第 34 卷第 4 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 34 No. 4
2011 年 12 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Dec,2011

Möbius 变换中的 n 阶循环群判据

甘欣荣[1],钟寿国[2]

(1. 武汉科技大学理学院,湖北 武汉 430065)
(2. 武汉大学数学与统计学院,湖北 武汉 430072)

[摘要] 将 Möbius 变换为 n 阶循环映射的判别问题转化为二阶方阵的 n 阶乘幂的相应问题. 引入两个常数 Δ 和 δ 以及两个与 Δ、δ 相关的数列 Δ_n、δ_n,用数学归纳法证明了任何二阶方阵 n 次幂后的 4 个元素均可用 Δ_n 表达的公式、Δ_n 的递归公式. 最后得到 Möbius 变换为 n 阶循环映射的判据并给出其应用.

[关键词] 循环群,Möbius 变换,方阵,判据

[中图分类号] O152.3,O152.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)04-0017-04

n-Order Circle Group Criterion of Möbius Transformation

Gan Xinrong[1],Zhong Shouguo[2]

(1. Science College,Wuhan University of Science & Technology,Wuhan,430065,China)
(2. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University,Wuhan 430072,China)

Abstract: Translate the distinguish problem of n-order cyclic group in Möbius transformation (MT) into the corresponding problem of n-power of square matrix 2×2. Educe two constracts Δ and δ as well as two number seguences Δ_n,δ_n related to Δ,δ. Use mathematical induction to prove the formulas that all the 4 elements after n-power of arbitrary square matrix 2×2 can be represented by Δ_n,and the recursion formulas of Δ_n. Finaly, the criterion is obtained that MT becomes a n-order cyclic mapping, and its application is given.

Key words: circle group,Möbius transformation,square matrix,criterion

循环群在分析领域(如函数方程、微分(积分)方程)时有应用,特别是 Möbius 变换(简称 M 变换) $M(z)=\frac{(az+b)}{(cz+d)}(a,b,c,d\in\mathbf{C},z\in\mathbf{C}_\infty,ad-bc\neq 0)$ 全体形成一个 M 变换群[1-3]. M 变换 n 次迭代,在一定条件下形成 n 阶循环群,当 n 不大时其判据还可求出,但对一般的 n,其判别条件与结论尚未见诸文献讨论[4-9].

本文首先将上述问题转化为二阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 乘幂 A^n 的相应问题. 引进两个常数 $\Delta=a+d$、$\delta=bc-ad\neq 0$ 和两个与 Δ、δ 相关的递推公式 Δ_n、δ_n. 用数学归纳法证明了 A^n 中的 4 个元素 a_n、b_n、c_n、d_n 均可用 Δ_n 表达的公式、Δ_n 的递推公式. 最后得到 M 变换为 n 阶循环映射的判据及其应用. 本文还得到任意二阶方阵的递归公式(或等价地,M 变换 n 次迭代的递归式).

1 循环映射和问题的转化

定义 设 x 定义于变域 D 中的映射 $G(x)$: $D\to D$. 归纳地定义迭代映射:

$$G^1(x)=G(x),G^k(x)=G^{k-1}(G(x)),k=2,3,\cdots$$

若 $G(x)=x$(恒等映射),则称 $G(x)$ 为 1 阶循环映射; 若 $G(x)\neq x,G^2(x)\neq x,\cdots,G^{n-1}(x)\neq x$,而 $G^n(x)$

收稿日期: 2011-02-22.
基金项目: 湖北省教育厅科研计划重点项目(D20111110).
通讯联系人: 甘欣荣,副教授,研究方向: 常微分方程与数论. E-mail: lianghu561226@163.com

$=x$,则称 $G(x)$ 为 n 阶循环映射,记为 $G\in(C_y)_n(n\geqslant 1)$. 由 $I,G^1=G,G^2,\cdots,G^{n-1}$ 这 n 个映射构成 n 阶循环群,G 为生成元.

若 $G\in(C_y)_n(n\geqslant 2)$,$G^n=I$ 有逆元 $G^{-1}=G^{n-1}$,则关于未知函数 f 的方程 $Gf=g(f,g:D\to D)$ 惟一可解,$f=G^{n-1}g$. 特别地,$G^2=I$,G 为对合映射,若 $Gf=g$,则 $f=Gg$,这在数学中应用广泛.

对 M 变换,由文献[1-3]知,可用矩阵 A 表示,而 $M(z)$ 的 n 次迭代公式,即计算 A^n,要求 a、b、c、d 满足什么条件对任意自然数 n,能使 $M\in(C_y)_n$,即要找出 $\boldsymbol{A}^m\neq\delta_{m-1}\boldsymbol{I}_2$($\boldsymbol{I}_2$ 为二阶单位矩阵,$\delta_{m-1}\neq 0$,$m=1,2,\cdots,n-1$)而 $\boldsymbol{A}^n=\delta_{n-1}\boldsymbol{I}_2(\delta_{n-1}\neq 0)$ 之 a,b,c,d 的条件.

2 二阶方阵的幂之递推、递归公式

引理1 对任何正整数 n,记

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix},\tag{1}$$

则

$$a_{n+1}=a\Delta_n+\delta_n,b_{n+1}=b\Delta_n,c_{n+1}=c\Delta_n,d_{n+1}=d\Delta_n+\delta_n,\tag{2}$$

$$\Delta_n=\Delta\Delta_{n-1}+\delta_{n-1},\ \delta_n=\delta\Delta_{n-1},\tag{3}$$

其中已记 $\Delta_1=\Delta=a+d$,$\delta_1=\delta=bc-ad(\neq 0)$,约定

$$\Delta_0=1,\delta_0=0.\tag{4}$$

证明 $n=1$ 时,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{2}=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\Delta+\delta & b\Delta \\ c\Delta & d\Delta+\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\Delta_1+\delta_1 & b\Delta_1 \\ c\Delta_1 & d\Delta_1+\delta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2\end{pmatrix},$$

则(2)得证. $\Delta_1=\Delta\cdot 1+0=\Delta\Delta_0+\delta_0$,$\delta_1=\delta=\delta\cdot 1=\delta\Delta_0$,从而(3)成立.

设(2),(3)当 $n=k$ 时成立,则 $n=k+1$ 时,因为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{k+2}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{k+1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\Delta_k+\delta_k & b\Delta_k \\ c\Delta_k & d\Delta_k+\delta_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a^2\Delta_k+a\delta_k+bc\Delta_k & ab\Delta_k+b\delta_k+bd\Delta_k \\ ac\Delta_k+cd\Delta_k+c\delta_k & bc\Delta_k+d^2\Delta_k+d\delta_k\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a[(a+d)\Delta_k+\delta_k]+\delta\Delta_k & b[(a+d)\Delta_k+\delta_k] \\ c[(a+d)\Delta_k+\delta_k] & d[(a+d)\Delta_k+\delta_k]+\delta\Delta_k\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a(\Delta\Delta_k+\delta_k)+\delta\Delta_k & b(\Delta\Delta_k+\delta_k) \\ c(\Delta\Delta_k+\delta_k) & d(\Delta\Delta_k+\delta_k)+\delta\Delta_k\end{pmatrix},\tag{5}$$

记 $\Delta_{k+1}=\Delta\Delta_k+\delta_k$,$\delta_{k+1}=\delta\Delta_k$,则(5)为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{k+2}=\begin{pmatrix} a\Delta_{k+1}+\delta_{k+1} & b\Delta_{k+1} \\ c\Delta_{k+1} & d\Delta_{k+1}+\delta_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{k+2} & b_{k+2} \\ c_{k+2} & d_{k+2}\end{pmatrix},$$

因此 $n=k+1$ 的情形下公式(2)、(3)得到证明.

引理2 对任何自然数 n,$M(z)$ 的奇次和偶次迭代的 Δ_n 递归公式分别为:

$$\Delta_{2n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n-k-1}^{k}\,\Delta^{2n-2k-1}\delta^k,\tag{6}$$

$$\Delta_{2n}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n-k}^{k}\,\Delta^{2n-2k}\delta^k.\tag{7}$$

注1 若(6)、(7)成立,注意到 Δ 和 δ 分别为 a、b、c、d 的一次和二次齐式,从而(6)、(7)分别为 a、b、c、d 的 $2n-1$ 次及 $2n$ 次齐式;(6)的首项系数 C_{2n-1}^0 及(7)的首末两项系数 C_{2n}^0、C_n^n 对任何 n 均为1;(6)、(7)中关于 Δ、δ 的系数全为正整数.

证明 $n=1$ 时,由(3),$\Delta_1=\Delta\Delta_0+\delta_0=\Delta\cdot 1+0=\Delta$,$\Delta_2=\Delta\Delta_1+\delta_1=\Delta\Delta+\delta=\Delta^2+\delta$. 另由(6),

$\Delta_1 = C_1^0 \Delta = \Delta$. 由(7),$\Delta_2 = C_2^0 \Delta^2 \delta^0 + C_1^1 \Delta^0 \delta^1 = \Delta^2 + \delta$. 于是 $n = 1$ 得证.

设(6)、(7)对任何自然数 n 成立,由(3)

$$\Delta_{2n+1} = \Delta\Delta_{2n} + \delta_{2n} = \Delta\Delta_{2n} + \delta\Delta_{2n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^{k} \Delta^{2n-2k+1}\delta^{k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-k-1}^{k} \Delta^{2n-2k-1}\delta^{k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^{k} \Delta^{2n-2k+1}\delta^{k} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n-k}^{k-1} \Delta^{2n-2k+1}\delta^{k} = \Delta^{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_{2n-k}^{k} + C_{2n-k}^{k-1}) \Delta^{2n-2k+1}\delta^{k} =$$

$$C_{2n+1}^{0} \Delta^{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n-k+1}^{k} \Delta^{2n-2k+1}\delta^{k} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n-k+1}^{k} \Delta^{2n-2k+1}\delta^{k}.$$

这正是(6)右边用 $n+1$ 替换 n 的结果. 再看 Δ_{2n+2},由(3)并利用刚才证出 Δ_{2n+1} 的结果,有

$$\Delta_{2n+2} = \Delta\Delta_{2n+1} + \delta_{2n+1} = \Delta\Delta_{2n+1} + \delta\Delta_{2n} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n-k+1}^{k} \Delta^{2n-2k+2}\delta^{k} + \sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^{k} \Delta^{2n-2k}\delta^{k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n-k+1}^{k} \Delta^{2n-2k+2}\delta^{k} + \sum_{k=1}^{n+1} C_{2n-k+1}^{k-1} \Delta^{2n-2k+2}\delta^{k} =$$

$$\Delta^{2n+2} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n-k+1}^{k} \Delta^{2n-2k+2}\delta^{k} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n-k+1}^{k-1} \Delta^{2n-2k+2}\delta^{k} + C_{n}^{n}\delta^{n+1} =$$

$$\Delta^{2n+2} + \sum_{k=1}^{n} (C_{2n-k+1}^{k} + C_{2n-k+1}^{k-1}) \Delta^{2n-2k+2}\delta^{k} + \delta^{n+1} =$$

$$C_{2n+2}^{0} \Delta^{2n+2} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n-k+2}^{k} \Delta^{2n-2k+2}\delta^{k} + C_{n+1}^{n+1}\delta^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{2n-k+2}^{k} \Delta^{2n-2k+2}\delta^{k},$$

这正是(7)右边 n 被 $n+1$ 代替的结果. 证毕.

注 2 由(2)、(3)可见,$a_{n+1} = a\Delta_n + \delta\Delta_{n-1}$,$b_{n+1} = b\Delta_n$,$c_{n+1} = c\Delta_n$,$d_{n+1} = d\Delta_n + \delta\Delta_{n-1}$,而由引理 2 已算出 Δ_n 用 Δ、δ 表达(进而用 a、b、c、d 表达),任何二阶方阵的幂 A^{n+1} 可不通过矩阵乘法而通过公式直接求得,这等价于 $M^{n+1}(z)$ 的 4 个系数可直接获取.

3 M(z) ∈ (C$_y$)$_n$ 的判据

定理 1 (i) $M \in (C_y)_1 \Leftrightarrow a = d \neq 0, b = 0, c = 0$(此条件简称 M_1 条件或 M_1).

(ii) $M \in (C_y)_{n+1} (n \geqslant 1) \Leftrightarrow M_1$ 不成立,$\Delta_1 = \Delta \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \cdots, \Delta_{n-1} \neq 0$,而 $\Delta_n = 0$(此条件简称 M_{n+1} 条件或 M_{n+1}).

证明 (i)的证明显然. 现来证明(ii).

当 $n = 1$ 即 $n+1 = 2$ 时,先证必要性. 设 $M \in (C_y)_2$,由定义,$M \neq I, M^2 = I$. 当 $M \neq I$,由(i)M_1 不成立(即 $a = d \neq 0, b = 0, c = 0$ 至少有一个条件不成立). 又由引理 1,

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\Delta + \delta & b\Delta \\ c\Delta & d\Delta + \delta \end{pmatrix}, \tag{8}$$

因此时 $M^2 = I$,M^2 仍为 M 映射[1-3],由(i)对于 M^2 而言满足 M_1 条件,即

$$0 = a_2 - d_2 = (a-d)\Delta, \quad 0 = b_2 = b\Delta, \quad 0 = c_2 = c\Delta \tag{9}$$

成立. 而上述已证 M_1 不成立,即或者 $a \neq d$,或者 $b \neq 0$,或者 $c \neq 0$. 若 $a \neq d$,由(9)第一式证出 $\Delta = 0$;若 $b \neq 0$,由(9)第二式证出 $\Delta = 0$;若 $c \neq 0$,由(9)第三式证出 $\Delta = 0$,因此无论哪种情形都有 $\Delta = 0$. $n = 1$ 的必要性得证.

次证 $n = 1$ 的充分性,即已知 M_1 不成立,$\Delta = 0$. 由(i)M_1 不成立,必有 $M \neq I$,又由(8),当 $\Delta = 0$ 时,$\boldsymbol{A}^2 = \delta \boldsymbol{I}_2 (\delta \neq 0)$,从而 $M^2 = I$,由定义,$M \in (C_y)_2$. $n = 1$ 的充分性得证.

设 $n \leqslant k$ 命题成立,当 $n = k+1$ 时,即 $n+1 = k+2$,先证必要性. 因此时 $M \in (C_y)_{k+2}$,由定义,$M \neq I$,根据(i)知,M_1 条件不成立. 再由定义,此时 $M^2 \neq I$,刚才已证了 M_1 不成立,那么这时必有 $\Delta_1 = \Delta \neq 0$,否则,若 $\Delta = 0$,由归纳假设 $M \in (C_y)_2$,与假设矛盾. 现在已证了 M_1 不成立,$\Delta \neq 0$,由于 $M^3 \neq I$,此时必有 $\Delta_2 \neq 0$,否则若 $\Delta_2 = 0$,由归纳假设 $M \in (C_y)_3$,如此等等,当已证了 M_1 不成立,$\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \cdots, \Delta_{k-1} \neq 0$,由于 $M^{k+1} \neq I$,必有 $\Delta_k \neq 0$,否则 $\Delta_k = 0$,由归纳假设 $M \in (C_y)_{k+1}$,与假设矛盾. 又由定义,此时要求

$M^{k+2}=I$,由(i)对 M^{k+2} 满足 M_1 条件,再由引理 1 有

$$0=a_{k+2}-d_{k+2}=(a-d)\Delta_{k+1},\quad 0=b_{k+2}=b\Delta_{k+1},\quad 0=c_{k+2}=c\Delta_{k+1}.$$

由已知 $a=d\neq 0$,$b=0$,$c=0$ 至少有一个不成立,与证 $n=1$ 必要性证法类似,无论哪种情形,由我们刚才所述关于 M^{k+2} 的 M_1 条件都得到 $\Delta_{k+1}=0$,可见,我们已得 M_{k+2} 条件,$n=k+1$ 的必要性得证.

再证 $n=k+1$ 的充分性.由充分性条件 M_{k+2},M_1 不成立及 $\Delta_1\neq 0$,$\Delta_2\neq 0$,$\cdots$,$\Delta_k\neq 0$ 和归纳假设必有 $M^m\neq I(m=1,2,\cdots,k+1)$,再由引理 1 知

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k+2}=\begin{pmatrix} a\Delta_{k+1}+\delta_{k+1} & b\Delta_{k+1} \\ c\Delta_{k+1} & d\Delta_{k+1}+\delta_{k+1} \end{pmatrix}=\Delta_{k+1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\delta\Delta_k\boldsymbol{I}_2,$$

因此时 $\Delta_{k+1}=0$,$\Delta_k\neq 0$,$\delta\neq 0$,从而 $\boldsymbol{A}^{k+2}=\delta\Delta_k\boldsymbol{I}_2$,此即 $M^{k+2}=\boldsymbol{I}_2$,于是 $M\in(C_y)_{k+2}$.

充分性得证,证毕.

当 n 增大时,定理 1 之(ii)的条件增多,Δ_n 的次数增高.

3　应用

设未知函数 $f(x)$ 的变元含 n 阶循环映射 $G(x)$ 的函数方程为

$$p_0(x)f(x)+p_1(x)f(G(x))+\cdots+p_{n-1}(x)f(G^{n-1}(x))=q(x),x\in D,\tag{10}$$

其中 q,f,G,$p_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 均为 $D\rightarrow D$ 且均 $\in C(D)$.当(10)中 x 依次用 $G(x)$,$G^2(x)$,$\cdots$,$G^n(x)$ 取代,并仍依 $f(x)$,$f(G(x))$,$\cdots$,$f(G^{n-1}(x))$ 的顺序排列得到关于 $f(x)$,$f(G(x))$,$\cdots$,$f(G^{n-1}(x))$ 的 n 元线性方程组,设其系数行列式不为零,则 $f(x)$ 必可从此方程组惟一解出.一般地,$f(x)$ 用 $F(\cdots)$ 取代,而 $F(\cdots)$ 中含未知函数的微分或积分,就得到相应微分或积分方程.关键是判定 G 是否 $\in(C_y)_n$,对 M 变换而言,理论上已完全解决.

利用定理 1 可知 $M(z)=\dfrac{(az+b)}{(cz-a)}(a^2+bc\neq 0)\in(C_y)_2$.特别常应用 $M(z)=-z-b$,$M(z)=-z\in(C_y)_2$.$M(z)=\dfrac{(z-1)}{z}\in(C_y)_3$,由 z、$\dfrac{(z-1)}{z}$、$\dfrac{1}{(1-z)}$ 构成三阶循环群.$M(z)=\dfrac{(z-1)}{(z+1)}\in(C_y)_4$,由 z、$\dfrac{(z-1)}{(z+1)}$、$\dfrac{-1}{z}$,$\dfrac{(1+z)}{(1-z)}$ 构成四阶循环群.

[参考文献]

[1] Ahlfors L V. Complex Analysis [M]. 3rd ed. New York: McG Rraw-Hill, 1979.

[2] 李国平,郭友中,陈银通. 自守函数和闵可夫斯基函数 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.

[3] 路见可,钟寿国,刘士强. 复变函数 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009.

[4] 华罗庚,万哲先. 典型群 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1963.

[5] 李尚志. 典型群的子群结构 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1998.

[6] 张远达. 有限群的构造 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1987.

[7] Mills W H. On cyclic groups of Mobius transformations [J]. Math Scand, 1973(33): 250-260.

[8] 赵文强,李嘉. Markov 积分半群的生成元 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2007,32(5): 14-17.

[9] 游兴中. $GL(n,Q)$ 的有限群的阶的一个注记 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2008,45(3): 475-477.

[责任编辑: 丁　蓉]