k}\}$收敛, 则

$$0 = \lim_{t\to\infty} Z_{n_t} = \limsup_{n\to\infty} x_n + \lim_{t\to\infty} p_{n_t} x_{n_t-k},$$

因此, 如果 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{n_t} \geqslant 0$, 则 $0 \geqslant \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$, 如果 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{n_t} < 0$, 则

$$0 = \limsup_{n\to\infty} x_n + \lim_{t\to\infty} p_{n_t} x_{n_t-k} \geqslant (1+\lim_{t\to\infty} p_{n_t})\limsup_{n\to\infty} x_n \geqslant 0,$$

因此, $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 证毕.

以下将去掉定理1中条件 $l \geqslant k$, 但需将条件(H_4)改为条件

(H_5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{q}_n = \infty$, $\tilde{q}_n = \min\{q_n, q_{n+k}\}$.

定理 2 假设条件(H_1)-(H_3)成立, (H_5)和(7)成立, 如果$\{x_n\}$为(3)的正解, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明 与定理1一样分三步证明, 其中第一步和第三步与定理1中的证明完全类似, 下证第二步, 即证 $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = 0$.

由(3)、(5)式和 $\tilde{q}_n$ 的定义以及 $0 < r_n \leqslant 1$, 可知,

$$\begin{aligned}\Delta Z_n - \tilde{q}_{n-k}\max_{s\in[n-l, n]}(p_s x_{s-k}) &= -q_n\max_{s\in[n-l, n]} r_s x_s - \tilde{q}_{n-k}\max_{s\in[n-l, n]} p_s x_{s-k} \leqslant \\ -\tilde{q}_{n-k}\left[\max_{s\in[n-l, n]} x_s + \max_{s\in[n-l, n]}(p_s x_{s-k})\right] &\leqslant -\tilde{q}_{n-k}\left[\max_{s\in[n-l, n]}(x_s + p_s x_{s-k})\right] = \\ -\tilde{q}_{n-k}\max_{s\in[n-l, n]} Z_s &= -\tilde{q}_{n-k} Z_{n-l}, \text{(据引理 1}\{Z_n\}\text{非增)}\end{aligned}$$

因此

$$\Delta Z_n - \tilde{q}_{n-k}\max_{s\in[n-l, n]}(p_s x_{s-k}) \leqslant -\tilde{q}_{n-k} Z_{n-l}. \tag{8}$$

假设 $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = c > 0$, 则 $Z_n \geqslant c$, 从而由(8)式知

$$\Delta Z_n - \tilde{q}_{n-k}\max_{s\in[n-l, n]}(p_s x_{s-k}) \leqslant -c\tilde{q}_{n-k},$$

对上式两边求和, 得

$$Z_n - Z_{n_1} - \sum_{s=n_1}^{n} \tilde{q}_{s-k}\max_{v\in[s-l, s]}(p_v x_{v-k}) \leqslant -c\sum_{s=n_1}^{n} \tilde{q}_{s-k}.$$

从而, 由(H_5)知,

$$\sum_{s=n_1}^{n} \tilde{q}_{s-k}\max_{v\in[s-l, s]}(p_v x_{v-k}) = \infty.$$

又由$\{p_n\}$和$\{r_n\}$有界, 故亦有:

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \tilde{q}_{n-k}\max_{s\in[n-l, n]} r_{s-k} x_{s-k} = \infty,$$

即有

$$\sum_{n=n_1-k}^{\infty} q_n\max_{s\in[n-l, n]} r_s x_s = \infty,$$

由(5)知, $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = -\infty$, 产生矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = 0$.

(下转第 22页)

$$2^j\lambda_j + \frac{432}{cn} < \frac{3}{2}\left(2^{j-1}\lambda_{j-1} + \frac{432}{cn}\right),$$

故

$$0 < \lambda_j < \left(\lambda_0 + \frac{432}{cn}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^j - \frac{432}{c2^j n},$$

因此 $\lim_j \lambda_j = 0$, 故

$$\frac{1}{c} \leqslant \lim_j\left(\frac{13}{20} + \frac{1}{24}\lambda_{j-1} - \frac{1}{18}\lambda_j + \frac{3}{c2^j n}\right) = \frac{13}{20},$$

这与假设矛盾. 证毕.

[参考文献]

[1] Freud R. On sums of subsequent terms of permutations[J]. Acta Math Hungar, 1983, 41(1/2): 177-185.

[2] Dvornicich R. On a problem of cyclic permutations of integers[J]. Discrete Appl Math, 1980, 2(4): 353-355.

[3] Sidorenko A F. An infinite permutation without arithmetic progressions[J]. Discrete Math, 1988, 69(2): 211.

[4] Polyakov A B. On equilibrium distributions on the set of permutations of integers[J]. Russian Math Surveys, 1999, 54(2): 450-452.

[5] Erdős P, Freud R, Hegyvári N. Arithmetical properties of permutations of integers[J]. Acta Math Hungar, 1983, 41 (1/2): 169-176.

[6] Saias E. Applications des entiers à diviseurs denses[J]. Acta Arith, 1998, 83(3): 225-240.

[责任编辑: 丁　蓉]

(上接第 17页)

注 **2** 在上述两个定理中, 当取 $r_s = 1$时, 即可获得文 *[4]* 中的定理 1和定理 2, 因此文 *[4]* 中的定理 1和定理 2可分别看成是本文定理 1和定理 2的特例.

[参考文献]

[1] Bainov D, Petrov V, Proytcheva V. Existence and asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second order neutral differential equations with “Maxima” [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 83: 237-249.

[2] Petrov V. Nonoscillatory solutions of neutral differential equations with “Maxima” [J]. Communications in Applied Analysis, 1998, 2: 129-142.

[3] 张广, 高英. 差分方程的振动理论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.

[4] 罗交晚, 刘正荣, 俞元洪. 带有极大值项的中立型差分方程的振动性和非振动性 [J]. 应用数学学报, 2002, 25(3): 385-391.

[5] 范彩霞, 赵爱民, 邓嵩. 带有极大值项的中立型差分方程的振动性 [J]. 山西大学学报: 自然科学版, 2005, 28(1): 5-7.

[责任编辑: 丁　蓉]