具有乘积纯正断面的正则半群

郭晓永, 费秀海

(临沧师范高等专科学校数理系, 云南 临沧 677000)

[摘要] 介绍了乘积纯正断面的概念, 研究了乘积纯正断面的一些性质以及乘积纯正断面的两个等价条件, 并给出具有乘积纯正断面的正则半群的结构定理.

[关键词] 正则半群, 逆断面, 纯正断面, 拟理想

[中图分类号] O152.7 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)02-0023-04

Regular Semigroups With Multiplicative Orthodox Transversals

Guo Xiaoyong, Fei Xiuhai

(Department of Mathematics and Science, Lincang Teachers' College, Lincang 677000, China)

Abstract: In this paper, the concept of multiplicative orthodox transversal is introduced. We investigate some properties on multiplicative orthodox transversal, and give two equivalent conditions for orthodox transversal are multiplicative. Finally, we give a structure theorem for regular semigroups with multiplicative orthodox transversals.

Key words: regular semigroups, inverse transversal, orthodox transversals, quasi-ideal

30多年来, 关于正则半群的逆断面引起许多学者的研究兴趣[1-7]. 1999年, 陈建飞提出了纯正断面的概念[8]. 纯正断面的许多性质与逆断面类似, 如也具有乘积性. 本文的主要工作是介绍和研究一类具有乘积纯正断面的正则半群.

设 S 是正则半群, 且 S^0 是 S 的子半群. 我们常用以下记号, 记 $V_{S^0}(x) = S^0 \cap V(x)$, 其中 $V(x)$ 表示 x 在 S 中的所有逆元之集. 对任意 $x \in S$, $x^0 \in V_{S^0}(x)$, 我们记

$$I = \{xx^0 : x \in S, x^0 \in V_{S^0}(x)\},\ \Lambda = \{x^0x : x \in S, x^0 \in V_{S^0}(x)\}.$$

称 S^0 为 S 的逆断面, 如果对任意 $x \in S$, $|V_{S^0}(x)| = 1$(即对任意 $x \in S$, S^0 与 $V(x)$ 恰有一个公共元). 称 S^0 为 S 的纯正断面, 如果以下条件成立:

(1) $\forall x \in S$, $V_{S^0}(x) \neq \Phi$;

(2) 若 $x, y \in S$, 且 $\{x, y\} \cap S^0 \neq \Phi$, 则 $V_{S^0}(x)V_{S^0}(y) \subseteq V_{S^0}(xy)$.

显然, 如果 S^0 是 S 的纯正断面, 则由(1)知 S 是正则半群, 由(2)知 S^0 是 S 的纯正子半群. 称半群 S 的子半群 S^0 为 S 的拟理想, 如果 $S^0SS^0 \subseteq S^0$.

下面我们直接给出本文中用到的两个结果:

引理 1[9] 设 x 是正则半群 S 的一个元素, $e \in E(R_x)$, $f \in E(L_x)$, 则 $L_e \cap R_f$ 含有 x 的逆元 x', 使得 $xx' = e$, $x'x = f$;

引理[9] 设 x, y 是同一 $\mathscr{D}$ 类中的 D 的元素, 则 $xy \in R_x \cap L_y$ 当且仅当 $L_x \cap R_y$ 中含有幂等元.

本文采用文献[2, 8-10]中的术语与记号.

1 乘积纯正断面

定义 设 S 为正则半群, S^0 是 S 的纯正断面, 则称 S^0 是具有乘积性的, 如果

收稿日期: 2010-07-12

通讯联系人: 郭晓永, 博士研究生, 讲师, 研究方向: 半群代数和粗糙集理论. E-mail: xyguomath@126.com

对于 $\forall x, y\in S$, $\forall x^0\in V_{S^0}(x)$, $y^0\in V_{S^0}(y)$, 都有 $x^0xyy^0\in E(S^0)$,
其中 $E(S^0)$ 为 S^0 的幂等元带.

我们知道, 集合 I和 Λ是刻画具有逆断面正则半群和具有纯正断面正则半群的两个重要条件, 同样也可以用 I和 Λ来定义纯正断面的乘积性以及拟理想. 我们称正则半群 S的纯正断面 S^0,

(1) 是有乘积性的, 如果 $\Lambda I\subseteq E(S^0)$;

(2) 是 S的拟理想, 如果 $\Lambda I\subseteq S^0$.

由文[2], 我们有

引理 3　设 S是正则半群, S^0是 S的纯正断面, 则 S^0是 S的拟理想.

进而我们有

定理 1　设 S是正则半群, S^0是 S的纯正断面. 如果 S^0是带, 则 S^0具有乘积性的充要条件是 S^0为 S的拟理想.

证明　由引理 3, 必要性显然成立. 反之, 若 S^0为 S的拟理想, 则 $\Lambda I\subseteq S^0$. 因而, $\Lambda I\subseteq E(S^0)$, 又由 S^0是带, 则有 $E(S^0)=S^0$. 因此, S^0具有乘积性. 证毕.

推论 1　设 S是正则半群, S^0是 S的逆断面. 如果 S^0是半格, 则 S^0具有乘积性的充要条件是 S^0为 S的拟理想.

如果正则半群 S具有逆断面 S^0, 定义 Green关系 $\mathscr{L}$与 $\mathscr{R}$如下:

$$(x, y)\in\mathscr{L}\Leftrightarrow x^0x=y^0y,\ (x, y)\in\mathscr{R}\Leftrightarrow xx^0=yy^0.$$

对于纯正断面 S^0, 我们有下面类似的结果:

引理 4　设 S是正则半群, S^0是 S的纯正断面, 则 Green关系 $\mathscr{L}$与 $\mathscr{R}$可由下式确定:

$$(x, y)\in\mathscr{L}\Leftrightarrow V_{S^0}(x)x=V_{S^0}(y)y,\ (x, y)\in\mathscr{R}\Leftrightarrow xV_{S^0}(x)=yV_{S^0}(y).$$

证明　若 $V_{S^0}(x)x=V_{S^0}(y)y$, 则对于任意 $x^0\in V_{S^0}(x)$, 存在 $y^0\in V_{S^0}(y)$使得 $x^0x=y^0y$. 因而, $x\mathscr{L}x^0x=y^0y\mathscr{L}y$. 若 $(x, y)\in\mathscr{L}$, 则对于任意 $x^0\in V_{S^0}(x)$, $y^0\in V_{S^0}(y)$, 我们有 $y\mathscr{R}yy^0$, $y\mathscr{L}x\mathscr{L}x^0x$. 由于 yy^0, x^0x为幂等元, 根据引理 1对于 y存在逆元 $y'\in L_{yy^0}\cap R_{x^0x}$使得 $x^0x=y'y$. 又由 $x^0\mathscr{R}x^0x\mathscr{R}y'\mathscr{L}yy^0\mathscr{L}y^0$, 根据文[10]可得 $y'\in S^0$. 即对于任意 $x^0\in V_{S^0}(x)$, 存在 $y'\in V_{S^0}(y)$使得 $x^0x=y'y$, 从而 $V_{S^0}(x)x\subseteq V_{S^0}(y)y$. 同理可得 $V_{S^0}(y)y\subseteq V_{S^0}(x)x$. 因此 $V_{S^0}(x)x=V_{S^0}(y)y$. 类似地可以证明另一结果. 证毕.

定理　设 S是正则半群, S^0是 S的纯正断面. 对于任意 $e\in E(S)$, $V_{S^0}(e)\subseteq E(S^0)$, 对于任意 $x\in S$, $x'\in V(x)$, 则对于任意 $x^0\in V_{S^0}(x)$, 存在 $x^{00}\in V_{S^0}(x^0)$, 使得 $x^{00}x^0\in V_{S^0}(xx')=V_{S^0}(xx^0)$, $x^0x^{00}\in V_{S^0}(x'x)=V_{S^0}(x^0x)$, 且 $x^{00}\in V_{S^0}(x')=V_{S^0}(x'xx^0)=V_{S^0}(x^0xx')=V_{S^0}(x^0)$.

证明　若 $x\in S$, $x'\in V(x)$, 由于 $xx'\mathscr{R}x$, 由 $xx'V_{S^0}(xx')=xV_{S^0}(x)$可得存在 $(xx')^0\in V_{S^0}(xx')$使得 $xx'(xx')^0=xx^0$. 由假设知, $(xx')^0\in E(S^0)$. 因而, $xx^0(xx')^0=xx'(xx')^0(xx')^0=xx'(xx')^0=xx^0$且 $(xx')^0xx^0=(xx')^0xx'(xx')^0=(xx')^0$, 从而 $xx^0\mathscr{L}(xx')^0$. 由 $x^0\mathscr{L}xx^0$, 可得 $x^0\mathscr{L}(xx')^0$. 由于 $(xx')^0\in E(S^0)$, 则对于 $(xx')^0\in V_{S^0}((xx')^0)$, 存在 $x^{00}\in V_{S^0}(x^0)$, 使得 $x^{00}x^0=(xx')^0(xx')^0=(xx')^0$, 即 $x^{00}x^0\in V_{S^0}(xx')$. 又由 $x^{00}x^0\in V_{S^0}(xx^0)$, 可得 $x^{00}x^0\in V_{S^0}(xx')=V_{S^0}(xx^0)$. 同理可证存在 $x^{0'}\in V_{S^0}(x^0)$使得 $x^0x^{0'}\in V_{S^0}(xx')=V_{S^0}(x^0x)$. 又由 $x^0x^{00}\in V_{S^0}(x^0x)$, 可得 $x^0x^{00}\in V_{S^0}(x'x)=V_{S^0}(x^0x)$.

由以上可得: $x^{00}x'x^{00}=x^{00}x'xx'x^{00}x^0x^{00}=x^{00}x'xx'(xx')^0x^{00}=x^{00}x'xx^0x^{00}=x^{00}x^0x^{00}x'xx^0x^{00}=x^{00}x^0x^{00}=x^{00}$, $x'x^{00}x'=x'xx'x^{00}x^0x^{00}x'=x'xx'(xx')^0x^{00}x'=x'xx^0x^{00}x'=x'x(x'x)^0x'=x'$. 因而 $x^{00}\in V_{S^0}(x')$. 又由于 $x'xx^0x^{00}x'xx^0=x'x(x'x)^0x'xx^0=x'xx^0x^{00}x'xx^0x^{00}=x^{00}x^0x^{00}x'xx^0x^{00}=x^{00}x^0x^{00}=x^{00}$, 即有 $x^{00}\in V_{S^0}(x'xx^0)$. 同理可得 $x^{00}\in V_{S^0}(x^0xx')$. 因此 $x^{00}\in V_{S^0}(x')=V_{S^0}(x'xx^0)=V_{S^0}(x^0xx')=V_{S^0}(x^0)$. 证毕.

定理 3　设 S是正则半群, S^0是 S的纯正断面. 对于任意 $e\in E(S)$, 如果 $V_{S^0}(e)\subseteq E(S^0)$, 则对于任意 $x, y\in S$, $V(x)\cap V(y)\neq\Phi$的充要条件是 $V_{S^0}(x)=V_{S^0}(y)$.

证明　设 $a'\in V(x)\cap V(y)$. 由定理 2可得, 对于任意 $x^0\in V_{S^0}(x)$, $y^0\in V_{S^0}(y)$, 存在 $x^{00}\in V_{S^0}(x^0)$, $y^{00}\in V_{S^0}(y^0)$, 使得 $x^{00}\in V_{S^0}(a')$, $y^{00}\in V_{S^0}(a')$. 则有 $V_{S^0}(x^0)=V_{S^0}(a')=V_{S^0}(y^0)$.

设 $x^{00}\in V_{S^0}(x^0)=V_{S^0}(y^0)$, 则有

$$x^0\in V_{S^0}(x)\cap V_{S^0}(x^{00})\Rightarrow V_{S^0}(x)=V_{S^0}(x^{00}),$$

$$y^0 \in V_{S^0}(y) \cap V_{S^0}(x^{00}) \Rightarrow V_{S^0}(y) = V_{S^0}(x^{00}),$$

因此 $V_{S^0}(x) = V_{S^0}(y)$. 充分性显然成立. 证毕.

定理 4 设 S 是正则半群, S^0 是 S 的纯正断面, 则 S^0 具有乘积性的充要条件是 S^0 为 S 的拟理想且对于任意 $e \in E(S)$, $V_{S^0}(e) \subseteq E(S^0)$.

证明 若 S^0 具有乘积性, 则对于任意 $e \in E(S)$, $e^0 \in V_{S^0}(e)$, 我们可得 $e^0 = e^0ee^0 = e^0eee^0 \in E(S^0)$. 从而, $V_{S^0}(e) \subseteq E(S^0)$. 相反地, 若 $e \in \Lambda$, $f \in I$, $x \in V_{S^0}(ef)$, 则有 $(fxe)^2 = fxe$, $ef \in V(fxe) \cap S^0$, 由假设可得 ef 是幂等元. 因而, $\Lambda I \subseteq E(S^0)$, 故 S^0 具有乘积性. 证毕.

若正则半群 S 具有乘积逆断面 S^0, 设 $\langle E(S) \rangle$ 为由 S 生成的幂等元正则子半群, 文 [1] 已经证明了 $\langle E(S) \rangle = \{x \in S: x^0 \in E(S^0)\}$, 对于纯正断面, 我们有下面类似的结果:

定理 5 若正则半群 S 具有乘积纯正断面 S^0, 则 $\langle E(S) \rangle = \{x \in S: V_{S^0}(x) \subseteq E(S^0)\}$.

证明 设 $x \in S$, 若 $V_{S^0}(x) \subseteq E(S^0)$, $x^0 \in V_{S^0}(x)$, 则 $x = xx^0x = xx^0x^0x \in \langle E(S) \rangle$. 反之, 若 $V_{S^0}(x) \cup V_{S^0}(y) \subseteq E(S^0)$, 则 $V_{S^0}(xy) \subseteq E(S^0)$. 从而 xy 在 S^0 中有幂等逆元. 设 $x^0 \in V_{S^0}(x)$, $y^0 \in V_{S^0}(y)$, 由于 S^0 是 S 的乘积纯正断面, 则 $x^0xyy^0 \in E(S^0)$, 因而 $y^0x^0xyy^0x^0 \in E(S^0)$. 又由 $y^0x^0xyy^0x^0 \in V(xy)$, 则可知 $V_{S^0}(xy)$ 含有惟一幂等元, 且仅由幂等元构成. 证毕.

2 具有乘积纯正断面的结构定理

文献 [8] 中, 陈建飞给出了具有拟理想纯正断面正则半群的结构定理. 我们称映射 $*: \Lambda \times I \to S^0$, $(\lambda, i) \to \lambda * i$ 为正则映射, 如果满足以下 3 个条件:

(1) $\forall e, f \in E^0$, $e(\lambda * i)f = (e\lambda) * (if)$,

(2) 若 $\lambda \in E^0$ 或 $i \in E^0$, 则 $\lambda * i = \lambda i$,

(3) 若 $\lambda^+, \overset{*}{i} \in E^0$ 且 $\lambda^+ \mathscr{R} \lambda \mathscr{L} \lambda'$, $\overset{*}{i} \mathscr{L} i \mathscr{R} i'$, 则 $(\overset{*}{i}\, i')V_{S^0}(\lambda' * i')(\lambda' \lambda^+) \subseteq V_{S^0}(\lambda * i)$.

若将正则映射 $* \ \Lambda \times I \to S^0$ 换成 $* \ \Lambda \times I \to E^0$, 则可得具有乘积纯正断面的结构定理:

定理 6 设 (I, S^0, Λ) 为三元组, 且 $*: \Lambda \times I \to E^0$ 为正则映射, 定义 $I/\mathscr{R} \times S^0/\sigma \times \Lambda/\mathscr{L}$ 的子集 Γ 为:

$$\Gamma = \{(R_i, T(x), L_\lambda): \exists\, \lambda^+, \overset{*}{i} \in E^0,\ i \mathscr{L} \overset{*}{i} \mathscr{R} x,\ \lambda \mathscr{R} \lambda^+ \mathscr{L} x\},$$

其中 $x \in S^0$, σ 为 S^0 上的最小逆半群同余. 定义 Γ 的乘积为

$$(R_i, T(x), L_\lambda)(R_{i_1}, T(x_1), L_{\lambda_1}) = (R_{ia_+}, T(a), L_{a_* \lambda_1}),$$

其中 $a = x(\lambda * i_1)x_1$. 则 Γ 为具有乘积纯正断面的正则半群, 且其乘积纯正断面同构于 S^0. 反之, 每个具有乘积纯正断面的正则半群均可以按上面方法构造.

证明 设 $(R_i, T(x), L_\lambda) \in W$, 由文 [8] 知, 对于 $i, \lambda \in E^0$, 有 $(R_i, T(x), L_\lambda) \in E(W) \Leftrightarrow x = x\lambda ix$. 由于, $(R_i, T(x), L_\lambda)^2 = (R_{i(x\lambda ix)_+}, T(x\lambda ix), L_{(x\lambda ix)_* \lambda})$, 若 $x = xmbdaix$, 则有 $T(x) = T(x\lambda ix)$, 由 $i \mathscr{R} x \mathscr{R} x_+$, 则有 $R_{i(x\lambda ix)_+} = R_{ix_+} = R_{x_+} = R_i$. 同理, $L_{(x\lambda ix)_* \lambda} = L_\lambda$. 因此有 $(R_i, T(x), L_\lambda) \in E(W)$. 反之, 若 $(R_i, T(x), L_\lambda) \in E(W)$, 则有 $T(x) = T(x\lambda ix)$. 设 x' 为 x 与 $x\lambda ix$ 的共同逆元, 则 $x'x\lambda ixx' = x'$, 从而有 $xx'x\lambda ixx'x = xx'x$, 因而 $x\lambda ix = x$.

设 $k = (R_i, T(x), L_\lambda)$, $l = (R_j, T(y), L_\mu) \in \Gamma$, 且 $(R_{i'}, T(x'), L_{\lambda'}) \in V_W(k)$, $(R_{j'}, T(y'), L_{\mu'}) \in V_W(l)$, 其中 $T(x')$, $T(y')$ 分别为 $T(x)$, $T(y)$ 在 S^0/σ 中的逆元, 因而对于 i', λ', j', $\mu' \in E^0$, 有

$$(R_{i'}, T(x'), L_{\lambda'})(R_i, T(x), L_\lambda)(R_j, T(y), L_\mu)(R_{j'}, T(y'), L_{\mu'}) =$$
$$(R_{i'a_+}, T(a), L_{a_* \lambda})(R_{jb_+}, T(b), L_{b_* \mu'}) = (R_{i'a_+c_+}, T(c), L_{c_* b_* \mu'}) \in W,$$

其中 $a = x'(\lambda' * i)x = x'\lambda' ix$, $b = y(\mu * j')y' = y\mu j'y'$, $c = a(a * \lambda * jb_+)b = a(\lambda * j)b$,

$$cc_* b_* \mu' i'a_+ c_+ c = cb_* \mu' i'a_+ c = a(\lambda * j)bb_* m\mu' i'a_+ a(\lambda * j)b =$$
$$x'\lambda' ix(\lambda * j)y\mu j'y'\mu' i'x'\lambda' ix(\lambda * j)y\mu j'y' = x'\lambda' ix(\lambda * j)y\mu j'y'x'\lambda' ix(\lambda * j)y\mu j'y'.$$

由于 μ', $i' \in E^0$ 且 $i' \mathscr{R} x'$, $\mu' \mathscr{L} y'$, 则有 $cc_* b_* \mu' i'a_+ c_+ c = cc$, 因此, $x'\lambda' ix \in xE^0x \subseteq E^0$. 同理, 由于 x, $x' \in S^0$, 且 S^0 为纯正半群, 则有 $y\mu j'y' \in E^0$. 因而有, $c = x'\lambda' ix(\lambda * j)ymuj'y' \in E^0E^0E^0 \subseteq E^0$. 又由于 S^0 为 S 的纯正半群, 因此, $V_W(k)klV_W(l) \subseteq E(W)$, 且 W 是 Γ 的乘积纯正断面.

相反地, 若 S 为正则半群, S^0 为 S 的乘积纯正断面. 对于任意 $(\lambda, i) \in \Lambda \times I$, 按定义记 $\lambda * i = \lambda i$, 则由

S^0为 S的乘积纯正断面可得 $\lambda^*\ i\in E^0$. 证毕.

下面, 我们给出两个关于 2×2矩阵的例子. 例 1表明正则非纯正半群具有乘积纯正断面, 且其纯正断面亦非逆断面. 例 2中, 我们研究非奇异实 2×2矩阵上的半群 $\mathrm{sing}_{2\times 2}R$, 并记 $\mathrm{sing}^*_{2\times 2}R$为 2阶非奇异实方阵的子集. 例 2表明一纯正半群具有乘积纯正断面, 且其纯正断面既不是其纯正半群也不是其逆断面.

例 **1**　设 F为 2阶方阵上的域, S定义为

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}\equiv\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\}.$$

则 $\boldsymbol{a}$为 S的惟一非幂等元, 且 $d\in V(\boldsymbol{a})$. 因而 S为正则半群. 但由 $\boldsymbol{bc}=\boldsymbol{a}$易知, S不是纯正半群. 我们有,

$$V(\boldsymbol{a})=\{\boldsymbol{d}\},\ V(\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}\},\ V(\boldsymbol{c})=\{\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}\}V(\boldsymbol{d})=\{\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\},\ V(\boldsymbol{e})=\{\boldsymbol{e}\}.$$

设 $S^0=\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\}$, 则 S^0是 S的纯正子半群. 容易验证, S^0是 S的纯正断面. 我们构造 $I=\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\}$, $\Lambda=\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\}$, 且 $\Lambda I=\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\}$, 因此 S^0是 S的乘积纯正断面.

例　　设 S为 $\mathrm{sing}^*_{2\times 2}R$的子集,

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\0&0\end{pmatrix}: x,y\in\mathbf{R}, x\neq 0\right\},$$

则按矩阵的乘法 S为半群. 容易验证 $\begin{pmatrix}x^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x^{-1}&x^{-1}\\0&0\end{pmatrix}\in V\left(\begin{pmatrix}x&y\\0&0\end{pmatrix}\right)$, 从而 S为正则半群. 由于 S的幂等元为 $\begin{pmatrix}1&y\\0&0\end{pmatrix}$, 因而 S是纯正半群.

设

$$S^0=\left\{\begin{pmatrix}x&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x&x\\0&0\end{pmatrix}, x\neq 0\right\}.$$

则 S^0为 S的纯正子半群, 并且有

$$V\left(\begin{pmatrix}x&y\\0&0\end{pmatrix}\right)\cap S^0=\left\{\begin{pmatrix}x^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x^{-1}&x^{-1}\\0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

可以验证, S^0是 S的纯正断面. 我们可以构造

$$I=\{XX^0: X\in S\}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}=E(S^0),$$

$$\Lambda=\{X^0X: X\in S\}=\left\{\begin{pmatrix}1&z\\0&0\end{pmatrix}: z\in\mathbf{R}\right\}=E(S).$$

容易验证 $\Lambda I=E(S^0)$, 因此, S^0为 S的乘积纯正断面.

[参考文献]

[1] Blyth T S, McFadden R B. Regular semigroups with a multiplicative inverse transversal[J]. Proc Roy Soc Edinburgh A, 1982, 92(2): 253-270.

[2] McAlister D B, McFadden R B. Regular semigroups with inverse transversals[J]. Q J Math Oxford, 1983, 34(2): 459-474.

[3] Saito T. Construction of regular semigroups with inverse transversals[J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1989, 32(1): 41-51.

[4] Blyth T S, Almeida Santos M H. A simplistic approach to inverse transversals[J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1996, 39(1): 57-69.

[5] Kong X J. Regular semigroups with quasi-ideal orthodox transversals[J]. Semigroup Forum, 2007, 74(2): 247-258.

[6] Chen J F. Abundant semigroups with adequate transversals[J]. Semigroup Forum, 2000, 60(1): 67-79.

[7] Almeida Santos M H. Inverse transversals congruence extensions[J]. Comm Algebra, 1998, 26(3): 889-898.

[8] Chen J F. On regular semigroups with orthodox transversals[J]. Comm Algebra, 1999, 27(9): 4275-4288.

[9] Howie J M. An introduction to semigroup theory[M]. London: Academic Press, 1976.

[10] Chen J F, Guo Y Q. Orthodox transversals of regular semigroups[J]. International J Algebra and Computation, 2001, 11(2): 269-279.

[责任编辑: 丁　蓉]