

一类具分布式偏差变元中立双曲型泛函 微分方程的振动性

林文贤

(韩山师范学院数学与信息技术系 广东 潮州 521041)

[摘要] 研究了一类具有分布式偏差变元的非线性中立双曲型偏泛函微分方程的振动性,借助广义 Riccati 变换和微分不等式技巧,获得了这类方程分别在 Robin、Dirichlet 边值条件下所有解振动的若干新的充分性条件,所得结果推广了最近文献的相关结果.

[关键词] 分布式偏差变元 双曲型 振动性 广义 Riccati 变换

[中图分类号] O175.27 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)04-0013-04

Oscillation of Certain Neutral Hyperbolic Functional Differential Equations With Distributed Deviating Arguments

Lin Wenxian

(Department of Math and Information Technology , Hanshan Normal University , Chaozhou 521041 , China)

Abstract: The oscillation of a class of nonlinear neutral hyperbolic partial functional differential equations with distributed deviating arguments is studied. By employing the generalized Riccati transformation, some new sufficient conditions for oscillation of all solutions of such equations are obtained under Robin and Dirichlet boundary value conditions. The results generalize some the latest results.

Key words: distributed deviating arguments hyperbolic oscillation generalized Riccati transformation

近年来,关于双曲型和抛物型偏泛函微分方程的振动理论的研究,已有许多成果^[1-6],但这些结果中均未涉及具有分布式中立项系数的偏泛函微分方程.本文将讨论一类具有分布式中立项系数的非线性中立双曲型偏泛函微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[b(t) \frac{\partial}{\partial t} \left[u(x, t) + \int_{\alpha}^{\beta} p(t, \eta) u[x, \mu(t, \eta)] d\rho(\eta) \right] \right] + \int_a^b q(x, t, \xi) f(u[x, g(t, \xi)]) d\sigma(\xi) = \\ a(t) h(u) \Delta u(x, t) + \sum_{j=1}^m a_j(t) h_j(u(x, \pi_j(t))) \Delta u(x, \pi_j(t)), \\ (x, t) \in \Omega \times \mathbf{R}_+ \equiv G \end{aligned} \quad (E)$$

分别在边值条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + r(x, t) u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}_+, \quad (B_1)$$

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}_+, \quad (B_2)$$

下解的振动性质,获得了其所有解振动的充分判据.其中 Δ 是 \mathbf{R}^N 中的 Laplacian 算子, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 是具有逐片光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$, $r \in C(\partial\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, 且 ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

由于方程 (E) 的积分是 Stieltjes 积分,因而方程 (E) 包含了下列方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[b(t) \frac{\partial}{\partial t} \left[u(x, t) + \sum_{i=1}^s p_i(t) u(x, t - \mu_i(t)) \right] \right] + \sum_{k=1}^n b_k(x, t) f(u(x, t - \sigma_k(t))) =$$

收稿日期: 2011-06-21.

通讯联系人: 林文贤 教授 研究方向: 泛函微分方程的理论及其应用. E-mail: linwx66@163.com

$$a(t)h(u)\Delta u(x,t) + \sum_{j=1}^m a_j(t)h_j(u(x,t-\tau_j(t)))\Delta u(x,t-\tau_j(t)), \quad (E^*)$$

并且,当 $b(t) = 1$ 时, (E^*) 就是 [3] 所研究的方程,因而本文的结论推广和包含了 [3] 的结果.

假设下列条件 (H) 成立:

(H1) $a(t), \mu_j(t) \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $\sigma_j(t) \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, $\sigma_j(t) \leq t$, $b(t) \in C^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 是凸函数, $f(-u) = -f(u)$, $\frac{f(u)}{u} \geq \lambda > 0$ ($u \neq 0$), 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_j(t) = \infty$, $\int_0^\infty b^{-1}(t) dt = \infty$, $j \in I_m = \{1, 2, \dots, m\}$;

(H2) $p(t, \eta) \in C(\mathbf{R}_+ \times [\alpha, \beta], \mathbf{R}_+)$, $\mu(t, \eta) \in C^2(\mathbf{R}_+ \times [\alpha, \beta], \mathbf{R})$, $\mu(t, \eta) \leq t \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\eta \in [\alpha, \beta]} \mu(t, \eta) = \infty$, 且存在正常数 p_0 , 使得 $\int_\alpha^\beta p(t, \eta) d\rho(\eta) \leq p_0 < 1$;

(H3) $g \in C(\mathbf{R}_+ \times [a, b], \mathbf{R})$, $g(t, \xi) \leq t$, $\xi \in [a, b]$, g 分别关于 t 和 ξ 非减, $g'(t, \rho) > 0$, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \min_{\xi \in [a, b]} g(t, \xi) = +\infty$, $q \in C(\bar{G} \times [a, b], \mathbf{R}_+)$, $Q(t, \xi) = \min_{x \in \Omega} q(x, t, \xi)$;

(H4) $h(u), h_j(u) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, 且对 $u \neq 0$ 时, 有 $uh'(u) \geq 0$, $uh'_j(u) > 0$, $uh(u) \geq 0$, $\mu h_j(u) > 0$, $j \in I_m$.

(H5) $\rho(\eta) \in C([\alpha, \beta], \mathbf{R})$, $\sigma(\xi) \in C([a, b], \mathbf{R})$ 都是非减函数, 方程 (E) 中的积分都是 Stieltjes 积分.

1 主要结果

定理 1 若存在函数 $\varphi(t) \in C^1([t_0, \infty), \mathbf{R}_+)$, 使得

$$\int_{t_0}^\infty \left\{ \varphi(t) \int_a^b Q(t, \xi) \left[1 - \int_\alpha^\beta p(g(t, \xi), \eta) d\rho(\eta) \right] d\sigma(\xi) - \frac{[\varphi'(t)]^2 b(g(t, \rho))}{4\varphi(t) g'(t, \rho)} \right\} dt = \infty, \quad (1)$$

则边值问题 (E), (B_1) 的所有解在 G 上振动.

证明 假设 $u(x, t)$ 是问题 (E), (B_1) 的一个非振动解, 不失一般性, 不妨设 $u(x, t) > 0$, $(x, t) \in \Omega \times [t_0, +\infty)$ ($t_0 > 0$). 由条件 (H2), 存在 $t_1 \geq t_0$, 使得当 $(x, t) \in \Omega \times [t_1, +\infty)$, $\eta \in [\alpha, \beta]$, $\xi \in [a, b]$ 有 $u[x, \mu(t, \eta)] > 0$, $\mu[x, g(t, \xi)] > 0$, $\mu(x, \sigma_j(t)) > 0$, $j \in I_m$. 将方程 (E) 两边在 Ω 上关于 x 积分, 有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ b(t) \frac{d}{dt} \left[\int_\Omega u(x, t) dx + \int_\alpha^\beta p(t, \eta) \left(\int_\Omega u[x, \mu(t, \eta)] dx \right) d\rho(\eta) \right] \right\} + \\ & \int_\Omega \int_a^b q(x, t, \xi) f(u[x, g(t, \xi)]) d\sigma(\xi) dx = \\ & a(t) \int_\Omega h(u) \Delta u(x, t) dx + \sum_{j=1}^m a_j(t) \int_\Omega h_j(u(x, \sigma_j(t))) \Delta u(x, \sigma_j(t)) dx, \quad t \geq t_1. \end{aligned} \quad (2)$$

由 Green 公式和边值条件 (B_1) 及 (H4) 得

$$\int_\Omega h(u) \Delta u dx = - \int_{\partial\Omega} h(u) r(x, t) u(x, t) dS - \int_\Omega h'(u) |\operatorname{grad} u|^2 dS \leq 0, \quad (3)$$

其中 dS 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素.

$$\int_\Omega h_j(u(x, \sigma_j(t))) \Delta u(x, \sigma_j(t)) dx \leq 0, \quad j \in I_m, \quad t \geq t_1, \quad (4)$$

又根据 Jensen 不等式, 有

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \int_a^b q(x, t, \xi) f(u[x, g(t, \xi)]) d\sigma(\xi) dx = \int_a^b \int_\Omega q(x, t, \xi) f(u[x, g(t, \xi)]) d\sigma(\xi) dx \geq \\ & \int_a^b Q(t, \xi) \left[\int_\Omega f(u[x, g(t, \xi)]) dx \right] d\sigma(\xi) \geq \int_a^b Q(t, \xi) \left\{ f \left[\int_\Omega u[x, g(t, \xi)] dx \left(\int_\Omega dx \right)^{-1} \right] \int_\Omega dx \right\} d\sigma(\xi), \quad (5) \end{aligned}$$

令 $V(t) = \int_\Omega u(x, t) dx \left(\int_\Omega dx \right)^{-1}$, 显然, $V(t) \geq 0$, $t \geq t_1$, 于是由 (2) ~ (5) 可得

$$\left\{ b(t) \left[V(t) + \int_\alpha^\beta p(t, \eta) V[\mu(t, \eta)] d\rho(\eta) \right] \right\}' + \int_a^b Q(t, \xi) f[V[g(t, \xi)]] d\sigma(\xi) \leq 0, \quad t \geq t_1. \quad (6)$$

令 $Z(t) = V(t) + \int_{\alpha}^{\beta} p(t, \eta) V[\mu(t, \eta)] d\rho(\eta)$, 则由 (H2) 可推得

$$Z(t) > 0, Z(t) \geq V(t), Z'(t) \geq 0, t \geq t_1, \quad (7)$$

进而, 由 (6) 和 (H1) 得

$$[b(t) Z'(t)]' + \lambda \int_a^b Q(t, \xi) [Z[g(t, \xi)] - \int_{\alpha}^{\beta} p(g(t, \xi), \eta) V[\mu(g(t, \xi), \eta)] d\rho(\eta)] d\sigma(\xi) \leq 0. \quad (8)$$

注意到 (7) 和 (H2), 由 (8) 得

$$[b(t) Z'(t)]' + \lambda \int_a^b Q(t, \xi) \left[1 - \int_{\alpha}^{\beta} p(g(t, \xi), \eta) d\rho(\eta)\right] Z[g(t, \xi)] d\sigma(\xi) \leq 0. \quad (9)$$

由 (H3), 有 $g(t, \xi) \geq g(t, \mu)$, 从而有 $Z[g(t, \xi)] \geq Z[g(t, \mu)]$, $t \geq t_1, \xi \in [a, b]$. 于是 (9) 可变为

$$[b(t) Z'(t)]' + \lambda Z[g(t, \mu)] \int_a^b Q(t, \xi) \left[1 - \int_{\alpha}^{\beta} p(g(t, \xi), \eta) d\rho(\eta)\right] d\sigma(\xi) \leq 0. \quad (10)$$

令

$$W(t) = \frac{\varphi(t) b(t) Z'(t)}{Z[g(t, \mu)]}, t \geq t_1,$$

显然, $W(t) > 0$, 且注意到 $[b(t) Z'(t)]' \leq 0$, 结合 (10) 式有

$$\begin{aligned} W'(t) &= \frac{\varphi'(t) b(t) Z'(t)}{Z[g(t, \mu)]} + \frac{\varphi(t) [b(t) Z'(t)]'}{Z[g(t, \mu)]} - \frac{\varphi(t) b(t) Z'(t) Z'[g(t, \mu)] g'(t, \mu)}{Z^2[g(t, \mu)]} \leq \\ &= -\varphi(t) \int_a^b Q(t, \xi) \left[1 - \int_{\alpha}^{\beta} p(g(t, \xi), \eta) d\rho(\eta)\right] d\sigma(\xi) + \frac{[\varphi'(t)]^2 b(g(t, \mu))}{4\varphi(t) g'(t, \mu)} - \\ &\quad \left[\frac{b(t) Z'(t) \sqrt{\varphi(t) g'(t, \mu)}}{\sqrt{b(g(t, \mu))} Z(g(t, \mu))} - \frac{\varphi'(t) \sqrt{b(g(t, \mu))}}{2 \sqrt{\varphi(t) g'(t, \mu)}} \right]^2 \leq \\ &= -\varphi(t) \int_a^b Q(t, \xi) \left[1 - \int_{\alpha}^{\beta} p(g(t, \xi), \eta) d\rho(\eta)\right] d\sigma(\xi) + \frac{[\varphi'(t)]^2 b(g(t, \mu))}{4\varphi(t) g'(t, \mu)}, \end{aligned}$$

对上述的不等式从 t_1 到 t ($t \geq t_1$) 积分得

$$W(t) \leq W(t_1) - \int_{t_1}^t \left\{ -\varphi(s) \int_a^b Q(s, \xi) \left[1 - \int_{\alpha}^{\beta} p(g(s, \xi), \eta) d\rho(\eta)\right] d\sigma(\xi) + \frac{[\varphi'(s)]^2 b(g(s, \mu))}{4\varphi(s) g'(s, \mu)} \right\} ds,$$

在上式中, 让 $t \rightarrow +\infty$, 并结合 (1) 式, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = -\infty$, 这与 $W(t) > 0$ 矛盾. 定理 1 得证.

在定理 1 中, 若 $\varphi(t)$ 恒为正常数, 则有

定理 2 若将条件 (1) 换为

$$\int_{t_0}^{\infty} \int_a^b Q(t, \xi) \left[1 - \int_{\alpha}^{\beta} p(g(t, \xi), \eta) d\rho(\eta)\right] d\sigma(\xi) dt = \infty \quad (11)$$

成立, 则定理 1 的结论仍然成立.

引理 1^[7] 设 α_0 是如下 Dirichlet 特征值问题:

$$\begin{cases} \Delta \phi(x) + \alpha \phi(x) = 0, x \in \Omega, \\ \phi(x) = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (12)$$

的最小特征值 $\phi(x)$ 是与 α_0 对应的特征函数, 则 $\alpha_0 > 0, \phi(x) > 0, x \in \Omega$.

定理 3 若定理 1 的所有条件都成立, $h(u), h_j(u)$ 为常数 (均设为 1, $j \in I_m$), 则边值问题 (E)、(B₂) 的所有解在 G 上振动.

证明 假设 $u(x, t)$ 是问题 (E)、(B₂) 的一个非振动解, 不失一般性, 设 $u(x, t) > 0, (x, t) \in \Omega \times [t_0, +\infty)$ ($t_0 > 0$). 由条件 (H2), 存在 $t_1 \geq t_0$, 使得当 $(x, t) \in \Omega \times [t_1, +\infty), \xi \in [a, b]$ 有 $u[x, \mu(t, \eta)] > 0, \mu[x, g(t, \xi)] > 0, \mu[x, \pi_j(t)] > 0, j \in I_m$.

将方程 (E) 两边同时乘以 $\phi(x)$ 后再关于 x 在 Ω 上积分, 有

$$\frac{d}{dt} \left\{ b(t) \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} u(x, t) \phi(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} p(t, \eta) \left(\int_{\Omega} u[x, \mu(t, \eta)] \phi(x) dx \right) d\rho(\eta) \right] \right\} =$$

$$a(t) \int_{\Omega} \phi(x) \Delta u(x, t) dx + \sum_{j=1}^m a_j(t) \int_{\Omega} \phi(x) \Delta u(x, \tau_j(t)) dx - \int_{\Omega} \left[\int_a^b q(x, t, \xi) f(u[g(t, \xi)]) d\sigma(\xi) \right] \phi(x) dx, \quad (13)$$

由 Green 公式、边值条件(B₂) 和 Jensen 不等式有

$$\left[b(t) \left[U(t) + \int_{\alpha}^{\beta} p(t, \eta) U(\mu(t, \eta)) d\rho(\eta) \right]' \right]' + \alpha_0 a(t) U(t) + \alpha_0 \sum_{j=1}^m a_j(t) U(\tau_j(t)) \int_a^b Q(t, \xi) f(U[g(t, \xi)]) d\sigma(\xi) \leq 0, t \geq t_1, \quad (14)$$

其中 $U(t) = \int_{\Omega} u(x, t) \phi(x) dx \left(\int_{\Omega} \phi(x) dx \right)^{-1} > 0, t \geq t_1$. 因此由 (H1) 得

$$\left[b(t) \left[U(t) + \int_{\alpha}^{\beta} p(t, \eta) U(\mu(t, \eta)) d\rho(\eta) \right]' \right]' + \lambda \int_a^b Q(t, \xi) U[g(t, \xi)] d\sigma(\xi) \leq 0, t \geq t_1. \quad (15)$$

令 $Y(t) = U(t) + \int_{\alpha}^{\beta} p(t, \eta) U(\mu(t, \eta)) d\rho(\eta)$, 易知当 $t \geq t_1$ 时, $Y(t) > 0, [b(t) Y'(t)]' \leq 0, Y'(t) > 0$, 且由 (15) 式有

$$[b(t) Y'(t)]' + \lambda \int_a^b Q(t, \xi) U[g(t, \xi)] d\sigma(\xi) \leq 0, t \geq t_1.$$

以下的证明类似于定理 1 的后半部分的证明, 故省略. 证毕.

[参考文献]

- [1] 何猛省, 高述春. 双曲时滞偏微分方程解的振动性质[J]. 科学通报, 1992, 37(13): 1163-1166.
- [2] 王培光, 葛渭高. 一类非线性偏泛函微分方程的强迫振动性[J]. 系统科学与数学, 2000, 20(4): 454-461.
- [3] 罗李平. 非线性中立双曲型偏泛函微分方程的振动性定理[J]. 数学杂志, 2010, 30(6): 1023-1028.
- [4] 林文贤. 高阶非线性中立型偏微分方程的振动性[J]. 生物数学学报, 2003, 18(1): 8-14.
- [5] 林文贤. 一类高阶中立型偏泛函微分方程的振动性[J]. 黑龙江大学学报: 自然科学版, 2006, 23(4): 25-30.
- [6] 林文贤. 一类中立型双曲微分方程的振动性定理[J]. 应用数学, 2009, 22(3): 514-519.
- [7] Vladimirov V S. Equations of Mathematical Physics[M]. Moscow: Nauka, 1981.

[责任编辑: 丁 蓉]