第 34 卷第 4 期
2011 年 12 月
南京师大学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition)
Vol. 34 No. 4
Dec,2011

粗糙群定义的缺陷与修正

吴国兵[1],黄 兵[2]

(1. 南京审计学院金审学院,江苏 南京 211815)
(2. 南京审计学院信息科学学院,江苏 南京 211815)

[摘要] 自 Pawlak Z 提出粗糙集理论以来,众多学者进行了广泛深入的研究,并将该理论拓展至粗糙代数领域. Biswas R 和 Nanda S 首次提出了粗糙群(B－N 粗糙群)的概念并给出了若干性质,但这一概念本身存在着一定缺陷. 已有一些研究者指出了 B－N 粗糙群的定义和结论存在的一些问题,并给出了 B－N 粗糙群的修正定义,但 B－N 粗糙群定义仍有一个缺陷未能被发现. 本文详尽分析了 B－N 粗糙群及其修正版的缺陷,提出了一种新的粗糙群修正定义,并用示例进行了说明.

[关键词] 粗糙集,群,粗糙群
[中图分类号] O159 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)04-0039-04

Defect and Revision of Definition of Rough Group

Wu Guobing[1],Huang Bing[2]

(1. Jin Shen College, Nanjing Audit University, Nanjing 211815, China)
(2. School of Information Sciences, Nanjing Audit University, Nanjing 211815, China)

Abstract: Rough set theory, proposed by Pawlak Z, has evoked a lot of researches. Theoretic study has included algebra aspect of rough sets. The concept of rough group was introduced firstly by Biswas R and Nanda S, but with some deficiencies remaining. The concept of rough group was improved by other researchers, but there is another shortcoming in the concept of rough group introduced by Biswas R and Nanda S. In this paper, we examine the defects of the definition of rough group initiated by Biswas R and Nanda S and its improvements, and present a new revision of rough group.

Key words: rough set, group, rough group

粗糙集理论是由波兰数学家 Pawlak Z 于 1982 年首次提出的,该理论是用于处理模糊和不确定知识的新颖且有效的数据分析工具[1]. 近 30 年以来,经过中外众多学者的共同努力,粗糙集理论已经被广泛地应用于人工智能、数据挖掘、模式识别、决策分析、故障检测等众多领域. 1994 年,Biswas R 和 Nanda S 将粗糙集理论与群论的研究结合起来,首次提出了粗糙群(B－N 粗糙群)和粗糙子群的概念,并给出了若干粗糙群以及粗糙子群的性质[2]. 以 Biswas R 和 Nanda S 提出的粗糙群和粗糙子群等概念为基础,不少中外学者对粗糙群进行了进一步的深入研究并取得了不少研究成果[3-13]. 然而,Biswas R 和 Nanda S 提出的粗糙群(B－N 粗糙群)定义并不十分严谨,根据 Biswas R 和 Nanda S 提出的粗糙群(B－N 粗糙群)定义所得出的一些粗糙群的性质或其性质的证明过程不严谨或其性质本身就不正确. 本文以一些学者所做的有关粗糙群研究的结果为基础,对由 Biswas R 和 Nanda S 提出的粗糙群定义进行了进一步的修正,使粗糙群的定义以及一些粗糙群性质的证明过程更为严谨.

1 Biswas R 和 Nanda S 的粗糙群定义的缺陷

首先给出 Biswas R 和 Nanda S 在文献[2]中提出的粗糙群和粗糙子群的定义.

收稿日期: 2011-08-10.
基金项目: 江苏省自然科学基金(BK2009395).
通讯联系人: 吴国兵,讲师,研究方向: 粗糙集和数据挖掘. E-mail: wgb@nau.edu.cn

定义 1[2]　(B－N 粗糙群) 设 $S=(U,R)$ 是近似空间,符号 $*$ 表示定义在 U 上的一个二元运算. 若对 $\varnothing \neq G \subseteq U$,$G$ 的全体粗糙集 $A(G)=(\underline{A}(G),\overline{A}(G))$ 同时满足下列条件:

(1) $\forall x,y \in G$,总有 $x*y \in \overline{A}(G)$;

(2) $\forall x,y,z \in G$,总有 $x*(y*z)=(x*y)*z$;

(3) $\exists e \in \overline{A}(G)$,使得 $\forall x \in G$,总有 $e*x=x*e=x$, 这里,e 称为 $A(G)$ 中的粗糙单位元;

(4) $\forall x \in G$,$\exists y \in G$,使得 $x*y=y*x=e$,这里,y 称为 x 在 $A(G)$ 中的粗糙逆元,并可记为 x^{-1}; 则称全体粗糙集 $A(G)=(\underline{A}(G),\overline{A}(G))$ 为粗糙群(或称之为 B－N 粗糙群),并简记为 $\langle A(G),*\rangle$.

为表述方便,以下将 $\overline{A}(G)$ 简记为 $\overline{G}$ 即 G 的上近似集.

定义 2[2]　(粗糙子群) 设 $\langle A(G),*\rangle$ 为粗糙群,若对 $\varnothing \neq H \subseteq G$, $\langle A(H),*\rangle$ 也是粗糙群,则称 $\langle A(H),*\rangle$ 为粗糙群 $\langle A(G),*\rangle$ 的粗糙子群,可简记为 $A(H) \leqslant A(G)$.

定义 1 的缺陷 1:

定义 1 中的条件(2) 说明,要保证 $A(G)$ 是粗糙群,U 上的二元运算 $*$ 必须在 G 中满足结合律,但因有定义 1 中的条件(1),故条件(2) 中的 x,y,z 被限制在 G 中是不妥当的. 应将 x,y,z 限制在 $\overline{A}(G)$ 中即 G 的上近似集 $\overline{G}$ 中.

定义 1 的缺陷 2:

粗糙群定义 1 的条件(3) 也存在问题,即对任意的 x 将其限制在 G 中也是不妥当的,因为如此定义将无法严格证明粗糙群的粗糙单位元的唯一性. 对于一般的群 G,证明其单位元唯一性的方法非常简单: 设 e_1、e_2 是 G 的 2 个单位元,则由单位元的定义有 $e_1=e_1e_2=e_2$. 但若将此方法直接用于证明粗糙单位元的唯一性则显然是不严谨的. 因为根据定义 1 之条件(3): $\exists e \in \overline{A}(G)$,使得 $\forall x \in G$,总有 $e*x=x*e=x$,特别要注意的是,这里的 x 只要求属于 G,而在证明式 $e_1=e_1e_2=e_2$ 中 e_1、e_2 有可能均属于 $\overline{A}(G)$ 即 G 的上近似集 $\overline{G}$ 但不属于 G. 文献 [5,11] 在证明粗糙群的粗糙单位元的唯一性等性质时均没有考虑到这一问题. 如果我们将粗糙群定义 1 条件(3) 中的 $\forall x \in G$ 修改为: $\forall x \in \overline{A}(G)$,则使用证明式 $e_1=e_1e_2=e_2$ 来证明粗糙群的粗糙单位元的唯一性性质便十分严谨了.

显然,如果不能严格地证明粗糙群的粗糙单位元的唯一性,则相应地,粗糙群的下列重要性质均无法加以严格地证明:

(1) 设 $\langle A(G),*\rangle$ 为粗糙群,则对 $\forall x \in G$,x^{-1} 唯一;

(2) 设 $\langle A(G),*\rangle$ 为粗糙群,则对 $\forall x,y \in G$,一定有 $(x^{-1})^{-1}=x$,$(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$ 成立;

(3) 粗糙群 $\langle A(G),*\rangle$ 的 $*$ 运算满足左消去律和右消去律;

(4) 粗糙群 $\langle A(G),*\rangle$ 的粗糙子群和 $\langle A(G),*\rangle$ 具有相同的粗糙单位元;

(5) 设粗糙群 $\langle A(H),*\rangle$ 是粗糙群 $\langle A(G),*\rangle$ 的粗糙子群,则对 $\forall x \in H$,有 $x_H^{-1}=x_G^{-1}$.

因为这几个性质的严格证明均需要以粗糙单位元的唯一性为基础. 因此,文献 [5,11] 根据定义 1 对上述几个性质的证明均是不严谨的.

另外,Biswas R 和 Nanda S 在文献 [2] 中还得出如下 2 个结论:

(1) 若 $\langle A(G),*\rangle$ 为粗糙群,则它一定有 2 个平凡子群 $\langle A(G),*\rangle$、$\langle A(\{e\}),*\rangle$;

(2) 粗糙群 $\langle A(G),*\rangle$ 的任意 2 个粗糙子群 $\langle A(X),*\rangle$、$\langle A(Y),*\rangle$ 的交 $A(X \cap Y)$ 也是 $\langle A(G),*\rangle$ 的粗糙子群.

事实上,这 2 个结论也同样存在问题. 对于上述结论(1),根据定义 1 和定义 2,由于粗糙单位元 $e \in \overline{A}(G)$,而一般地,$G \subseteq \overline{A}(G)$ 且 $\overline{A}(G)-G \neq \varnothing$,从而 $\{e\} \subseteq G$ 可能不成立,故由粗糙子群的定义 2,$\langle A(\{e\}),*\rangle$ 可能不是粗糙群 $\langle A(G),*\rangle$ 的粗糙子群. 只有当 $\{e\} \subseteq G$ 成立时, $\langle A(\{e\}),*\rangle$ 才一定是 $\langle A(G),*\rangle$ 的粗糙子群; 对于上述结论(2),根据粗糙集的基本性质,$\forall X,Y \subseteq G$,$\overline{A}(X \cap Y) \subseteq \overline{A}(X) \cap \overline{A}(Y)$ 也即 $\overline{A}(X \cap Y)=\overline{A}(X) \cap \overline{A}(Y)$ 可能不成立,因此, $\forall a,b \in X \cap Y$,一定有 $a*b \in \overline{A}(X) \cap \overline{A}(Y)$ 但 $a*b \in \overline{A}(X \cap Y)$ 则可能不成立,从而 $A(X \cap Y)$ 可能不是粗糙群.

进一步的,对于一般的群 G,若 H 和 K 是 G 的子群,则一定有 $H \cup K$ 是 G 的子群当且仅当 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$. 此结论对粗糙群不成立,但对于粗糙群下述结论显然是成立的: 设 G 是粗糙群, H 和 K 是 G 的粗糙子群,若 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$,则 $H \cup K$ 一定是 G 的粗糙子群,因为由已知条件,总有 $H \cup K=K$ 或 $H \cup K=H$.

另外,对于一般意义下的群的子群,有如下常用的 2 个判定定理[14]:

(1) 设 G 为群,H 是 G 的非空子集. 则 H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a,b \in H$ 总有 $ab^{-1} \in H$;

(2) 设 G 为群,H 是 G 的非空有限子集. 则 H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a,b \in H$ 总有 $ab \in H$.

如将上述 2 个判定定理(1) 和(2) 分别改成如下所述的(3) 和(4):

(3) 设 G 为粗糙群,H 是 G 的非空子集. 则 H 是 G 的粗糙子群当且仅当 $\forall a,b \in H$ 总有 $ab^{-1} \in \overline{H}$;

(4) 设 G 为粗糙群,H 是 G 的非空有限子集. 则 H 是 G 的粗糙子群当且仅当 $\forall a,b \in H$ 总有 $ab \in \overline{H}$.

则(3) 和(4) 这 2 个结论是不能成立的,其主要原因在于粗糙群定义 1 的条件(1) 与一般意义下的群的二元运算的封闭性不同.

参考文献[13] 给出了一个判定粗糙子群的充要条件:

定理 1(粗糙子群判定定理) 设 G 为粗糙群,H 是 G 的非空子集. 则 H 是 G 的粗糙子群当且仅当 $\forall a$,$b \in H$ 总有 $ab \in \overline{H}$ 且 $\forall a \in H$ 总有 $a^{-1} \in H$.

该定理的证明是容易的,但要用到上面所提到的且需严格加以证明的若干粗糙群和粗糙子群的性质.

由上述讨论可知,对于一般的群成立的结论对粗糙群很可能不成立,研究粗糙群时,不能将一般群的性质直接地套用到粗糙群上.

Duoqian Miao 和 Suqing Han 等人在文献[4] 和[13] 中也指出了文献[2] 中的定义和结论存在的一些问题,并给出了一个粗糙群的修正定义,该修正定义修正了定义 1 中条件(2),即将 $\forall x,y,z \in G$ 改为 $\forall x,y,z \in \overline{A}(G)$,但文献[4] 和[13] 并没有指出定义 1 中条件(3) 存在的问题,而且文献[13] 给出的粗糙群粗糙单位元唯一性的证明过程也是有问题的.

根据不严谨的定义推出的性质往往也是不可靠的. 粗糙代数理论(粗糙群、粗糙环、粗糙格和粗糙理想等) 从诞生至今已近 20 年,但到目前为此,几乎所有研究粗糙群的学者在其论文中仍在使用 Biswas R 和 Nanda S 提出的并不严谨的粗糙群定义 1,即便对于由 Duoqian Miao 和 Suqing Han 等人提出的粗糙群修正定义[4,13],笔者发现也还没有人引用过. 所以,有必要对粗糙群定义提出进一步的修正,以使粗糙群的定义及其相关性质的证明更为严谨并能纠正一些并不能成立的粗糙群性质.

2 粗糙群的修正定义

根据上述讨论,为使粗糙群的定义和粗糙单位元的唯一性等粗糙群性质的证明更为严谨,结合文献[4,13] 对粗糙群定义 1 的修改,可进一步修改粗糙群定义 1 的条件(3),将 $\forall x \in G$ 修正为 $\forall x \in \overline{A}(G)$.

修正后的粗糙群定义如定义 3:

定义 3(粗糙群的修正定义) 设 $S = (U,R)$ 是近似空间,符号 $*$ 表示定义在 U 上的一个二元运算. 若对 $\varnothing \neq G \subseteq U$,$G$ 的全体粗糙集 $A(G) = (\underline{A}(G), \overline{A}(G))$ 同时满足下列条件:

(1) $\forall x,y \in G$,总有 $x * y \in \overline{A}(G)$;

(2) $\forall x,y,z \in \overline{A}(G)$,总有 $x * (y * z) = (x * y) * z$;

(3) $\exists e \in \overline{A}(G)$,使得 $\forall x \in \overline{A}(G)$,总有 $e * x = x * e = x$,这里,e 称为 $A(G)$ 中的粗糙单位元;

(4) $\forall x \in G$,$\exists y \in G$,使得 $x * y = y * x = e$,这里,y 称为 x 在 $A(G)$ 中的粗糙逆元,并可记为 x^{-1};

则称全体粗糙集 $A(G) = (\underline{A}(G), \overline{A}(G))$ 为粗糙群,并简记为 $\langle A(G), * \rangle$.

3 示例

设 $n_k = \{0,1,2,3,\cdots,k-1\}$,$k$ 为素数. 令 $U = n_k - \{0\}$,在 U 上定义二元运算 $\otimes_k$:

$$a \otimes_k b = \begin{cases} a \times b & a \times b < k \\ a \times b \text{ 除以 } k \text{ 所得余数} & a \times b \geqslant k \end{cases}$$

显然,一般的群一定是粗糙群,但反之不一定成立. 可以证明 $\langle U, \otimes_k \rangle$ 当且仅当 k 为素数时是群,从而 $\langle U, \otimes_k \rangle$ 也是粗糙群.

现设 $U = n_{11} - \{0\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,某知识 R 对 U 的划分 $U/R = \{E_1,E_2,E_3\}$,其中 $E_1 = \{1,2,5\}$,$E_2 = \{3,8,9\}$,$E_3 = \{4,6,7,10\}$,又设 $X_1 = \{2,4,5\}$,$X_2 = \{2,3,4,6\}$,$X_3 = \{3,4,5,9\}$,$X_4 = \{7,8,10\}$,$X_5 = \{2,6\}$,$X_6 = \{5,9\}$.

从而有:

$\overline{X_1}=E_1\cup E_3=\{1,2,4,5,6,7,10\}$,$\overline{X_2}=E_1\cup E_2\cup E_3=U$,$\overline{X_3}=E_1\cup E_2\cup E_3=U$,$\overline{X_4}=E_2\cup E_3=\{3,4,6,7,8,9,10\}$,$\overline{X_5}=E_1\cup E_3=\{1,2,4,5,6,7,10\}$,$\overline{X_6}=E_1\cup E_2=\{1,2,3,5,8,9\}$.

对 X_1,因 $2\otimes_{11}4=8\notin\overline{X_1}$,不满足粗糙群修正定义 3 中条件 1 的运算封闭性,故 X_1 不是粗糙群;对 X_2,因 $\forall a,b\in X_2$,$a\otimes_{11}b\in U=\overline{X_2}$,二元运算 $\otimes_{11}$ 在 X_2 上满足粗糙群的运算封闭性,$\overline{X_2}$ 上结合律显然成立,又有粗糙单位元 $e=1\in\overline{X_2}$(但 $e\notin X_2$),且 X_2 中每一元素都可逆($2\otimes_{11}6=6\otimes_{11}2=1=e$,2 与 6 互逆;$3\otimes_{11}4=4\otimes_{11}3=1=e$,3 与 4 互逆),所以 X_2 满足粗糙群的修正定义 3,X_2 是粗糙群;对 X_3,因为 $\forall a,b\in X_3$,$a\otimes_{11}b\in U=\overline{X_3}$,二元运算 $\otimes_{11}$ 在 X_3 上满足粗糙群的运算封闭性,$\overline{X_3}$ 上结合律显然成立,又有粗糙单位元 $e=1\in\overline{X_3}$(但 $e\notin X_3$),且 X_3 中每一元素都可逆(3 与 4 互逆,5 与 9 互逆),所以 X_3 也满足粗糙群的修正定义 3,X_3 是粗糙群;但 $X_2\cap X_3=\{3,4\}$ 却不是一个粗糙群,因为 $\overline{X_2\cap X_3}=E_2\cup E_3=\{3,4,6,7,8,9,10\}$,而粗糙单位元 $e=1\notin\overline{X_2\cap X_3}$,即不满足粗糙群修正定义 3 的条件(3),这说明 2 个粗糙子群的交不一定还是粗糙群;对 X_4,因为 $e=1\notin\overline{X_4}$,也不满足粗糙群修正定义 3 的条件(3),这说明 X_4 也不是粗糙群;对于 X_5 和 X_6,根据粗糙群修正定义 3 和粗糙子群定义 2,它们显然都是粗糙群 $\langle U,\otimes_{11}\rangle$ 的粗糙子群,且 $X_5\cup X_6=\{2,5,6,9\}$ 也显然是粗糙群 $\langle U,\otimes_{11}\rangle$ 的粗糙子群,但 $X_5\not\subset X_6$,$X_6\not\subset X_5$,这说明,若 H、K 和 $H\cup K$ 均是粗糙群 G 的粗糙子群,则不一定有 $H\subseteq K$ 或 $K\subseteq H$.

4 结束语

根据不严谨的概念或定义推出的定理或性质往往是不可靠的. 就粗糙群研究的现有文献来看,到目前为此,研究粗糙群的学者仍在使用由 Biswas R 和 Nanda S 提出的并不严谨的粗糙群(B－N 粗糙群)定义. 本文结合参考文献[4,13]对 Biswas R 和 Nanda S 提出的粗糙群定义的修正进一步修正了粗糙群(B－N 粗糙群)定义 1 的条件(3),对此条件的修正保证了粗糙群的定义及其相关性质的证明更为严谨,同时讨论和纠正了一些并不能成立的粗糙群性质,期望粗糙群的研究能够得到更好的发展.

[参考文献]

[1] Pawlak Z. Rough set[J]. International of Computer and Information Science,1982,11(5):341-356.

[2] Biswas R, Nanda S. Rough groups and rough subgroup[J]. Bull Polish Acad Sci Math,1994,42:251-254.

[3] 张文修,吴志伟,梁吉业. 粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2001.

[4] Miao D, Han S Q, Li D G, et al. Rough group, rough subgroup and their properties[M]// Sl ezak D, et al. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, RSFDGrC 2005, LNAI 3641:104-113.

[5] 王德松. 粗糙集理论在代数系统-群、环上的应用[D]. 成都:电子科技大学应用数学学院,2003.

[6] 于佳丽,舒兰. 粗糙商群的性质[J]. 模式识别与人工智能,2003,3(1):126-128.

[7] 王德松,舒兰. 粗糙不变子群的若干性质与粗糙商群[J]. 模糊系统与数学,2004,18(4):49-53.

[8] 丁德松,舒兰,田学全. 粗糙环的同态与同构[J]. 工程数学学报,2005,22(2):281-286.

[9] 于佳丽,舒兰. 粗糙不变子群的性质[J]. 模式识别与人工智能,2006,19(1):24-26.

[10] 张贤勇,莫智文. 粗糙群和基于子群的群的粗糙[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2006,29(3):253-256.

[11] 阎瑞霞,刘金玉,姚炳学. 关于粗糙群的注记[J]. 淮海工学院学报:自然科学版,2008,17(1):5-8.

[12] 刘静,郭继东. 粗糙群及粗糙商群的部分性质探讨[J]. 白城师范学院学报,2008,22(3):8-10.

[13] 苗夺谦,李道国. 粗糙集理论、算法与应用[M]. 北京:清华大学出版社,2008:91-101.

[14] 耿素云,屈婉玲. 离散数学[M]. 北京:高等教育出版社,2004:202-203.

[责任编辑:顾晓天]