排列中相邻两项的最大公因子

姬成双

(南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 1983年, Erdös P, Freud R和 Hegyvári N证明了对所有正整数的任一排列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 有 $\liminf_i \frac{(a_i, a_{i+1})}{i} \leqslant \frac{61}{90}$. 本文将结果改进为 $\liminf_i \frac{(a_i, a_{i+1})}{i} \leqslant \frac{13}{20}$.

[关键词] 整数排列, 最大公因子, 下极限

[中图分类号] O156.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)02-0018-05

On Greatest Common Divisor of Subsequent Terms of Permutations

Ji Chengshuang

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract In 1983, Erdös P, Freud R and Hegyvári N proved that $\liminf_i \frac{(a_i, a_{i+1})}{i} \leqslant \frac{61}{90}$ for any infinite permutation $a_1, a_2, a_3, \cdots$ of all positive integers. In this paper, a better upper bound $\liminf_i \frac{(a_i, a_{i+1})}{i} \leqslant \frac{13}{20}$ was given.

Key words permutation of integers, greatest common divisor, lower limit

关于正整数排列已经有许多相关结果[1-4]. 1983年, Erdös P, Freud R和 Hegyvári N[5]证明了对所有正整数的任一排列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 有 $\liminf_i \frac{(a_i, a_{i+1})}{i} \leqslant \frac{61}{90}$和 $\limsup_i \frac{[a_i, a_{i+1}]}{i} \geqslant \frac{1}{(1-\log 2)}$. Saias[6] 将其中一个结果改进为 $\limsup_i [a_i, a_{i+1}]/(i\log i) > 0$ 本文改进了另一个结果.

定理 1 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$是所有正整数的任一排列, 则

$$\liminf_i \frac{(a_i, a_{i+1})}{i} \leqslant \frac{13}{20}$$

1 引理及预备结果

引理 1[5] 设 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5是不超过 n的不同自然数, 则有

$$(b_1, b_2) \leqslant \frac{n}{2}, \tag{1}$$

$$(b_1, b_2) \leqslant \frac{n}{3} \quad 或 \quad (b_2, b_3) \leqslant \frac{n}{3}, \tag{2}$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 4} (b_i, b_{i+1}) \leqslant \frac{n}{4}. \tag{3}$$

假设定理 1不成立, 则存在所有正整数的一个排列记为 $a_1, a_2, a_3, \cdots$满足: 存在 c和N_0, 对任意 $i > N_0$,

$$(a_i, a_{i+1}) > \frac{1}{c} i > \frac{13}{20} i$$

取定一个 $n > \frac{4N_0}{c}$, 则对任意的 $j \in \mathbf{N}$, 有$\frac{1}{4}c2^j n > N_0$. 因而对于任意的 $i \geqslant \frac{1}{4}c2^j n$, 有

收稿日期: 2010-09-16

通讯联系人: 姬成双, 硕士, 研究方向: 数论. E-mail: jichengshuang@126.com

$$a_i \geqslant (a_i, a_{i+1}) > \frac{1}{c} i \tag{4}$$

根据上式, 当 $i \geqslant c2^j n$时, 有 $a_i > 2^j n$, 所以

$$\{1, 2, \dots, 2^j n\} \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_{[c2^jn]}\}.$$

定义下列不交集合:

$$A_{j_1} = \left\{ a_i \mid a_i \leqslant 2^j n, \frac{2}{3}c2^j n < i \leqslant c2^j n, i \in \mathbf{N}^* \right\},$$

$$A_{j_2} = \left\{ a_i \mid a_i \leqslant 2^j n, \frac{1}{2}c2^j n < i \leqslant \frac{2}{3}c2^j n, i \in \mathbf{N}^* \right\},$$

$$A_{j_3} = \left\{ a_i \mid a_i \leqslant 2^j n, \frac{1}{3}c2^j n < i \leqslant \frac{1}{2}c2^j n, i \in \mathbf{N}^* \right\},$$

$$A_{j_4} = \left\{ a_i \mid a_i \leqslant 2^j n, \frac{1}{4}c2^j n < i \leqslant \frac{1}{3}c2^j n, i \in \mathbf{N}^* \right\},$$

$$A_{j_5} = \left\{ a_i \mid a_i \leqslant 2^j n, i \leqslant \frac{1}{4}c2^j n, i \in \mathbf{N}^* \right\},$$

其中 $\mathbf{N}^*$ 是正整数集, 则

$$\{1, 2, \dots, 2^j n\} = \bigcup_{l=1}^{5} A_{jl},$$

所以对取定的 n和任意 $j \in \mathbf{N}$, 有

$$2^j n = \sum_{l=1}^{5} |A_{jl}|. \tag{5}$$

根据定义可证排列中不存在连续 5项都属于A_{j_4}. 实际上, 若存在 $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+4}$都属于$A_{j_4}$, 根据定义 $\frac{1}{4}c2^j n < i \leqslant \frac{1}{3}c2^j n$且 $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+4}$都不超过 $2^j n$. 由(4)得$\min\limits_{0\leqslant l\leqslant 3}(a_{i+l}, a_{i+l+1}) > \frac{1}{c} i > \frac{1}{4}2^j n$. 又根据(3)可得$\min\limits_{0\leqslant l\leqslant 3}(a_{i+l}, a_{i+l+1}) \leqslant \frac{1}{4}2^j n$, 矛盾. 因此排列中任意连续 5项至少有一项不属于A_{j_4}, 所以

$$|A_{j_4}| \leqslant \frac{4}{5}\left(\left[\frac{1}{3}c2^j n\right] - \left[\frac{1}{4}c2^j n\right]\right) + 4.$$

又$\left[\frac{1}{3}c2^j n\right] - \left[\frac{1}{4}c2^j n\right] \leqslant \frac{1}{3}c2^j n - \frac{1}{4}c2^j n + 1$, 所以

$$|A_{j_4}| \leqslant \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}c2^j n - \frac{1}{4}c2^j n\right) + 5 \tag{6}$$

同理由(1)、(2)、(4), 可得排列中不存在相邻两项都属于A_{j_2}, 不存在连续 3项都属于A_{j_3}, 所以对任意 $j \in \mathbf{N}$, 有

$$|A_{j_2}| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}c2^j n - \frac{1}{2}c2^j n\right) + 2, \tag{7}$$

$$|A_{j_3}| \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}c2^j n - \frac{1}{3}c2^j n\right) + 3 \tag{8}$$

下面我们考虑$|A_{j_1}|$的上界. 首先给出几个引理.

引理 2 若 $a_i \in A_{j_1}$, 则 $a_i \mid a_{i+1}$, $a_i \mid a_{i-1}$.

证明 若 $a_i \in A_{j_1}$, 根据A_{j_1}的定义, $a_i \leqslant 2^j n$, $\frac{2}{3}c2^j n < i \leqslant c2^j n$. 由(4)式, $(a_i, a_{i+1}) > \frac{1}{c} i > \frac{2^{j+1}}{3} n$. 若 $a_i \nmid a_{i+1}$, 则$(a_i, a_{i+1}) \leqslant \frac{a_i}{2} \leqslant 2^{j-1} n$, 矛盾. 所以 $a_i \mid a_{i+1}$. 同理可得 $a_i \mid a_{i-1}$.

推论 1 若 $a_i \in A_{j_1}$, 则 $a_{i+1} \notin A_{j_1}$, $a_{i-1} \notin A_{j_1}$.

由引理 2知 $a_i \mid a_{i+1}$, 所以 $a_{i+1} \geqslant 2a_i = 2(a_i, a_{i+1}) > \frac{2^{j+2}}{3} n > 2^j n$, 所以 $a_{i+1} \notin A_{j_1}$. 同理 $a_{i-1} \notin A_{j_1}$.

引理 3 若 $a_i \in A_{j_1}$, $a_{i+2} \in A_{j_1}$, 则 $a_{i+1} > 2^{j+1} n$.

证明　不妨假设 $a_{i+2} > a_i$, a_i 记为 k_1a, a_{i+2} 记为 k_2a, 其中 $(k_1, k_2) = 1$. 若 $a_i \mid a_{i+2}$, 则 $a_{i+2} \geqslant 2a_i \geqslant 2(a_i, a_{i+1}) > \frac{2^{j+2}}{3}n > 2^j n$, 又由 $a_{i+2} \in A_{j_1}$, 得 $a_{i+2} \leqslant 2^j n$, 矛盾. 所以 $a_i \nmid a_{i+2}$, 因而 $k_2 \geqslant 3$. 由引理 2, 得 $a_{i+1} \geqslant [a_i, a_{i+2}] = k_1k_2a = k_2a_i \geqslant 3a_i$. 又 $a_i \geqslant (a_i, a_{i+1}) > \frac{2^{j+1}n}{3}$, 故 $a_{i+1} > 2^{j+1}n$.

设 $A_{j_1} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_h}\}$, 则集合 $\{a_{[\frac{2}{3}c2^jn]+1}, \cdots, a_{[c2^jn]}\}$ 可以表示成以下不交子集的并:

$$\{a_{[\frac{2}{3}c2^jn]+1}, \cdots, a_{i_1-1}\}, \{a_{i_1}, \cdots, a_{i_2-1}\}, \cdots, \{a_{i_{h-1}}, \cdots, a_{i_h-1}\}, \{a_{i_h}, \cdots, a_{[c2^jn]}\}.$$

记这些子集的元素个数为 $t_{i_0}, t_{i_1}, \cdots, t_{i_h}$. 由推论 1, 我们知道排列中不存在两相邻项都属于 A_{j_1}, 所以当 $1 \leqslant l \leqslant h-1$ 时, $t_{i_l} \geqslant 2$, 也即只有 t_{i_0}、t_{i_h} 可能小于 2. 因此

$$A_{j_1} = \{a_{i_l} \mid t_{i_l} \geqslant 3, 1 \leqslant l \leqslant h\} \cup \{a_{i_l} \mid t_{i_l} = 2, 1 \leqslant l \leqslant h\} \cup \{a_{i_h}\}.$$

为了方便, 我们记

$$\lambda_j = \frac{\sum\limits_{t_{i_l} \geqslant 3} t_{i_l}}{[c2^jn] - \left[\frac{2}{3}c2^jn\right]},$$

则有

$$\#\{a_{i_l} \mid t_{i_l} \geqslant 3, 1 \leqslant l \leqslant h\} = \sum_{t_{i_l} \geqslant 3} 1 \leqslant \frac{1}{3}\sum_{t_{i_l} \geqslant 3} t_{i_l} = \left([c2^jn] - \left[\frac{2}{3}c2^jn\right]\right)\frac{1}{3}\lambda_j.$$

又

$$1 - \lambda_j = \frac{\sum\limits_{t_{i_l} \leqslant 2} t_{i_l}}{[c2^jn] - \left[\frac{2}{3}c2^jn\right]}, \tag{9}$$

同上易证

$$\#\{a_{i_l} \mid t_{i_l} = 2, 1 \leqslant l \leqslant h\} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{t_{i_l} = 2 \\ 1 \leqslant l \leqslant h}} t_{i_l} \leqslant \left([c2^jn] - \left[\frac{2}{3}c2^jn\right]\right)\frac{1}{2}(1 - \lambda_j), \tag{10}$$

所以

$$|A_{j_1}| \leqslant \left([c2^jn] - \left[\frac{2}{3}c2^jn\right]\right)\left(\frac{1}{3}\lambda_j + \frac{1}{2}(1 - \lambda_j)\right) + 1.$$

由于 $\frac{1}{3}\lambda_j + \frac{1}{2}(1 - \lambda_j) < 1$, 所以

$$|A_{j_1}| < \left(c2^jn - \frac{2}{3}c2^jn\right)\left(\frac{1}{3}\lambda_j + \frac{1}{2}(1 - \lambda_j)\right) + 2 \tag{11}$$

下面我们重新考虑 $|A_{j_3}|$ 的上界. 先考虑集合 $\{a_{[\frac{2}{3}c2^jn]+1}, \cdots, a_{[c2^jn]}\}$ 中有多少项是大于 $2^{j+1}n$ 的. 前面我们已经将集合表示成一系列不交子集的并, 所以我们可以将集合中大于 $2^{j+1}n$ 的项分成两类, 第一类在不超过两个元素的子集中, 记为 m_1 个; 第二类在多于两个元素的子集中, 记为 m_2 个.

对 $1 \leqslant l \leqslant h-1$, 若 $t_{i_l} = 2$, 则 $a_{i_l} \in A_{j_1}$, $a_{i_l+2} \in A_{j_1}$. 由引理 3, 可得 $a_{i_l+1} > 2^{j+1}n$. 这样

$$m_1 \geqslant \#\{a_{i_l+1} \mid t_{i_l} = 2, 1 \leqslant l \leqslant h-1\} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{t_{i_l} = 2 \\ 1 \leqslant l \leqslant h-1}} t_{i_l}.$$

如前所讲, 只有 t_{i_0}、t_{i_h} 可能小于 2, 所以 $\sum\limits_{t_{i_l} \leqslant 2} t_{i_l}$ 最多比 $\sum\limits_{\substack{t_{i_l} = 2 \\ 1 \leqslant l \leqslant h-1}} t_{i_l}$ 多两项, 因此

$$\sum_{\substack{t_{i_l} = 2 \\ 1 \leqslant l \leqslant h-1}} t_{i_l} \geqslant \sum_{t_{i_l} \leqslant 2} t_{i_l} - 2,$$

由 (9), 有

$$m_1 \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{t_{i_l} \leqslant 2} t_{i_l} - 2\right) = \left([c2^jn] - \left[\frac{2}{3}c2^jn\right]\right)\frac{1}{2}(1 - \lambda_j) - 1.$$

另一方面, 对任意 $0\leqslant l\leqslant h$, 若 $t_{i_l}\geqslant 3$, 记该子集中大于 $2^{j+1}n$ 的有 t'_{i_l} 项. 由 (2)、(4), 知 $a_{[\frac{2}{3}c2^jn]+1}, \cdots, a_{[c2^jn]}$ 中连续 3 项至少有一项大于 $2^{j+1}n$, 所以

- 若 $t_{i_l}\equiv 0(\bmod 3)$, 则 $t'_{i_l}\geqslant \frac{1}{3}t_{i_l}$.
- 若 $t_{i_l}\equiv 1(\bmod 3)$, 则 $t'_{i_l}\geqslant \frac{1}{3}(t_{i_l}-1)\geqslant \frac{1}{4}t_{i_l}$.
- 若 $t_{i_l}\equiv 2(\bmod 3)$, 由于 $a_{i_{l+1}}\leqslant 2^jn$, 因此 $a_{i_{l+1}-1}$、$a_{i_{l+1}-2}$ 中至少有一项大于 $2^{j+1}n$, 所以 $t'_{i_l}\geqslant \frac{1}{3}(t_{i_l}-2)+1>\frac{1}{3}t_{i_l}$.

因此

$$m_2=\sum_{t_{i_l}\geqslant 3}t'_{i_l}\geqslant \frac{1}{4}\sum_{t_{i_l}\geqslant 3}t_{i_l}=\left([c2^jn]-\left[\frac{2}{3}c2^jn\right]\right)\frac{1}{4}\lambda_j.$$

故对任意 $j\in\mathbf{N}$, 有

$$\#\left\{a_i\mid a_i\leqslant 2^{j+1}n, \frac{2}{3}c2^jn<i\leqslant c2^jn, i\in\mathbf{N}^*\right\}=\left([c2^jn]-\left[\frac{2}{3}c2^jn\right]\right)-m_1-m_2\leqslant$$

$$\left([c2^jn]-\left[\frac{2}{3}c2^jn\right]\right)\left(\frac{3}{4}\lambda_j+\frac{1}{2}(1-\lambda_j)\right)+1\leqslant\left(c2^jn-\frac{2}{3}c2^jn\right)\left(\frac{3}{4}\lambda_j+\frac{1}{2}(1-\lambda_j)\right)+3$$

由 j 的任意性, 知对任意 $j\in\mathbf{N}^*$, 有

$$\#\left\{a_i\mid a_i\leqslant 2^jn, \frac{2}{3}c2^{j-1}n<i\leqslant c2^{j-1}n, i\in\mathbf{N}^*\right\}\leqslant\left(c2^{j-1}n-\frac{2}{3}c2^{j-1}n\right)\left(\frac{3}{4}\lambda_{j-1}+\frac{1}{2}(1-\lambda_{j-1})\right)+3,$$

即

$$|A_{j_3}|\leqslant\left(\frac{1}{2}c2^jn-\frac{1}{3}c2^jn\right)\left(\frac{3}{4}\lambda_{j-1}+\frac{1}{2}(1-\lambda_{j-1})\right)+3. \tag{12}$$

2 定理的证明

当 $j=0$ 时, 由 (6)、(7)、(8)、(11), 有

$$n=\sum_{l=1}^{5}|A_{0_l}|\leqslant\left(cn-\frac{2}{3}cn\right)\left(\frac{1}{3}\lambda_0+\frac{1}{2}(1-\lambda_0)\right)+\left(\frac{2}{3}cn-\frac{1}{2}cn\right)\frac{1}{2}+$$

$$\left(\frac{1}{2}cn-\frac{1}{3}cn\right)\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}cn-\frac{1}{4}cn\right)\frac{4}{5}+\frac{cn}{4}+12,$$

即

$$\frac{1}{c}\leqslant\frac{61}{90}-\frac{1}{18}\lambda_0+\frac{12}{cn}. \tag{13}$$

对任意 $j>0$, 由 (6)、(7)、(11)、(12), 有

$$2^jn=\sum_{l=1}^{5}|A_{j_l}|\leqslant\left(c2^jn-\frac{2}{3}c2^jn\right)\left(\frac{1}{3}\lambda_j+\frac{1}{2}(1-\lambda_j)\right)+\left(\frac{2}{3}c2^jn-\frac{1}{2}c2^jn\right)\frac{1}{2}+$$

$$\left(\frac{1}{2}c2^jn-\frac{1}{3}c2^jn\right)\left(\frac{3}{4}\lambda_{j-1}+\frac{1}{2}(1-\lambda_{j-1})\right)+\left(\frac{1}{3}c2^jn-\frac{1}{4}c2^jn\right)\frac{4}{5}+\frac{c2^jn}{4}+12,$$

即

$$\frac{1}{c}\leqslant\frac{13}{20}+\frac{1}{24}\lambda_{j-1}-\frac{1}{18}\lambda_j+\frac{12}{c2^jn}. \tag{14}$$

由假设 $\frac{1}{c}>\frac{13}{20}$ 及 (13)、(14), 我们有

$$\lambda_0<\frac{1}{2}+\frac{216}{cn},\qquad \lambda_j<\frac{3}{4}\lambda_{j-1}+\frac{216}{c2^jn},$$

于是

$$2^j\lambda_j+\frac{432}{cn}<\frac{3}{2}\left(2^{j-1}\lambda_{j-1}+\frac{432}{cn}\right),$$

故

$$0<\lambda_j<\left(\lambda_0+\frac{432}{cn}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^j-\frac{432}{c2^jn},$$

因此 $\lim_j\lambda_j=0$,故

$$\frac{1}{c}\leqslant\lim_j\left(\frac{13}{20}+\frac{1}{24}\lambda_{j-1}-\frac{1}{18}\lambda_j+\frac{3}{c2^jn}\right)=\frac{13}{20},$$

这与假设矛盾.证毕.

[参考文献]

[1] Freud R. On sums of subsequent terms of permutations[J]. Acta Math Hungar, 1983, 41(1/2): 177-185.

[2] Dvornicich R. On a problem of cyclic permutations of integers[J]. Discrete Appl Math, 1980, 2(4): 353-355.

[3] Sidorenko A F. An infinite permutation without arithmetic progressions[J]. Discrete Math, 1988, 69(2): 211.

[4] Polyakov A B. On equilibrium distributions on the set of permutations of integers[J]. Russian Math Surveys, 1999, 54(2): 450-452.

[5] Erdős P, Freud R, Hegyvári N. Arithmetical properties of permutations of integers[J]. Acta Math Hungar, 1983, 41(1/2): 169-176.

[6] Saias E. Applications des entiers à diviseurs denses[J]. Acta Arith, 1998, 83(3): 225-240.

[责任编辑:丁　蓉]

(上接第17页)

注 **2**　在上述两个定理中,当取 $r_s=1$时,即可获得文[4]中的定理1和定理2,因此文[4]中的定理1和定理2可分别看成是本文定理1和定理2的特例.

[参考文献]

[1] Bainov D, Petrov V, Proytcheva V. Existence and asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second order neutral differential equations with "Maxima"[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 83: 237-249.

[2] Petrov V. Nonoscillatory solutions of neutral differential equations with "Maxima"[J]. Communications in Applied Analysis, 1998, 2: 129-142.

[3] 张广,高英.差分方程的振动理论[M].北京:高等教育出版社,2001.

[4] 罗交晚,刘正荣,俞元洪.带有极大值项的中立型差分方程的振动性和非振动性[J].应用数学学报,2002,25(3):385-391.

[5] 范彩霞,赵爱民,邓嵩.带有极大值项的中立型差分方程的振动性[J].山西大学学报:自然科学版,2005,28(1):5-7.

[责任编辑:丁　蓉]