亚纯函数的 Picard 例外集

王品玲，王立庆

(上海立信会计学院数学与信息学院，上海 201620)

[摘要] 证明了如果 $f(z)$ 是超越亚纯函数，满足 $\delta(\infty,f)>0$，n,k 为正整数且满足 $n\geqslant k+2$，则存在一列趋于 ∞ 的小圆盘，使得 $(f^n)^{(k)}$ 在这列小圆盘外取任何有穷非零复数无穷多次.

[关键词] 整函数，亚纯函数，Picard 例外集，ε 集

[中图分类号] O174.5 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)04-0026-07

Picard Exceptional Sets for Meromorphic Functions

Wang Pinling，Wang Liqing

(School of Mathematics and Information，Shanghai Lixin University of Commerce，Shanghai 201620，China)

Abstract: In this paper we prove that if $f(z)$ is a transcendental meromorphic function satisfying $\delta(\infty,f)>0$, and n,k are positive integers satisfying $n\geqslant k+2$, then there exists a sequence of small disks whose centers tend to infinity such that $(f^n)^{(k)}$ takes each finite nonzero complex value infinitely times outside these disks.

Key words: entire function，meromorphic function，Picard set，ε set

设 $f(z)$ 是开平面中的超越亚纯函数，用 $S(r,f)$ 表示量：当 f 为有穷级时，$S(r,f)=O(\log r)$；当 f 为无穷级时，$S(r,f)=O(\log rT(r,f))$，至多可能除去一个 r 的测度为有限的集合. 定义平面上可数多个小圆盘的并集为一个 ε 集，是指这些圆盘均不含原点($z=0$)，且这些圆盘在原点所对角总和是有限的. 用记号“$r\to\infty$，n. e.”表示“$r\to\infty$ 时可能除去一个有限测度集 E”. 用“在 $S_M\leqslant r\leqslant R_M$ 内 n. e.”表示“对所有满足 $S_M\leqslant r\leqslant R_M$ 内的 r，可能除去有限测度集 β_M，且 $\sum\limits_{M=1}^{\infty}\beta_M<\infty$”.

根据著名的 Picard 定理[1]，每个超越亚纯函数取 $\bar{C}=C\cup\infty$ 中的值无穷次，至多有两个例外. 此定理在某种程度上可以改进，确切地讲存在无穷点集 E，使得对任一超越亚纯函数 $f(z)$，$f(z)$ 在 $C\backslash E$ 取任意非零复数无穷次，像这样的集合 E，称为 Picard 例外集.

Hayman[2] 和 Clunie[3] 分别就 $n\geqslant 3$ 和 $n=2$ 得到下列结果.

定理 1 设 $f(z)$ 是整函数，$F(z)=f^n$，如果 $n\geqslant 2$，则 F' 取任意复数 $w\in C$ 无穷多次，可能除去 $w=0$.

Anderson James M，Baker Irvine N 和 Clunie James G[4] 得到下列结果.

定理 2 设 f 为超越整函数，$F=f^n(n\geqslant 3,n$ 为自然数)，$E=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是复平面上的无穷点集，且满足 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|>q>1$($n$ 为正整数)，则 F' 在 $C\backslash E$ 中取任意非零复数 $w\in C$ 无限多次.

Langley James K[5] 将上述结论推广到 E 含有无穷多个小圆盘.

定理 3 设复数序列 $\{a_n\}$ 和正数序列 $\{\rho_n\}$ 满足

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>q>1,$$

收稿日期：2011-02-22.

基金项目：数学与应用数学学科建设上海市财政支持项目(1130IA15)、统计学学科建设上海市财政支持项目(1131IA09).

通讯联系人：王品玲，博士，副教授，研究方向：复分析及其应用. E-mail：wangpinling@lixin.edu.cn

$$\log\frac{1}{\rho_n}>\frac{q^{\frac{1}{4}}+1}{q^{\frac{1}{4}}-1}\frac{8}{\log q}(\log|a_n|)^2,\ n=1,2,3,\cdots.$$

又设f为超越整函数，$F=f^n$($n\geqslant 3$为自然数)，则对任何$b\in C$，$b\neq 0$，$F'-b$在$\cup_{n=1}^{\infty}B(a_n,\rho_n)$之外有无穷多个零点，其中$B(a_n,\rho_n)=\{z:|z-a_n|<\rho_n\}$.

陈怀惠[6] 证明了下列结果.

定理4 设f为超越整函数，且f的零点重数至少为$k+1$(k为正整数)，则$f^{(k)}$取每个非零有限复数无限次.

王品玲[7] 证明了下列两个结果.

定理5 设f为超越整函数，且零点重数至少为$k+2$(k为正整数)，$E=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$是复平面中的无穷点集，满足$\left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right|>q>1$，则$f^{(k)}$在$C\backslash E$中取每个非零有限复数$b$无穷次.

定理6 设复数序列$\{a_n\}$和正数序列$\{\rho_n\}$满足

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>q>1,$$

$$\log\frac{1}{\rho_n}>\frac{q^{\frac{1}{4}}+1}{q^{\frac{1}{4}}-1}\frac{(k+3)\beta(1+o(1))}{\log q}(\log|a_n|)^2,\ n=1,2,3,\cdots.$$

又设f为超越整函数，且零点重数至少为$k+2$(k为正整数)，则对任何$b\in C$，$b\neq 0$，$f^{(k)}-b$在$\cup_{n=1}^{\infty}B(a_n,\rho_n)$之外有无穷多个零点，其中$\beta>1$，$B(a_n,\rho_n)=\{z:|z-a_n|<\rho_n\}$.

王跃飞和方明亮[8] 证明了下列结果.

定理7 设f是超越亚纯函数，n，k为正整数且$n\geqslant k+1$，则$(f^n)^{(k)}$取任何非零有限复数无限次.

本文将上述结果推广到例外集的情形，得到下列结果.

定理 设f是超越亚纯函数，满足$\delta(\infty,f)=1-\alpha>0$，$n$，$k$为正整数且$n\geqslant k+2$. 又存在常数$\mu>0$，$q>1$，使复数序列$\{a_n\}$和正数序列$\{\rho_n\}$满足

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>q>1,\{z:|z-a_n|<\mu|a_n|\}\cap\{z:f(z)=\infty\}=\varnothing,$$

$$\log\frac{1}{\rho_n}>\frac{1}{(1-d)^2}\left\{\frac{q^{\frac{1}{4}}+1}{q^{\frac{1}{4}}-1}+\frac{\log\frac{4q^{\frac{3}{8}}}{\mu}}{\log q^{\frac{3}{8}}}\right\}\frac{2n(k+1+2\varepsilon)}{(k-o(1))\log q}(\log|a_n|)^2,$$

其中$0<d=\sqrt{\frac{(\alpha+\varepsilon)(n+k)}{k-o(1)}}<1$，$\varepsilon$为任意小正数，则对任何$b\in C$，$b\neq 0$，$(f^n)^{(k)}-b$在$\cup_{n=1}^{\infty}B(a_n,\rho_n)$之外有无穷多个零点.

1 引理

引理1[5] 设$p(z)$是一个k次多项式，$b_1,b_2,\cdots,b_k$是$p(z)$在$|z|<R_0$的全部零点，则对于$|z|=R\geqslant R_0$，

$$\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right|>\frac{k}{2R}.$$

引理2[5] 设$h(z)$是$|z|\leqslant R$上无零点的正则函数，且在$|z|=R$上有$|\log|h(z)||\leqslant M$，则对于$|z|=r<R$，有

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right|\leqslant\frac{2MR}{(R-r)^2}.$$

引理3 设f是超越亚纯函数，n，k为正整数且$n\geqslant k+2$，则

$$kT(r,f)<N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right)-\hat{N}\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k+1)}}\right)+S(r,f),$$

其中 $\hat{N}\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k+1)}}\right)$ 表示 $(f^n)^{(k+1)}$ 的零点但非 f 零点的密指量.

证明　由 Milloux 不等式得

$$T(r,f^n)<\overline{N}(r,f^n)+N\left(r,\frac{1}{f^n}\right)+N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k+1)}}\right)+S(r,f^n).$$

再由 $\overline{N}(r,f^n)=\overline{N}(r,f)$ 和

$$N\left(r,\frac{1}{f^n}\right)-N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k+1)}}\right)<(n-k-1)N\left(r,\frac{1}{f}\right)-\hat{N}\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k+1)}}\right)+S(r,f),$$

得

$$nT(r,f)<\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f^n}\right)+N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k+1)}}\right)+S(r,f)<$$
$$T(r,f)+(n-k-1)T(r,f)+N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right)-\hat{N}\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k+1)}}\right)+S(r,f),$$

从而

$$kT(r,f)<N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right)-\hat{N}\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k+1)}}\right)+S(r,f).$$

引理4[3]　设 f 是超越亚纯函数,满足 $T(r,f)=O((\log r)^2)$,则当 $z=re^{i\theta}$ 在包围 f 零点的一个 ε 集之外趋于无穷时,有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{T(r,f)}\geqslant\delta(\infty,f).$$

引理5　设 f 是有穷级超越亚纯函数,满足 $\delta(\infty,f)=1-\alpha>0$,$n,k$ 为正整数且 $n\geqslant k+2$,ε 为任意小正数,满足 $\sqrt{\frac{(\alpha+\varepsilon)(n+k)}{(k-o(1))}}<1$,则 $\delta(\infty,(f^n)^{(k)})>0$.

证明　由 $\delta(\infty,f)=1-\alpha>0$ 及定理的假设得

$$N(r,(f^n)^{(k)}-1)=N(r,(f^n)^{(k)})=(n+k)N(r,f)\leqslant(n+k)(\alpha+\varepsilon)T(r,f).\tag{1}$$

由引理3得

$$N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right)>N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right)-\hat{N}\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k+1)}}\right)+S(r,f)>kT(r,f).\tag{2}$$

由(1)、(2)及第一基本定理得

$$T(r,(f^n)^{(k)}-1)-N(r,(f^n)^{(k)}-1)=N\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right)+m\left(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right)-$$
$$N(r,(f^n)^{(k)}-1)+O(1)>kT(r,f)-(n+k)(\alpha+\varepsilon)T(r,f)+S(r,f),$$

且 $T(r,(f^n)^{(k)}-1)=T(r,(f^n)^{(k)})=(n+k)T(r,f)$,从而

$$\delta(\infty,(f^n)^{(k)})>\frac{[k-(n+k)(\alpha+\varepsilon)]T(r,f)}{T(r,(f^n)^{(k)}-1)}+\frac{S(r,f)}{T(r,(f^n)^{(k)}-1)}>$$
$$\frac{[k-(n+k)(\alpha+\varepsilon)]}{n+k}+\frac{S(r,f)}{(n+k)T(r,f)}.$$

因为 f 是有穷级超越亚纯函数,且 $\sqrt{\frac{(\alpha+\varepsilon)(n+k)}{(k-o(1))}}<1$,则 $\delta(\infty,(f^n)^{(k)}-1)>0$,从而引理得证.

2　定理的证明

不失一般性,令 $b=1$. 假设定理的结论不成立,则存在某个超越亚纯函数 f,使得 $(f^n)^{(k)}-1$ 在 $\cup_{n=1}^{\infty}B(a_n,\rho_n)=\cup_{n=1}^{\infty}\{z:|z-a_n|<\rho_n\}$ 之外只有有限个零点. 其中复数序列 $\{a_n\}$ 和正数序列 $\{\rho_n\}$ 满足定理的假设. 定义序列 p_n,q_n,x_n,v_n 如下(均计重数):

p_n 表示 $(f^n)^{(k)}-1$ 在圆盘 $B_n=\{z:|z-a_n|<\rho_n\}$ 内零点的个数;

q_n 表示 $(f^n)^{(k+1)}$ 在圆盘 $D_n=\{z:|z-a_n|<(2e+1)\rho_n\}$ 内零点但非 f 零点的个数;

x_n 表示$(f^n)^{(k)}$ 在 $E_n=\{z:q^{\frac{-1}{16}}|a_n|<|z|<q^{\frac{1}{16}}|a_n|\}$ 中极点的个数；

$v_n=p_n-q_n$.

现设 R 满足

$$q^{\frac{3}{8}}|a_n|<R<q^{\frac{-1}{16}}|a_{n+1}|,S(R,f)=o(T(R,f)).\tag{3}$$

由引理 3 及[7](P.964 – P.965)可推得

$$kT(R,f)\leqslant\sum_{m=m_0}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|}+o\left(\sum_{m=m_0}^{n}(p_m+q_m)\right)+O(\log R)$$

和

$$\sum_{m=m_0}^{n}p_m=O(T(R,f))+o(T(R,f)),\sum_{m=m_0}^{n}q_m=O(T(R,f))+o(T(R,f)),$$

因此当 R 满足(3)时，有

$$T(R,f)\leqslant\frac{1}{k-o(1)}\sum_{m=m_0}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|}.\tag{4}$$

取 $0<\alpha<1$ 使得当 $\varepsilon>0$ 充分小时，$d=\sqrt{\frac{(\alpha+\varepsilon)(n+k)}{(k-o(1))}}<1$. 现定义正整数集 $E=\left\{n:v_n>\frac{1}{d}x_n\right\}$，当 R 满足(3)时，有

$$\sum_{m=m_0}^{n}x_m\log\frac{R}{|a_m|}\leqslant N(R,(f^n)^{(k)}).$$

而

$$N(R,(f^n)^{(k)})\leqslant(k+n)N(R,f)\leqslant(\alpha+\varepsilon)(n+k)T(R,f),\tag{5}$$

由(4)，(5)及上述推导得

$$\sum_{m=m_0}^{n}x_m\log\frac{R}{|a_m|}\leqslant N(R,(f^n)^{(k)})<\frac{(\alpha+\varepsilon)(n+k)}{(k-o(1))}\sum_{m=m_0}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|}=d^2\sum_{m=m_0}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|},$$

所以

$$\sum_{m=m_0}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|}-\sum_{\substack{m=m_0\\m\in E}}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|}=\sum_{\substack{m=m_0\\m\notin E}}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|}\leqslant$$
$$\frac{1}{d}\sum_{m=m_0}^{n}x_m\log\frac{R}{|a_m|}<d\sum_{m=m_0}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|},$$

于是

$$(1-d)\sum_{m=m_0}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|}<\sum_{\substack{m=m_0\\m\in E}}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|},$$

从而由(4)得

$$T(R,f)\leqslant\frac{1}{(k-o(1))(1-d)}\sum_{\substack{m=m_0\\m\in E}}^{n}v_m\log\frac{R}{|a_m|}.\tag{6}$$

因为 f 是超越亚纯函数，由(6)可知，集合$\{v_m:m\in E\}$ 必含有穷多个不小于 1 的元素. 设

$$v_M=\max\{v_m:m_0\leqslant m\leqslant M,m\in E\},\tag{7}$$

显然 $v_M\geqslant 1$. 以下我们总假设 M 满足(7)，并总假定 R 满足(3)，则由(6)和 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>q>1$ 容易推得，在 $q^{\frac{3}{8}}|a_M|<R<q^{\frac{-1}{16}}|a_{M+1}|$ 内 $n.e.$ 有

$$T(R,f)\leqslant\frac{1}{(k-o(1))(1-d)}\frac{v_M}{\log q}(\log R)^2.\tag{8}$$

现设$(f^n)^{(k)}-1$ 在 B_M 内零点为 $z_1,z_2,\cdots,z_{p_M}$，在 E_M 内的极点为 $w_1,w_2,\cdots,w_{x_M}$，又令 $G_M(z)=\prod_{i=1}^{p_M}(z-$

$z_i)$,$H_M(z) = \prod_{i=1}^{x_M}(z-w_i)$,

$$B(z) = \frac{H_M(z)}{G_M(z)}((f^n)^{(k)} - 1). \tag{9}$$

由(9) 可知,$B(z)$ 在 E_M 内解析且无零点.

下面在 $|z-a_M| \leqslant 4$ 内来估计 $|\log|B(z)||$,在 $|z| < r_M = q^{\frac{3}{8}}|a_M|$ 内对 $B(z)$ 应用 Poisson-Jensen 公式,则有

$$|\log|B(z)|| \leqslant \frac{r_M+|z|}{r_M-|z|}\left\{m(r_M,B) + m\left(r_M,\frac{1}{B}\right)\right\} + \sum \log^+\left|\frac{r_M^2-\bar{\xi}z}{r_M(\xi-z)}\right|,$$

其中 $\sum$ 表示对 $B(z)$ 在 $|z| < r_M = q^{\frac{3}{8}}|a_M|$ 内的所有零点和极点求和. 而

$$m(r_M,B) + m\left(r_M,\frac{1}{B}\right) \leqslant m(r_M,H_M) + m\left(r_M,\frac{1}{H_M}\right) + m(r_M,(f^n)^{(k)} - 1) +$$

$$m\left(r_M,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right) + m(r_M,G_M) + m\left(r_M,\frac{1}{G_M}\right). \tag{10}$$

由集合 E 的定义,当 $M \in E$ 有 $x_M < p_M$,故

$$m(r_M,H_M) + m(r_M,G_M) < (p_M + x_M)\log 2r_M \leqslant 2p_M\log(2r_M). \tag{11}$$

又因为(8) 在 $q^{\frac{3}{8}}|a_M| < R < q^{\frac{-1}{16}}|a_{M+1}|$ 内 $n.e.$ 成立,因此设存在 r'_M 满足 $q^{\frac{3}{8}}|a_M| \leqslant r'_M \leqslant q^{\frac{3}{4}}|a_M|$,使得(8) 在 $r = r'_M$ 成立,故有

$$m(r_M,(f^n)^{(k)} - 1) + m\left(r_M,\frac{1}{(f^n)^{(k)}-1}\right) \leqslant 2T(r_M,(f^n)^{(k)} - 1) + O(1) <$$

$$2n(k+1+\varepsilon)T(r'_M,f) \leqslant \frac{2n(k+1+\varepsilon)}{(k-o(1))(1-d)}\frac{p_M}{\log q}(\log|a_M|)^2. \tag{12}$$

容易推得,当 M 充分大且 z 满足 $|z-a_M| \leqslant 4$ 时,有

$$\frac{r_M+|z|}{r_M-|z|} \leqslant \frac{q^{\frac{1}{4}}+1}{q^{\frac{1}{4}}-1}. \tag{13}$$

设 ξ 是 $B(z)$ 在 $|z| < r_M = q^{\frac{3}{8}}|a_M|$ 内的任一零点或极点,则存在 $0 < \mu < 1$,使得 $|\xi - z| \geqslant |\xi - a_M| + |z - a_M| \geqslant \mu|a_M| - 4 \geqslant \frac{\mu}{2}|a_M|$,故

$$\sum_{\xi}\log^+\left|\frac{r_M^2-\bar{\xi}z}{r_M(\xi-z)}\right| \leqslant \left[n\left(r_M,\frac{1}{B}\right) + n(r_M,B)\right]\log\frac{4q^{\frac{3}{8}}}{\mu},$$

而

$$N(q^{\frac{3}{4}}|a_M|,B) \geqslant \int_{q^{\frac{3}{8}}|a_M|}^{q^{\frac{3}{4}}|a_M|}\frac{n(t,B)-n(0,B)}{t}\mathrm{d}t + n(0,B)\log(q^{\frac{3}{4}}|a_M|) \geqslant n(q^{\frac{3}{8}}|a_M|,B)\log q^{\frac{3}{8}},$$

$$N\left(q^{\frac{3}{4}}|a_M|,\frac{1}{B}\right) \geqslant n\left(q^{\frac{3}{8}}|a_M|,\frac{1}{B}\right)\log q^{\frac{3}{8}}.$$

类似于(12) 的推导,取 $r'_M = q^{\frac{3}{4}}|a_M|$,使(8) 在 $r'_M = q^{\frac{3}{4}}|a_M|$ 成立,有

$$\left[n\left(q^{\frac{3}{8}}|a_M|,\frac{1}{B}\right) + n(q^{\frac{3}{8}}|a_M|,B)\right]\log\frac{4q^{\frac{3}{8}}}{\mu} \leqslant \left[N\left(q^{\frac{3}{4}}|a_M|,\frac{1}{B}\right) + N(q^{\frac{3}{4}}|a_M|,B)\right]\frac{\log\frac{4q^{\frac{3}{8}}}{\mu}}{\log q^{\frac{3}{8}}} \leqslant$$

$$\frac{2n(k+1+\varepsilon)}{(k-o(1))(1-d)}\frac{p_M}{\log q}\frac{\log\frac{4q^{\frac{3}{8}}}{\mu}}{\log q^{\frac{3}{8}}}(\log|a_M|)^2.$$

故从(10),(11),(12) 和(13) 得,当 z 满足 $|z-a_M| \leqslant 4$ 时,有

$$|\log|B(z)||\leqslant\frac{1}{1-d}\left\{\frac{q^{\frac{1}{4}}+1}{q^{\frac{1}{4}}-1}\frac{\log\frac{4q^{\frac{3}{8}}}{\mu}}{\log q^{\frac{3}{8}}}\right\}\frac{2n(k+1+2\varepsilon)}{(k-o(1))\log q}p_M(\log|a_n|)^2. \tag{14}$$

现考虑圆盘 $|z-a_M|<(2e+1)\rho_M$，由 Boutroux-Cartan 定理，至多除去总直径不超过 $2e\rho_M$ 的 x_M 个圆盘后，有

$$|H(z)|>(\rho_M)^{x_M}, \tag{15}$$

故必存在 α_M 满足 $\rho_M<\alpha_M\leqslant(2e+1)\rho_M$，使得(15) 在圆周 C_{α_M}：$|z-\alpha_M|=\alpha_M$ 上成立. 又当 z 满足 $|z-\alpha_M|=(2e+1)\rho_M$ 时，有 $|z-z_i|\leqslant(2e+1)\rho_M$，从而

$$\log|G_M(z)|\leqslant\sum_{i=1}^{p_M}\log|z-z_i|\leqslant\sum_{i=1}^{p_M}\log(2e+2)\rho_M=p_M\log 2(e+1)-p_M\log\frac{1}{\rho_M}, \tag{16}$$

故当 $z\in\alpha_M$ 时，由(14)，(15) 和(16) 得

$$\log|(f^n)^{(k)}-1|=\log|B(z)|+\log|G_M(z)|-\log|H_M(z)|<$$

$$\frac{1}{1-d}\left\{\frac{q^{\frac{1}{4}}+1}{q^{\frac{1}{4}}-1}+\frac{\log\frac{4q^{\frac{3}{8}}}{\mu}}{\log q^{\frac{3}{8}}}\right\}\frac{2n(k+1+2\varepsilon)}{(k-o(1))\log q}p_M(\log|a_M|)^2-(p_M-x_M)\log\frac{1}{\rho_M}.$$

但当 $M\in E$ 时，$p_M\geqslant v_M\geqslant\frac{1}{d}x_M$，则 $p_M-x_M\geqslant(1-d)p_M$，代入上式并利用定理的假设得

$$\log|(f^n)^{(k)}-1|=\log|B(z)|+\log|G_M(z)|-\log|H_M(z)|<$$

$$\frac{1}{1-d}\left\{\frac{q^{\frac{1}{4}}+1}{q^{\frac{1}{4}}-1}+\frac{\log\frac{4q^{\frac{3}{8}}}{\mu}}{\log q^{\frac{3}{8}}}\right\}\frac{2n(k+1+2\varepsilon)}{(k-o(1))\log q}p_M(\log|a_n|)^2-(1-d)p_M\log\frac{1}{\rho_M}<0,$$

故当 $z\in C_{\alpha_M}$ 时，$\mathrm{Re}(f^n)^{(k)}>0$，由辐角原理，我们知道$(f^n)^{(k)}$ 在 $|z-a_M|<\alpha_M$ 内极点与零点的个数相同，但由定理的假设$(f^n)^{(k)}$ 在 $B(a_M,(2e+1)\rho_M)$ 内无极点，故$(f^n)^{(k)}$ 在 $|z-a_M|<\alpha_M$ 内无零点，从而 f 在 $|z-a_M|<\alpha_M$ 内无零点.

设$(f^n)^{(k)}-1=G_M(z)h(z)$，则

$$(f^n)^{(k+1)}=G'_M(z)h(z)+G_M(z)h'(z). \tag{17}$$

下面我们证明，当 $z\in C_{\alpha_M}$ 时，有 $\left|\frac{G'_M(z)}{G_M(z)}\right|>\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right|$ 成立.

事实上，由引理 1 得，当 $z\in C_{\alpha_M}$ 时，有

$$\left|\frac{G'_M(z)}{G_M(z)}\right|>\frac{p_M}{2\rho_M}, \tag{18}$$

所以有

$$\left|\frac{H'_M(z)}{H_M(z)}\right|=\left|\sum_{j=1}^{x_M}\frac{1}{z-w_j}\right|\leqslant\frac{x_M}{\mu|a_M|-(2e+1)\rho_M}\leqslant\frac{p_M}{2\rho_M}\frac{\rho_M}{\mu|a_M|-(2e+1)\rho_M}\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{G'_M(z)}{G_M(z)}\right|. \tag{19}$$

又因为 $B(z)$ 在 $B(a_n,\mu|a_n|)$ 内解析且无零点，由引理 2 及(14)，在 $|z-a_M|\leqslant 2$ 内有

$$\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right|\leqslant c_1p_M(\log|a_M|)^2. \tag{20}$$

这里及以下，我们用 $c_1,c_2,\cdots$ 表示仅与 k,q,μ,ε 有关的常数.

故由定理的假设及(18)，(19)，(20)，当 $z\in C_{\alpha_M}$ 时，有

$$\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right|+\left|\frac{H'_M(z)}{H_M(z)}\right|\leqslant c_1p_M(\log|a_M|)^2+\frac{1}{2}\left|\frac{G'_M(z)}{G_M(z)}\right|\leqslant$$

$$c_1c_2p_M\log\frac{1}{\rho_M}+\frac{1}{2}\left|\frac{G'_M(z)}{G_M(z)}\right|=2c_1c_2\frac{p_M}{2\rho_M}\rho_M\log\frac{1}{\rho_M}+\frac{1}{2}\left|\frac{G'_M(z)}{G_M(z)}\right|\leqslant$$

$$2c_1c_2\left|\frac{G'_M(z)}{G_M(z)}\right|\rho_M\log\frac{1}{\rho_M}+\frac{1}{2}\left|\frac{G'_M(z)}{G_M(z)}\right|=\left(c_3\rho_M\log\frac{1}{\rho_M}+\frac{1}{2}\right)\left|\frac{G'_M(z)}{G_M(z)}\right|.$$

又 $B(z)=H_M(z)h(z)$,故 $\frac{h'(z)}{h(z)}=\frac{B'(z)}{B(z)}-\frac{H'_M(z)}{H_M(z)}$,从而有

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right|\leqslant\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right|+\left|\frac{H'_M(z)}{H_M(z)}\right|<\left|\frac{G'_M(z)}{G_M(z)}\right|. \tag{21}$$

因此当 $z\in C_{\alpha_M}$ 时,有 $|G'_M(z)h(z)|>|G_M(z)h'(z)|$,故由(17)及 f 在 C_{α_M} 无零点及 Rouchè 定理,$(f^n)^{(k+1)}$ 与 $G'_M(z)h(z)$ 在 $B(a_M,\alpha_M)=|z-a_M|<\alpha_M$ 内有相同个数的零点,而 $G'_M(z)$ 恰有 p_M-1 个零点,且这些零点全在 $G_M(z)$ 零点的凸包上[10],故这些零点全在 $B(a_M,\alpha_M)=|z-a_M|<\alpha_M$ 内,从而 $(f^n)^{(k+1)}$ 在 $B(a_M,\alpha_M)=|z-a_M|<\alpha_M$ 内也有 p_M-1 个零点,由前面的讨论 f 在 $B(a_M,\alpha_M)=|z-a_M|<\alpha_M$ 无零点,因此 $q_M=p_M-1$,故当 $M\in E$ 时,有 $v_M=p_M-q_M=1$,从而当 M 充分大且 $M\in E$ 时,有

$$v_M=1, \tag{22}$$

于是由(8)和(22)可知,在 $q^{\frac{3}{8}}|a_M|\leqslant R\leqslant q^{\frac{-1}{16}}|a_{M+1}|$ 内 $n.e.$ 有

$$T(R,f)\leqslant c_4(\log R)^2. \tag{23}$$

又当 R 满足 $q^{\frac{-1}{16}}|a_M|<R<q^{\frac{3}{8}}|a_M|$ 时,$q^{\frac{3}{8}}|a_M|<q^{\frac{7}{16}}R<q^{\frac{-1}{16}}|a_{M+1}|$,所以

$$T(R,f)\leqslant T(q^{\frac{7}{16}}R,f)\leqslant c_4(\log(q^{\frac{7}{16}}R))^2\leqslant c_5(\log R)^2. \tag{24}$$

由(23),(24)得

$$T(R,f)=(\log R)^2,R\to\infty. \tag{25}$$

由引理 5 知 $\delta(\infty,(f^n)^{(k)}-1)>0$,而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{z:|z-a_n|<\rho_n\}$ 是包围 $(f^n)^{(k)}-1$ 所有零点的 ε 集,由(25)及引理 4 得,当 $z=re^{i\theta}$ 充分大且 z 在 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{z:|z-a_n|<\rho_n\}$ 之外时,有

$$|(f^n)^{(k)}|>1. \tag{26}$$

由定理的假设,$(f^n)^{(k)}$ 在 $B(a_M,\alpha_M)=|z-a_M|<\alpha_M$ 内解析,又由(26)和 Rouchè 定理,$(f^n)^{(k)}$ 和 $(f^n)^{(k)}-1$ 在 $B(a_M,\alpha_M)=|z-a_M|<\alpha_M$ 内有相同个数的零点和极点,而 $(f^n)^{(k)}-1$ 在 $B(a_M,\alpha_M)=|z-a_M|<\alpha_M$ 内至少有一个零点,因此 $(f^n)^{(k)}$ 在 $B(a_M,\alpha_M)=|z-a_M|<\alpha_M$ 内也至少有一个零点,但由前面的结果知 $(f^n)^{(k)}$ 在 $B(a_M,\alpha_M)=|z-a_M|<\alpha_M$ 内无零点,矛盾!至此定理得证.

[参考文献]

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982.
[2] Hayman W K. Picard values of mermorphic function and their derivatives[J]. Ann of math,1959,70(2):9-42.
[3] Clunie J. On a result of hayman[J]. J London Math Soc,1967,42:389-392.
[4] Anderson J M,Baker I N,Clunie J G. The distribution of values of certain entire and meromorphic function[J]. Math Z,1981,178:509-525.
[5] Langley J K. Analogues of Picard set for entire function and their derivatives[J]. Contemporary Math,1983,25:75-86.
[6] Chen H H. Yoshida functions and Picard values of integral functions and their derivatives[J]. Bull Austral Math Soc,1996,54:373-381.
[7] 王品玲. 整函数导数的 Picard 例外集[J]. 数学学报,2009,52(5):961-968.
[8] Wang Y F,Fang M L. Picard values and normal families of mermorphic functions with multiple zeros[J]. Acta Mathematica Sinica,1998,14(1):17-26.
[9] 詹小平,蔡海涛. 亚纯函数的例外集[J]. 数学学报,2001,44(4):657-666.
[10] Ahlfors L V. Complex Analysis[M]. New York:McGraw-Hill Book Company,1966.

[责任编辑:丁　蓉]