具饱和传染率的一类捕食者-食饵模型的分析

幸　玲,刘宣亮

(华南理工大学理学院,广东 广州 510640)

[摘要]　讨论了疾病仅在食饵中传播的捕食者-食饵模型. 假设捕食者只捕食染病的食饵种群,且疾病的发生率为非线性的. 本文首先讨论系统解的有界性,然后讨论系统平衡点的存在性及其存在时的稳定性,得到了边界平衡点和正平衡点的全局稳定性.

[关键词]　捕食者-食饵模型,有界性,中心流形,稳定性

[中图分类号]　O175.14　[文献标志码]　A　[文章编号]　1001-4616(2011)03-0025-07

Analysis of a Predatro-Prey Model With a Saturated Infection Rate

Xing Ling, Liu Xuanliang

(College of Science, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In this paper, we study the predator-prey model with disease in the prey. Assume that the predator eats only the infected prey, and the incidence rate of disease is saturated. First of all, we study the boundedness of solutions, then we discuss the existence of equilibrium and its stability, and obtain the global stabilities of boundary equilibrium and positive equilibrium.

Key words: predator-prey model, boundedness, center manifold, stability

近年来,关于有疾病传播的捕食者-食饵模型,已有不少文献进行了研究,如文献[1-4]等. 在文献[2]中作者研究了疾病仅在食饵中传播的如下模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = rS\left(1 - \dfrac{S+I}{K}\right) - \beta SI, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - \bar{\eta}(I)P - cI, \\ \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (\varepsilon\bar{\eta}(I) - d)P, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $S(t)$, $I(t)$, $P(t)$ 分别表示 t 时刻易感食饵、染病食饵及捕食者数量, $r, K, \beta, c, \varepsilon, d$ 均为正参数. 其生态学意义分别为: r 为易感食饵的内禀增长率, K 为环境对食饵种群的容纳量, βSI 为食饵种群中疾病发生率, c 表示染病食饵的死亡率, $\bar{\eta}(I)$ 表示捕食者对染病食饵的功能性反应函数, ε, d 分别为捕食者捕食食饵的转化率和捕食者的死亡率.

文献[2]讨论了系统(1)解的有界性、平衡点的全局稳定性、系统(1)的持续性与 Hopf 分支等结论. 在系统(1)中疾病的发生率为双线性的,但是有大量原因表明双线性发生率需作修改,例如饱和接触率或饱和传染率更符合实际情况(参见文献[5-9]等),本文考虑捕食函数为 $\bar{\eta}(I) = mI$,具有饱和传染率的捕食者-食饵模型:

收稿日期: 2010-04-20.
基金项目:国家自然科学基金(10871074).
通讯联系人:幸　玲,硕士研究生,研究方向:常微分方程与微分动力系统. E-mail: xl1120@126.com

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=rS\left(1-\dfrac{S+I}{K}\right)-\dfrac{bI}{1+aI}S,\\ \dfrac{dI}{dt}=\dfrac{bI}{1+aI}S-mIP-cI,\\ \dfrac{dP}{dt}=(\varepsilon mI-d)P.\end{cases}\tag{2}$$

类似文献[2,3],本文未考虑捕食者对易感食饵的捕食,也未考虑染病食饵的出生率. 从生态学意义出发,我们仅需在 $R_+^3=\{(S,I,P)\in\mathbf{R}^3: S\geqslant 0, I\geqslant 0, P\geqslant 0\}$ 上对系统(2)进行讨论. 为简化系统(2),我们作如下变换:

$$x=\frac{S}{K}, y=\frac{I}{K}, z=\frac{mP}{bK}, bK\mathrm{d}t=\mathrm{d}\tau.$$

为讨论方便,我们把 x,y,z,τ 仍记为 S,I,P,t,则系统(2)变为:

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=a_1S(1-S-I)-\dfrac{I}{1+a_0I}S,\\ \dfrac{dI}{dt}=\dfrac{I}{1+a_0I}S-IP-a_2I,\\ \dfrac{dP}{dt}=a_3(I-a_4)P,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $a_0=aK, a_1=\dfrac{r}{bK}, a_2=\dfrac{c}{bK}, a_3=\dfrac{\varepsilon m}{b}, a_4=\dfrac{d}{\varepsilon mK}$. 以下我们讨论系统(3)解的有界性、平衡点的局部及全局渐近稳定性.

1　系统解的有界性

显然三坐标平面 $S=0, I=0, P=0$ 皆为系统(3)的不变平面且集合 R_+^3 为系统(3)的正不变集.

引理 1　(1) 对系统(3)满足初始条件 $S(0)+I(0)\geqslant 1$ 的解 $(S(t),I(t),P(t))$,或者有(i) 对 $\forall t\geqslant 0$ 有 $S(t)+I(t)\geqslant 1$,且当 $t\to+\infty$ 时,$(S(t),I(t),P(t))\to(1,0,0)$; 或者有(ii) 存在某个时间 t_0,当 $t>t_0$ 时有 $S(t)+I(t)<1$.

(2) 对系统(3)满足初始条件 $S(0)+I(0)<1$ 的解 $(S(t),I(t),P(t))$,对 $\forall t\geqslant 0$,有 $S(t)+I(t)<1$.

证明　当有初始条件 $S(0)+I(0)\geqslant 1$ 时,若对 $\forall t\geqslant 0$,有 $S(t)+I(t)\geqslant 1$,由系统(3)的前两个方程相加,我们有

$$\frac{\mathrm{d}(S(t)+I(t))}{\mathrm{d}t}=a_1S(1-S-I)-IP-a_2I,\tag{4}$$

因此对 $\forall t\geqslant 0$,有 $\dfrac{\mathrm{d}(S(t)+I(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$,由函数的单调有界定理知,$\lim\limits_{t\to\infty}(S(t)+I(t))$ 存在,我们设为 ξ,显然 $\xi\geqslant 1$. 若 $\xi>1$,记 $h(t)=S(t)+I(t)$,由系统(3)知 $h(t)$ 可微. 由 $\dfrac{\mathrm{d}\left(S(t)+I(t)+\dfrac{P(t)}{a_3}\right)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$,知 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(S(t)+I(t)+\dfrac{P(t)}{a_3}\right)$ 存在,从而有 $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)$ 存在,又由 $\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$,易知 $\lim\limits_{t\to+\infty}S(t)$ 存在,从而 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)$ 存在,于是有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dot h(t)$ 存在,则 $\dot h(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. 则由 Barbălat 引理[10] 得

$$\begin{aligned}0=\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(t)+I(t))&=\lim_{t\to+\infty}[a_1S(t)(1-S(t)-I(t))-I(t)P(t)-a_2I(t)]=\\ &\lim_{t\to+\infty}[a_1S(t)(1-\xi)-I(t)P(t)-a_2I(t)]\leqslant\\ &-\min\{a_1(\xi-1),a_2\}\lim_{t\to+\infty}(S(t)+I(t))=-\xi\min\{a_1(\xi-1),a_2\}<0.\end{aligned}\tag{5}$$

得出矛盾,即有

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\xi = \lim_{t\to+\infty}(S(t)+I(t)) = 1, \tag{6}$$

再由 Barbălat 引理,结合(4),(6)有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(t)+I(t)) = -\lim_{t\to+\infty}[I(t)P(t)+a_2I(t)] = 0. \tag{7}$$

要使(7)成立,当且仅当 $\lim_{t\to+\infty}I(t)=0$,由(6)知 $\lim_{t\to+\infty}S(t)=1$,又由系统(3)的第三个方程知 $\lim_{t\to+\infty}P(t)=0$,则(i)得到证明.

假若情形(ii)不成立,则存在 $t_0>0$,使得 $S(t_0)+I(t_0)=1$ 且 $I(t_0)>0$,则由(4),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(t)+I(t))\mid_{t=t_0} = -I(t_0)P(t_0)-a_2I(t_0)<0, \tag{8}$$

则当 $t>t_0$ 时,有 $S(t)+I(t)<1$,否则的话,若存在 $t_1>t_0$,其中 t_1 是继 t_0 后第一次使得 $S(t_1)+I(t_1)=1$ 的时刻,同样由(4)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(t)+I(t))\mid_{t=t_1} = -I(t_1)P(t_1)-a_2I(t_1)<0, \tag{9}$$

这与 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(t)+I(t))\mid_{t=t_1}\geqslant 0$ 矛盾.

若系统(3)的解满足初始条件 $S(0)+I(0)<1$,类似情形(ii)的证明,我们便得对 $\forall t\geqslant 0$,有 $S(t)+I(t)<1$,即(2)得证.

定理 1　对系统(3),任意从 R_+^3 中出发的解$(S(t),I(t),P(t))$都是有界的.

证明　由引理 1 的证明过程知,从 R_+^3 中出发的解$(S(t),I(t),P(t))$,对充分小的 $\varepsilon>0$,$\exists T_0>0$,对 $\forall t>T_0$ 有

$$S(t)<1+\varepsilon, I(t)<1, \tag{10}$$

令 $G(t)=a_3I(t)+P(t)$,当 $t\geqslant T_0$ 时

$$\begin{aligned}\dot{G}(t) &= a_3\dot{I}(t)+\dot{P}(t) = \frac{a_3IS}{1+a_4I}-a_2a_3I-a_3a_4P\leqslant a_3IS-a_2a_3I-a_3a_4P\leqslant\\ &a_3(1+\varepsilon)-\min\{a_2,a_3a_4\}(a_3I+P) = a_3(1+\varepsilon)-\min\{a_2,a_3a_4\}G(t).\end{aligned} \tag{11}$$

则存在充分大的 $T_1>T_0$,$\forall t>T_1$,有 $P(t)\leqslant G(t)\leqslant\frac{a_3(1+\varepsilon)}{\min\{a_2,a_3a_4\}}+1$,从而得证系统(3)的解$(S(t),I(t),P(t))$是有界的.

记 $M=\frac{a_3}{\min\{a_2,a_3a_4\}}$,$\Omega=\{(S,I,P)\in R_+^3: S+I\leqslant 1, a_3I+P\leqslant M\}$,则有下列定理成立.

定理 2　集合 Ω 在 R_+^3 中是全局吸引的且是系统(3)的正不变集.

证明　由引理 1 知,从 R_+^3 中出发的解$(S(t),I(t),P(t))$要么趋于$(1,0,0)$,要么进入 Ω 的内部,从而 Ω 在 R_+^3 中为全局吸引的,得证. 若$(S(0),I(0),P(0))\in\Omega$,有 $a_3I(0)+P(0)=G(0)\leqslant M$,则当 $t\geqslant 0$ 时,由 $\dot{G}(t)\leqslant a_3-\min\{a_2,a_3a_4\}G(t)=\min\{a_2,a_3a_4\}(M-G(t))$,有 $a_3I(t)+P(t)=G(t)\leqslant M$,从而 Ω 为 R_+^3 的正不变集,得证.

2　平衡点的存在性及稳定性分析

由系统(3)可知任意平衡点$(\hat{S},\hat{I},\hat{P})$处的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J}(\hat{S},\hat{I},\hat{P}) = \begin{pmatrix} a_1-2a_1\hat{S}-a_1\hat{I}-\frac{\hat{I}}{1+a_0\hat{I}} & -a_1\hat{S}-\frac{\hat{S}}{(1+a_0\hat{I})^2} & 0\\ \frac{\hat{I}}{1+a_0\hat{I}} & \frac{\hat{S}}{(1+a_0\hat{I})^2}-\hat{P}-a_2 & -\hat{I}\\ 0 & a_3\hat{P} & a_3(\hat{I}-a_4)\end{pmatrix}, \tag{12}$$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

易知系统(3)总存在边界平衡点 $E_0(0,0,0)$,$E_{10}(1,0,0)$. 由(12)知 E_0 处的特征值为一正二负,于是 E_0 是不稳定的,而对 E_{10} 的稳定性有下列结论.

定理3 (i) 若 $a_2 < 1$,则 E_{10} 为鞍点是不稳定的.

(ii) 若 $a_2 \geqslant 1$,则除 $S = 0$ 平面外,E_{10} 在 R_+^3 中是全局渐近稳定的.

证明 由(12)易知(i)成立. 下证 $a_2 \geqslant 1$ 时 E_{10} 的全局渐近稳定性. 由定理2知要证 E_{10} 在 R_+^3 中的全局渐近稳定性,则只需证 E_{10} 在 Ω 的内部是全局渐近稳定的,考虑 Liapunov 函数 $V: R_{+s}^3 \to R$,这里 $R_{+s}^3 = \{(S,I,P) \in R_+^3 : S > 0\}$,

$$V(t) = S - 1 - \ln S + I, \tag{13}$$

则当 $(S(t),I(t),P(t)) \in \Omega$,且 $S > 0$ 时,有

$$\dot V(t) = -a_1(1-S)(1-S-I) + \left(\frac{1}{1+a_0 I} - a_2\right)I - IP \leqslant$$
$$-a_1(1-S)(1-S-I) + (1-a_2)I \leqslant 0, \tag{14}$$

由(14)知,当 $a_2 > 1$ 时,$\dot V(t) = 0$ 当且仅当 $(S,I) = (1,0)$;当 $a_2 = 1$ 时,满足 $\dot V(t) = 0$ 的最大不变子集为 $\{(S,I,P):(S,I) = (1,0)\}$,则由 Lasalle 不变集原理[1]知从 Ω 内部除 $S = 0$ 平面外出发的解都有 $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = 1$,$\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = 0$,从而有 $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 0$. 再由引理1知,当 $a_2 \geqslant 1$ 时,除平面 $S = 0$ 外,E_{10} 在 R_+^3 中是全局渐近稳定的.

由系统(3)知,平面 $P = 0$ 上的轨线由下列系统决定:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = a_1 S(1-S-I) - \dfrac{I}{1+a_0 I}S \equiv R(S,I), \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dfrac{I}{1+a_0 I}S - a_2 I \equiv Q(S,I), \end{cases} \tag{3$'$}$$

事实上系统(3)′是疾病传染率为 $\dfrac{IS}{1+a_0 I}$ 的 SI 模型,显然 $M_0(0,0)$,$M_1(1,0)$ 为系统(3)′的无病平衡点,现在讨论系统(3)′的正平衡点,令

$$R(S,I) = 0, Q(S,I) = 0, \tag{15}$$

消去 S 得

$$f(I) \equiv (a_0^2 a_1 a_2 + a_0 a_1)I^2 + (1 + a_1 + 2a_0 a_1 a_2 - a_0 a_1)I + a_1 a_2 - a_1 = 0. \tag{16}$$

定理4 对系统(3)′有

(i) 当 $a_2 \geqslant 1$ 时,$M_0(0,0)$ 为鞍点,$M_1(1,0)$ 在 SOI 平面上第一象限内是全局渐近稳定的.

(ii) 当 $a_2 < 1$ 时,$M_0(0,0)$,$M_1(1,0)$ 都为鞍点,且有惟一正平衡点 $M_2(S_2,I_2)$ 在 SOI 平面第一象限内是全局渐近稳定的.

证明 (i) 由 $f(I) = 0$ 可得

$$I_{1,2} = \frac{-(1+a_1+2a_0a_1a_2-a_0a_1) \mp \sqrt{(1+a_1+2a_0a_1a_2-a_0a_1)^2 + 4a_0a_1^2(1-a_2)(a_0a_2+1)}}{2a_0a_1(a_0a_2+1)}, \tag{17}$$

当 $a_2 \geqslant 1$ 时,$f(I) = 0$ 关于 I 无正根,再由定理3知(i)成立.

(ii) 当 $a_2 < 1$ 时,$f(I) = 0$ 关于 I 有惟一正根

$$I_2 = \frac{-(1+a_1+2a_0a_1a_2-a_0a_1) + \sqrt{(1+a_1+2a_0a_1a_2-a_0a_1)^2 + 4a_0a_1^2(1-a_2)(a_0a_2+1)}}{2a_0a_1(a_0a_2+1)}, \tag{18}$$

得系统(3)′的正平衡点 $M_2(S_2,I_2) = (a_2(1+a_0I_2), I_2)$. M_2 处的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{J}(M_2) = \begin{pmatrix} -a_1a_2(1+a_0I_2) & -a_1a_2(1+a_0I_2) - \dfrac{a_2}{1+a_0I_2} \\ \dfrac{I_2}{1+a_0I_2} & -\dfrac{a_0a_2I_2}{1+a_0I_2} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

则

$$\det(\boldsymbol{J}(M_2)) = a_0a_1a_2^2I_2 + a_1a_2I_2 + \frac{a_2I_2}{(1+a_0I_2)^2} > 0, \tag{20}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(M_2)) = -\left(a_1a_2 + a_0a_1a_2I_2 + \frac{a_0a_2I_2}{1+a_0I_2}\right) < 0, \tag{21}$$

故 M_2 为系统(3)′的局部渐近稳定平衡点.

取函数 $D(S,I) = (1+a_0I)/IS$,则当 $S>0, I>0$ 时

$$\frac{\partial(DR)}{\partial S} + \frac{\partial(DQ)}{\partial I} = -\frac{a_1(1+a_0I)}{I} - \frac{a_0a_2}{S} < 0, \tag{22}$$

则由 Bendixson-Dulac 定理[11]知,系统(3)′在 SOI 平面第一象限内无闭轨,故(ii)得证.

但若把 $M_2(S_2,I_2)$ 看作 R_+^3 中的点 $E_{20}(S_2,I_2,0)$,成为系统(3)的边界平衡点,由(12)知 E_{20} 处的特征方程为:

$$[\lambda - a_3(I_2-a_4)][\lambda^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(M_2))\lambda + \det(\boldsymbol{J}(M_2))] = 0. \tag{23}$$

定理5 假若有 $a_2<1$,则

(i) 当 $I_2>a_4$ 时,$E_{20}(S_2,I_2,0)$ 是系统(3)的不稳定平衡点.

(ii) 当 $I_2=a_4$ 时,$E_{20}(S_2,I_2,0)$ 是系统(3)的局部渐近稳定的高阶奇点.

(iii) 当 $I_2<a_4$ 时,$E_{20}(S_2,I_2,0)$ 在 R_+^3 中是局部渐近稳定的,特别地,若 $a_4\geqslant 1$,则 $E_{20}(S_2,I_2,0)$ 在 R_+^3 中除 $S=0, I=0$ 平面外是全局渐近稳定的.

证明 (i) 当 $I_2>a_4$ 时,E_{20} 的特征值为一正二负,故为不稳定的鞍点.

(ii) 当 $I_2=a_4$ 时,由(23)知,E_{20} 有一个零特征值和两个负特征值,此时 E_{20} 为系统的高阶奇点且系统有吸引的一维中心流形,则 E_{20} 的稳定性由中心流形上的限定方程决定[12].

令 $x_1=S-S_2, x_2=I-I_2, x_3=P$,然后用 Taylor 展式,则系统(3)变为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + F(\boldsymbol{x}), \tag{24}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,$b_1 = -a_1a_2(1+a_0a_4)$,$b_2 = -a_1a_2(1+a_0a_4) - \dfrac{a_2}{1+a_0a_4}$,$b_3 = \dfrac{a_4}{1+a_0a_4}$,$b_4 = -\dfrac{a_0a_2a_4}{1+a_0a_4}$,$b_5=-a_4$,$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,$F(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),f_3(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} = O(|\boldsymbol{x}|^2)$,且 $f_3(\boldsymbol{x}) = a_3x_2x_3$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值分别为 $\lambda_1=0, \lambda_2, \lambda_3<0$,属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的 3 个特征向量分别取为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \left(1, -\dfrac{b_1}{b_2}, \dfrac{b_1b_4-b_2b_3}{b_2b_5}\right)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2 = \left(1, \dfrac{\lambda_2-b_1}{b_2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_3 = \left(1, \dfrac{\lambda_3-b_1}{b_2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$. 记 $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$,则 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 形如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,其中 $a_{13} = \dfrac{b_2b_5}{b_1b_4-b_2b_3} \neq 0$,作变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ty}$,$\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$,则系统(24)变为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{T}^{-1}F(\boldsymbol{Ty}), \tag{25}$$

代入 $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}$ 得

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sigma y_1^2 + O(|y_1y_2| + |y_1y_3|), \\ \dot{y}_2 = \lambda_2y_2 + O(|\boldsymbol{y}|^2), \\ \dot{y}_3 = \lambda_3y_3 + O(|\boldsymbol{y}|^2), \end{cases} \tag{26}$$

其中 $\sigma = -\dfrac{b_1a_3}{b_2} < 0$. 设系统(26)的中心流形方程形如

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} y_2 = O(y_1^2), \\ y_3 = O(y_1^2), \end{cases} \tag{27}$$

代入系统(26)第一式得中心流形上的限定方程为

$$\dot{y}_1 = \sigma y_1^2 + O(y_1^3), \tag{28}$$

由于 $x_3 = \frac{b_1b_4 - b_2b_3}{b_2b_5}y_1$,且 $\frac{b_1b_4 - b_2b_3}{b_2b_5} > 0$,由(28)知,对充分小的 $y_1 > 0$ 有 $\dot{y}_1 < 0$,从而对充分小的 $x_3 > 0$ 有 $\dot{x}_3 < 0$,故 E_{20} 作为系统(3)的平衡点在 R_+^3 内部是局部渐近稳定的.

(iii)当 $I_2 < a_4$ 时,$E_{20}(S_2, I_2, 0)$ 的特征值均为负,故此时 E_{20} 为局部渐近稳定的. 由(18)得

$$S_2 + I_2 = a_2(1 + a_0I_2) + I_2 = \frac{-(1 + a_1 - a_0a_1) + \sqrt{(1 + a_1 - a_0a_1)^2 + 4a_0a_1a_2 + 4a_0a_1^2}}{2a_0a_1} =$$

$$\frac{2a_0a_1 - (1 + a_1 + a_0a_1) + \sqrt{(1 + a_1 + a_0a_1)^2 + 4a_0a_1(a_2 - 1)}}{2a_0a_1} < 1. \tag{29}$$

即 $E_{20} \in \mathrm{int}\Omega$. 若 $a_4 \geqslant 1$,设 $(S(t), I(t), P(t))$ 是从 R_+^3 中除 $S = 0, I = 0$ 平面外出发的解,由定理1知,存在充分大的 T_*,$\forall t > T_*$ 时,$I(t) < 1$,由系统(3)的第三式得 $\dot{P}(t) < 0$,从而有 $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 0$,此时系统(3)的极限系统变为系统(3)′,由前面的讨论再结合极限系统理论知识知 $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = S_2$,$\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = I_2$,即此时 E_{20} 在 R_+^3 中除 $S = 0, I = 0$ 平面外是全局渐近稳定的.

系统(3)有惟一的正平衡点 $E_*(S_*, I_*, P_*)$,其中

$$S_* = 1 - a_4 - \frac{a_4}{a_1(1 + a_0a_4)}, I_* = a_4, P_* = \frac{S_*}{1 + a_0a_4} - a_2, \tag{30}$$

当且仅当 $1 - a_4 - \frac{a_4}{a_1(1 + a_0a_4)} > a_2(1 + a_0a_4)$. 令 $R_0 = 1/\left(a_4 + \frac{a_4}{a_1(1 + a_0a_4)} + a_2(1 + a_0a_4)\right)$,则 $R_0 > 1$ 是系统(3)存在惟一正平衡点的充要条件;同时易得 $R_0 > 1$ 等价于 $a_2 < 1, a_4 < I_2$,即 E_* 出现的充要条件是边界平衡点 E_{10}, E_{20} 都是不稳定的.

定理6 当 $R_0 > 1$ 时,$E_*(S_*, I_*, P_*)$ 在 R_+^3 中除3个坐标平面外是全局渐近稳定的.

证明 在系统(3)中令 $\beta(I) = \frac{I}{1 + a_0I} > 0$,易知 $\beta(I)$ 是关于 I 的严格增函数,把系统(3)的3个方程分别改写成

$$\dot{S} = -S[a_1(S - S_*) + a_1(I - I_*) + \beta(I) - \beta(I_*)], \tag{31}$$

$$\dot{I} = \beta(I)[(S - S_*) - a_0a_2(I - I_*) - (P - P_*)(1 + a_0I_*) - a_0P(I - I_*)], \tag{32}$$

或者

$$\dot{I} = \beta(I)[(S - S_*) - a_0a_2(I - I_*) - (P - P_*)(1 + a_0I) - a_0P_*(I - I_*)], \tag{33}$$

$$\dot{P} = a_3P(I - I_*), \tag{34}$$

取 Liapunov 函数

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4, \tag{35}$$

其中

$$V_1 = S - S_* - S_*\ln\frac{S}{S_*}, V_2 = \frac{a_1(1 + a_0I_*)^2 + 1}{a_3(1 + a_0I_*)}\left(P - P_* - P_*\ln\frac{P}{P_*}\right), \tag{36}$$

$$V_3 = a_1\int_{I_*}^{I}\frac{\mu - I_*}{\beta(\mu)}\mathrm{d}\mu, V_4 = \int_{I_*}^{I}\frac{\beta(\mu) - \beta(I_*)}{\beta(\mu)}\mathrm{d}\mu, \tag{37}$$

分别由(31),(34)得

$$\dot{V}_1 = -a_1(S - S_*)^2 - a_1(S - S_*)(I - I_*) - (S - S_*)[\beta(I) - \beta(I_*)], \tag{38}$$

$$\dot{V}_2 = \frac{a_1(1 + a_0I_*)^2 + 1}{(1 + a_0I_*)}(P - P_*)(I - I_*), \tag{39}$$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由(32)得

$$\dot{V}_3 = a_1(S - S_*)(I - I_*) - a_0 a_1(a_2 + P)(I - I_*)^2 - a_1(1 + a_0 I_*)(P - P_*)(I - I_*), \quad (40)$$

再由(33)，同时注意到 $\beta(I) - \beta(I_*) = \dfrac{I - I_*}{(1 + a_0 I)(1 + a_0 I_*)}$，则有

$$\dot{V}_4 = (S - S_*)[\beta(I) - \beta(I_*)] - a_0(a_2 + P_*)(I - I_*)[\beta(I) - \beta(I_*)] - \frac{1}{1 + a_0 I_*}(P - P_*)(I - I_*), \quad (41)$$

因而除3个坐标平面外从 R_+^3 中出发的解 $(S(t), I(t), P(t))$，有

$$\dot{V} = -a_1(S - S_*)^2 - a_0 a_1(a_2 + P)(I - I_*)^2 - a_0(a_2 + P_*)(I - I_*)[\beta(I) - \beta(I_*)] \leqslant 0, \quad (42)$$

$\dot{V} = 0$ 当且仅当 $(S, I) = (S_*, I_*)$.

结合(36)，(37)知 $V_i(i = 1,2,3,4)$ 为正定函数，且容易判断 V_1，V_2 为无限大正定函数. 由(37)得 $V_3 = a_1(1 - a_0 I_*)(I - I_*) + \dfrac{a_0 a_1}{2}(I^2 - I_*^2) - a_1 I_* \ln \dfrac{I}{I_*}$，$V_4 = (1 - a_0\beta(I_*))(I - I_*) - \beta(I_*) \ln \dfrac{I}{I_*}$，注意到 $1 - a_0\beta(I_*) = 1 - \dfrac{a_0 a_4}{1 + a_0 a_4} > 0$，可知当 $I \to 0$ 或 $I \to +\infty$ 时，都有 $V_3 \to +\infty$，$V_4 \to +\infty$，从而所取的 V 函数为无限大正定的，由 Lasalle 不变集原理知除坐标平面外从 R_+^3 中出发的解 $(S(t), I(t), P(t))$ 有 $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = S_*$，$\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = I_*$，代入系统(3)的第二个方程知 $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = P_*$，从而 E_* 的全局渐近稳定性得证.

参考文献

[1] Chattopadhyay J, Arino O. A predator-prey model with disease in the prey [J]. Nonlinear Analysis, 1999, 36(6): 747-766.

[2] Xiao Y, Chen L. Analysis of a three species eco-epidemiological model [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 258(2): 733-754.

[3] Xiao Yanli, Chen Lansun. A ratio-dependent predator-prey model with disease in the prey [J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 131(2): 397-414.

[4] Hethcote H W, Wang W, Han L, et al. A predator-prey model with infected prey [J]. Theoretical Population Biology, 2004, 66(3): 259-268.

[5] Regoes R R, Ebert D, Bonhoeffer A. Dose-dependent infection rates of parasites produce the Allee effect in epidemiology [J]. Proc Roy Soc Lond, 2002, 269(1488): 271-279.

[6] Li Guihua, Wang Wendi. Bifurcation analysis of an epidemic model with nonlinear incidence [J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 214(2): 411-423.

[7] Liu W M, Levin S A, Iwasa Y L. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models [J]. Math Biol, 1986, 23(2): 187-204.

[8] 徐为坚. 具有种群 Logistic 增长及饱和传染率的 SIS 模型的稳定性和 Hopf 分支 [J]. 数学物理学报, 2008, 28(3): 578-584.

[9] Ruan Shigui, Wang Wendi. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate [J]. Differential Equations, 2003, 188(1): 135-163.

[10] 贺昱曜，闫茂德. 非线性控制理论及应用 [M]. 西安：西安电子科技大学出版社, 2007.

[11] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 北京：科学出版社, 2007.

[12] Kuznetsov Y. Elements of Applied Bifurcation Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

责任编辑：丁　蓉

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net