

周期受击简谐振子系统的经典与量子动力学

杨双波, 韦 栋

(南京师范大学物理科学与技术学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 研究一个周期受击简谐振子系统的经典与量子动力学. 研究发现, 随着打击强度 κ 的增加, 经典相空间发生分形时, 一步时间演化算符的本征值分布也从单位圆的圆周上朝着圆心扩散. 而当本征值归一化后, 归一化后的本征值分布又回到单位圆周上.

[关键词] 分形, 随机网, 量子动力学, Floquet 算符, 本征值, 准能量

[中图分类号] O413.1 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1001-4616(2011) 04-0049-06

Classical and Quantum Dynamics of a Periodically Kicked Harmonic Oscillator

Yang Shuangbo, Wei Dong

(School of Physics and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract: This paper studies the classical and quantum dynamics of a periodically kicked Harmonic oscillator system. It is found that as we increase the kicking strength κ , and fractal takes place in classical phase space, the eigenvalue distribution of the one step time evolution operator will diffuse toward the center of the unit circle, from on the unit circle. When the eigenvalues are normalized, the normalized eigenvalue distribution will back to on the unit circle.

Key words: fractal, stochastic web, quantum dynamics, Floquet operator, eigenvalue, quasienergy

对量子混沌的研究通常从两方面进行: 稳定态过程中的混沌和时间过程中的混沌. 在稳定态过程的研究中, 发现了某些量子态局域在短周期轨道上, 称为 Scar 态^[1-2]. 在能级的统计^[3]中, 发现了能级按最近邻间距分布为 Wigner 分布, 而可积系统中的分布为 Poisson 分布. 在时间过程混沌的研究中, 人们较多研究的是周期受击系统, 主要原因是实验上容易实现, 理论与实验结果容易比较. Casati 最早研究了周期受击转子系统^[4], 其经典类比是标准映射系统, 这是一个 KAM 系统^[5-7], 相空间中可积的规则运动与不可积的混沌运动共存. 他的主要发现是经典混沌扩散的量子抑制, 即经典能量涨落随时间线性增长, 而量子能量涨落从某时刻以后完全消失. 另一个研究较多的系统是周期受击的 Harper 模型^[8], 这是一个准周期多分形系统, 在该系统中发现了金属-绝缘体转变. 近年来, 人们对周期受击的方势阱^[9]系统及周期受击的谐振子^[10]系统也展开了研究, 这是 2 个非 KAM 系统, 分别因为势不连续或未扰哈密顿量正比于作用量(退化系统)而使得 KAM 定理的条件不能被满足. 在经典相空间中, 一定条件下, 存在随机网. 因不存在 KAM 不变环, 混沌轨道沿网格随时间迅速演化.

最近, 我们在对周期受击谐振子系统的研究中发现, 打击强度(或耦合参数) κ 对时间演化算符 \hat{U} 的本征值的分布有重要影响. 当 κ 很小时, 时间演化算符的本征值基本上分布在半径为 1 的圆周上. 但随着 κ 的增大, 本征值分布向着圆心扩散, 分布区域也从圆周变到圆环, 进而扩散到圆心. 当考虑到准能量的虚部修正后, 上面的那个分布又回到单位圆周上. 这是一个还未看到过报道的新现象. 本文将报道我们的计算及结果.

收稿日期: 2011-03-02.

通讯联系人: 杨双波, 教授, 研究方向: 量子混沌. E-mail: yangshuangbo@njnu.edu.cn

1 系统的经典动力学

一个周期受击谐振子系统的哈密顿量可被写为

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_c^2 x^2 + \kappa \cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = H_0 + \kappa \cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1)$$

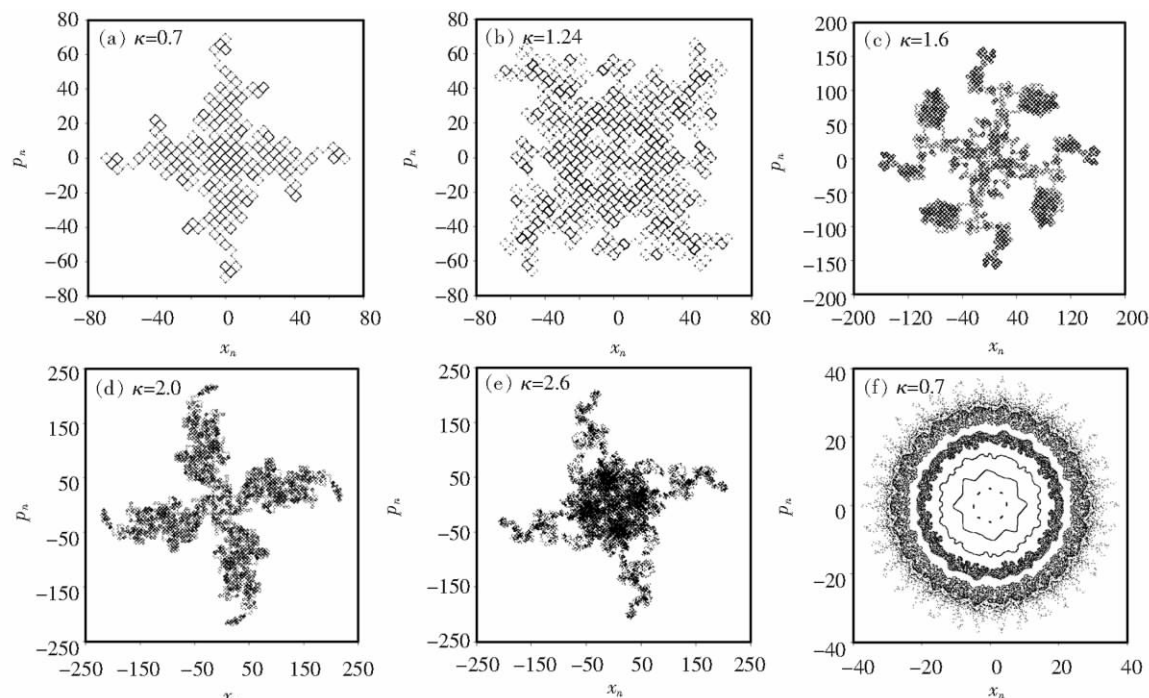


图 1 (a - e) 不同打击强度 κ 下相空间的随机网结构. $q = 1 : 4; x_0 = 0, p_0 = 3.145$, 叠代次数 $n = 30\,000$;

$$(f) \kappa = 0.7, q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}, 5 \text{ 条不同的轨迹}$$

Fig. 1 (a - e) Stochastic web structure at different kicking strength κ . $q = 1 : 4; x_0 = 0, p_0 = 3.145$, iteration number

$$n = 30\,000; (f) \kappa = 0.7, q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}, 5 \text{ different trajectories}$$

它的正则运动方程为

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\mu}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\mu\omega_c^2 x + \kappa \sin x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (2)$$

对运动方程在一个周期 $[nT - 0, (n+1)T - 0]$ 内积分我们得到如下的映射方程

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{\kappa}{\mu} \sin x_n \right) \cos \omega_c T - \omega_c x_n \sin \omega_c T, \quad (3)$$

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{\kappa}{\mu} \sin x_n \right) \frac{\sin \omega_c T}{\omega_c} + x_n \cos \omega_c T. \quad (4)$$

这里 κ 是打击强度. 令 ω 为打击频率, T 为周期, 则当 $\omega_c T = 2\pi \frac{\omega_c}{\omega} \equiv 2\pi q$, q 为简单有理数时, 为谐振打击, 此时该系统称为谐振系统. 在这篇文章中, 我们采用自然单位, 即取 $\mu = 1, \omega_c = 1, \hbar = 1$.

简谐振子系统是经典简并系统 $\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = 0$, KAM 定理的条件不被满足, 相空间不存在 KAM 不变环. 特别是当打击频率与谐振子固有频率之比为有理数, 即谐振时, 相空间将存在周期网. 当打击强度 κ 增大时, 网格处及附近将出现混沌成为随机网, 并发生变形. 网的出现是谐振打击的结果. 由于相空间中不存在 KAM 不变环, 处在网格随机区域的一条轨迹将随时间很容易地扩散到远处.

图 1(a - e) 显示不同打击强度下一个 $1 : 4$ 谐振系统的相空间随机网结构. 可以看出当 $\kappa = 0.7$ 时随机网的网格已发生了变形, 且随着 κ 的增大, 网格内部规则运动将逐渐被混沌运动所取代. 整体结构仍然

显示出 1:4 谐振系统的特点, 直到 κ 比较大, 如当 $\kappa \geq 1.6$ 时, 相空间出现了分形. 这种分形随 κ 的增大将继续下去, 小 κ 时的 1:4 周期网已不复存在. 另外注意到每个图显示的是一个轨迹, 且在相空间的初始位置相同, 即为: $x_0 = 0$, $p_0 = 3.145$. 作为对比, 在图 1(f) 显示了一个非谐振系统的相空间运动, 其频率比为 $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$, 一个绝对的无理数. 这里 $\kappa = 0.7$, 有 5 条轨迹. 很显然, 已不存在随机网(个别网环除外), 除中心区域外也没有不变环. 相空间中的经典运动被限制在环状区域内. 当 κ 比较大时, 混沌区域将扩展, 最后充满整个相空间.

2 系统的量子动力学

系统的量子动力学反映系统波函数随时间的演化, 描述波函数随时间一步演化的 Floquet 算符可被表示为

$$\hat{U}(x, T) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H} dt} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 T} e^{-\frac{i}{\hbar} \kappa \cos x}, \quad (5)$$

其中 $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_c^2 x^2$ 为一维简谐振子哈密顿量. 一个初态为 ψ_0 的态在 Floquet 算符 $\hat{U}(x, NT)$ 的作用下演化到 ψ_{NT} , 即

$$\psi_{NT} = \hat{U}(x, NT) \psi_0, \quad (6)$$

$\hat{U}(x, T)$ 的本征方程为

$$\hat{U}\psi_f = \lambda_f \psi_f, \quad (7)$$

其中 λ_f 为 $\hat{U}(x, T)$ 的本征值, 可在谐振子本征态 $|n\rangle$ 为基矢下求解. $\hat{U}(x, T)$ 的矩阵元为

1) 对角元

$$\begin{aligned} \text{Re}(\langle n | \hat{U} | n \rangle) &= \cos\left(\frac{E_n^0 T}{\hbar}\right) \left[J_0\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j J_{2j}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) e^{-\frac{j^2}{\alpha^2}} \cdot L_n\left(\frac{2j^2}{\alpha^2}\right) \right] + \\ &2 \sin\left(\frac{E_n^0 T}{\hbar}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j J_{2j+1}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) e^{-\frac{(2j+1)^2}{4\alpha^2}} L_n\left(\frac{(2j+1)^2}{2\alpha^2}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(\langle n | \hat{U} | n \rangle) &= 2 \cos\left(\frac{E_n^0 T}{\hbar}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j J_{2j+1}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) e^{-\frac{(2j+1)^2}{4\alpha^2}} L_n\left(\frac{(2j+1)^2}{2\alpha^2}\right) - \\ &\sin\left(\frac{E_n^0 T}{\hbar}\right) \left[J_0\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j J_{2j}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) e^{-\frac{j^2}{\alpha^2}} L_n\left(\frac{2j^2}{\alpha^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

2) 非对角元

$$\langle n | \hat{U} | n + 2l + 1 \rangle = \langle n + 2l + 1 | \hat{U} | n \rangle = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle n | \hat{U} | n + 2l \rangle &= \frac{(-1)^l}{2^{l-1}} \sqrt{\frac{n!}{(n+2l)!}} \left\{ \cos\left(\frac{E_n^0 T}{\hbar}\right) \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j J_{2j}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) \cdot \left(\frac{2j}{\alpha}\right)^{2l} e^{-\frac{j^2}{\alpha^2}} L_n^{2l}\left(\frac{2j^2}{\alpha^2}\right) + \right. \\ &\left. \sin\left(\frac{E_n^0 T}{\hbar}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j J_{2j+1}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) \cdot \left(\frac{2j+1}{\alpha}\right)^{2l} e^{-\frac{(2j+1)^2}{4\alpha^2}} L_n^{2l}\left(\frac{(2j+1)^2}{2\alpha^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle n | \hat{U} | n + 2l \rangle &= \frac{(-1)^l}{2^{l-1}} \sqrt{\frac{n!}{(n+2l)!}} \left\{ \cos\left(\frac{E_n^0 T}{\hbar}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot \right. \\ &J_{2j+1}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) \left(\frac{2j+1}{\alpha}\right)^{2l} e^{-\frac{(2j+1)^2}{4\alpha^2}} L_n^{2l}\left(\frac{(2j+1)^2}{2\alpha^2}\right) - \\ &\left. \sin\left(\frac{E_n^0 T}{\hbar}\right) \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j J_{2j}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) \left(\frac{2j}{\alpha}\right)^{2l} e^{-\frac{j^2}{\alpha^2}} L_n^{2l}\left(\frac{2j^2}{\alpha^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle n + 2l | \hat{U} | n \rangle &= \frac{(-1)^l}{2^{l-1}} \sqrt{\frac{n!}{(n+2l)!}} \left\{ \cos\left(\frac{E_{n+2l}^0 T}{\hbar}\right) \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j J_{2j}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) \cdot \right. \\ &\left(\frac{2j}{\alpha}\right)^{2l} e^{-\frac{j^2}{\alpha^2}} L_n^{2l}\left(\frac{2j^2}{\alpha^2}\right) + \sin\left(\frac{E_{n+2l}^0 T}{\hbar}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j J_{2j+1}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) \cdot \left(\frac{2j+1}{\alpha}\right)^{2l} e^{-\frac{(2j+1)^2}{4\alpha^2}} L_n^{2l}\left(\frac{(2j+1)^2}{2\alpha^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{Im} \langle n+2l | \hat{U} | n \rangle = \frac{(-1)^l}{2^{l-1}} \sqrt{\frac{n!}{(n+2l)!}} \left\{ \cos\left(\frac{E_{n+2l}^0 T}{\hbar}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot J_{2j+1}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) \left(\frac{2j+1}{\alpha}\right)^{2l} e^{-\frac{(2j+1)^2}{4\alpha^2}} L_n^{2l}\left(\frac{(2j+1)^2}{2\alpha^2}\right) - \sin\left(\frac{E_{n+2l}^0 T}{\hbar}\right) \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j J_{2j}\left(-\frac{\kappa}{\hbar}\right) \left(\frac{2j}{\alpha}\right)^{2l} e^{-\frac{j^2}{\alpha^2}} L_n^{2l}\left(\frac{2j^2}{\alpha^2}\right) \right\}. \quad (14)$$

这里 $\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega_c}{\hbar}}$, $E_n^0 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$ 为简谐振子的能量. 在自然单位下它们的值分别为 1 和 $n + \frac{1}{2}$. J_0 , J_n 分别为 0 阶及 n 阶贝塞尔函数; L_n , L_n^m 分别为 n 阶拉盖尔多项式及 n 阶连带拉盖尔多项式.

Floquet 算符的矩阵为复矩阵, 经对角化后可得到本征值谱 λ_f 及对应的本征向量 $c(T)$, 用此可构造 Floquet 算符的本征态 ψ_f 如下:

$$\psi_f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(T) |n\rangle = \psi_f^r + i\psi_f^i. \quad (15)$$

这里 ψ_f^r 和 ψ_f^i 分别为波函数的实部和虚部.

3 结果与讨论

在不同周期 T 及不同打击强度 κ 下, 利用简谐振子的前 3 000 个本征态作为基将一步演化算符 U 对角化, 得到其本征值及对应的本征向量, 其结果如下:

3.1 本征值分布准能量的实部与虚部

(1) 对 $\frac{\omega_c}{\omega} = 1:4$ 的谐振系统, 在打击强度 κ 很小时, 本征值近似分布在复平面内的半径为 1 的圆周上, 分成了 4 个带, 带与带之间有间隙. 在一个带内, 本征值分布不均匀, 且有较强的简并, 如图 2(a) 所示. 这与经典相空间中干净的 1:4 周期网分布相对应.

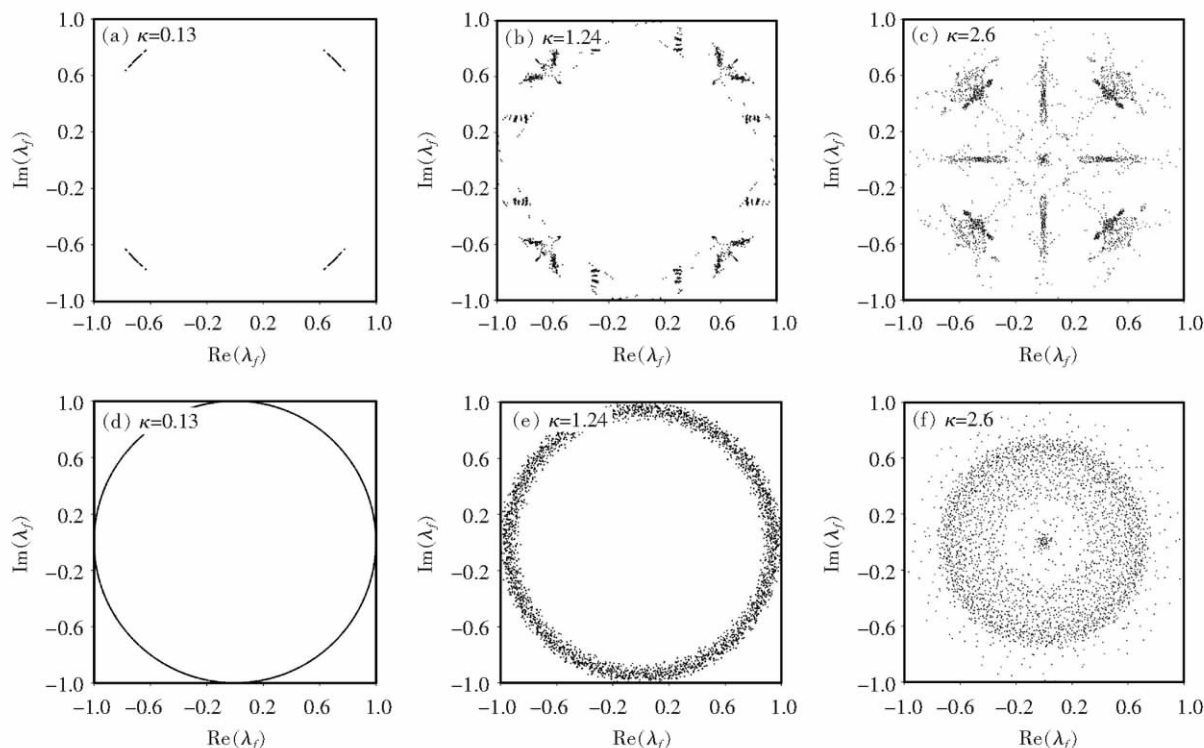


图2 (a-c) 不同打击强度 κ 下谐振系统的本征值分布 $q = 1:4$; (d-f) 不同打击强度 κ 下非谐振系统的本征值分布 $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

Fig. 2 (a-c) The eigenvalue distribution for the resonant system at different kicking strength $q = 1:4$; (d-f) The eigenvalue distribution for the nonresonant system at different kicking strength $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

随着 κ 的增加, 本征值简并度降低, 其分布逐渐偏离半径为 1 的圆周向内部扩散, 同时带的边沿也变得模糊起来. 直到当 $\kappa = 2.6$ 时, 本征值扩散到圆心, 呈辐射状. 其特征与小 κ ($= 0.13$) 时的情况完全不同, 如图 2(b - c) 所示.

(2) 对 $\frac{\omega_c}{\omega} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ 的非谐振系统, 在打击强度 κ 很小时, 本征值近似分布在复平面内的半径为 1 的圆周上, 没有形成带, 本征值沿圆周分布近似均匀, 简并度很低, 如图 2(d) 所示. 这与经典相空间中非网格分布相对应.

随着 κ 的增加, 本征值分布逐渐偏离半径为 1 的圆周向内部扩散, 当 $\kappa = 2.6$ 时, 本征值扩散到圆心, 呈环状. 径向分布不均匀. 其特征与小 κ ($= 0.13$) 时的情况完全不同, 如图 2(e - f) 所示.

假定本征值可写为 $\lambda_f = e^{i(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)} = e^{-\varepsilon_i} e^{i\varepsilon_r}$, $\varepsilon_r, \varepsilon_i$ 为实数, 分别称为准能量的实部与虚部, 则 $\varepsilon_i = -\ln |\lambda_f|$, $e^{i\varepsilon_r} = \lambda_f' / |\lambda_f|$, 其中 $\lambda_f' = \frac{\lambda_f}{e^{-\varepsilon_i}}$, 由此可确定 ε_r . 图 3(a - b) 中显示了 $\kappa = 2.6$ 时 1:4 谐振系统的准能量谱, 横坐标表示准能级的编号, 纵坐标表示准能量值. 图 3(c) 显示了虚能量修正的 U 算符的本征值分布. 图 3(a) 中的台阶对应图 3(c) 中的能带, 长台阶对应于高态密度的能带, 短台阶对应于低态密度的能带. 长短台阶之间有一段过渡部分. 可以看到, 带与带之间没有清晰的间隙, 这与小 κ ($= 0.13$) 时的情况完全不同. 图 3(d - f) 中显示了 $\kappa = 2.6$ 时 $\frac{\omega_c}{\omega} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ 非谐振系统的准能量谱. 可以看到准能量谱中没有台阶结构, 这表明态的分布沿圆周是近似均匀的 (整体看来均匀, 局域并非均匀).

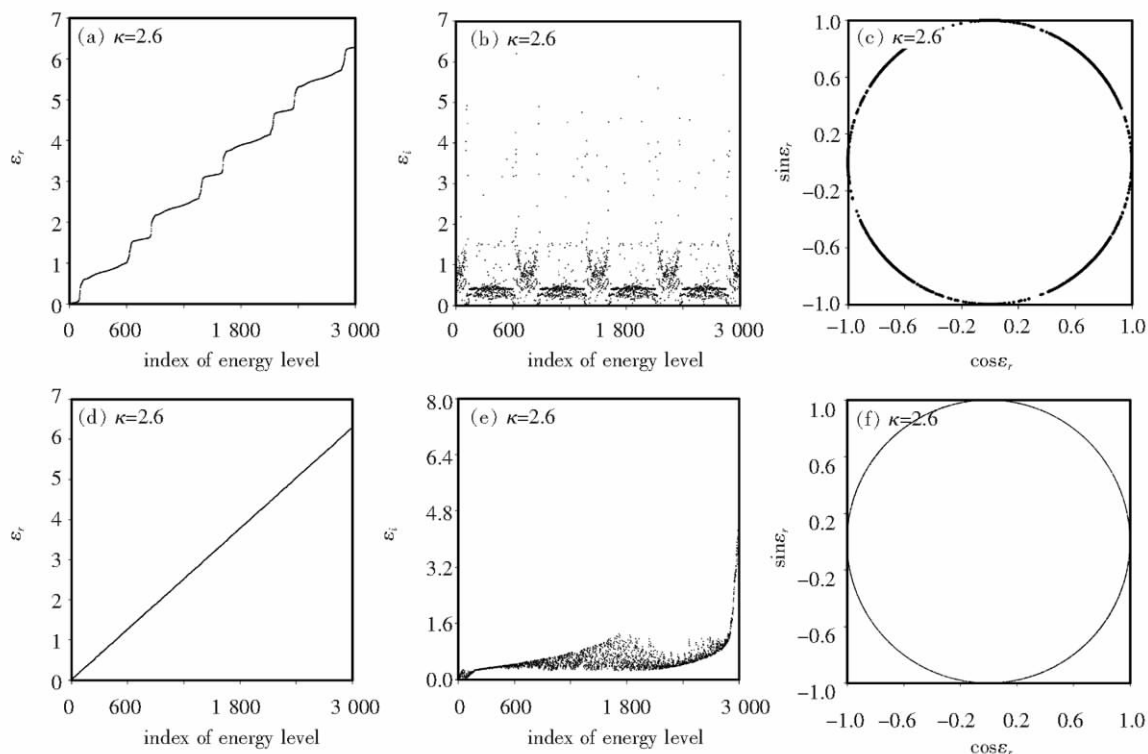


图3 (a - c) $\kappa = 2.6$, $q = 1:4$ 的谐振系统的准能量分布; (d - f) $\kappa = 2.6$, $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ 的非谐振系统的准能量分布

Fig.3 (a - c) Quasienergies distribution for resonant system with $\kappa = 2.6$, $q = 1:4$; (d - f) Quasienergies distribution for nonresonant system with $\kappa = 2.6$, $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

3.2 本征态的扩展态带边态与局域态

对 $\frac{\omega_c}{\omega} = 1:4$ 的谐振系统, 通过对波函数的分析发现, 当 κ 比较小时, 带内的波函数呈现扩展状态, 像布洛赫波, 带边的波函数呈近局域状态, 而带隙中的态为完全局域态. 当 κ 比较大时, 系统发生了分形, 除了

态密度近似为 0 的带隙中态为局域态外, 态密度比较大的地方的态也可能是局域的. 计算还发现, 非谐振系统的波函数呈扩展状态, 像布洛赫波. 在图 4(a) 中我们显示 $\kappa = 1.24$, 频率比 $\frac{\omega_c}{\omega} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ 的第 1569 个本征态的一小部分, 这是一个扩展态. 图 4(b) 显示的是 $\kappa = 0.13$, $\frac{\omega_c}{\omega} = 1:4$ 谐振系统的第 20 个本征态, 这是一个带边态. 而图 4(c) 是 $\kappa = 2.6$, $\frac{\omega_c}{\omega} = 1:4$ 谐振系统的第 2 个本征态, 显然这是一个局域态.

另外, 从图 3(c) 及 3(f) 可以看出, 沿圆周还存在着大小不等的间隙, 像康托集那样. 它所服从的规律及与经典相空间的运动之间的联系将在以后的研究中加以讨论.

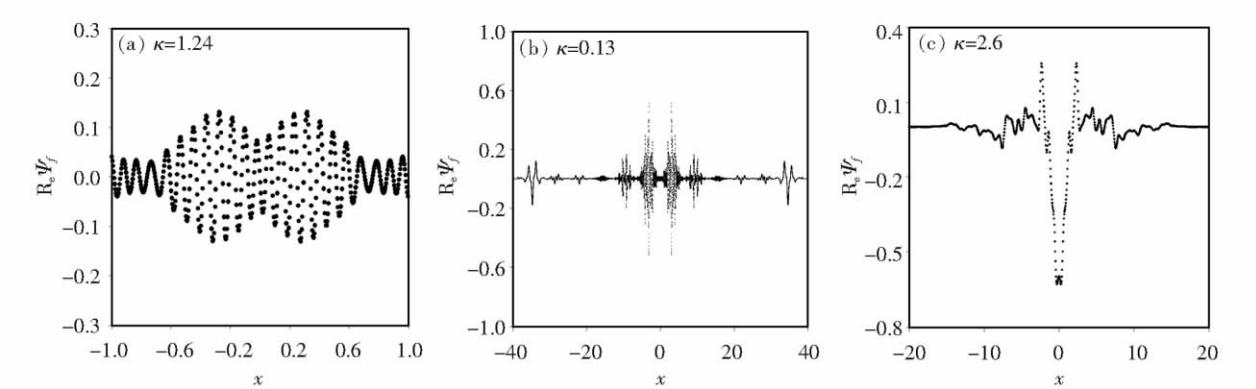


图 4 不同系统的几个本征态: (a) $\kappa = 1.24$, $\frac{\omega_c}{\omega} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ 的第 1569 个本征态的一小部分; (b) $\kappa = 0.13$, $\frac{\omega_c}{\omega} = 1:4$ 的第 20 个本征态; (c) $\kappa = 2.6$, $\frac{\omega_c}{\omega} = 1:4$ 的第 2 个本征态

Fig.4 Several eigenstates of different system: (a) Small portion of number 1569th eigenstate for $\kappa = 1.24$, $\frac{\omega_c}{\omega} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$; (b) The 20th eigenstate for $\kappa = 0.13$, $\frac{\omega_c}{\omega} = 1:4$; (c) The 2nd eigenstate for $\kappa = 2.6$, $\frac{\omega_c}{\omega} = 1:4$

3.3 系统么正性随 κ 增大而衰减

周期受击简谐振子是经典简并(或退化)系统, 在谐振条件下, 即 $\frac{\omega_c}{\omega} = 1:4$, 我们数值上计算了矩阵元 $\langle n | U^+ U | n \rangle = \sum_{l=0}^{3000} \langle n | U^+ | l \rangle \langle l | U | n \rangle = \sum_{l=0}^{3000} |U_{ln}|^2$, 发现当 κ 比较小时, 比如 $\kappa < 0.7$, 上面矩阵元值很接近 1. 但随着 κ 值的增加, 矩阵元迅速减小, 如图 5 所示. 这与准能量具有虚部相对应.

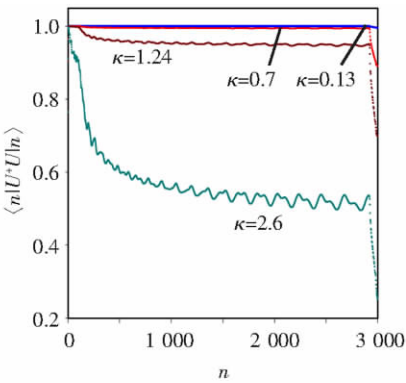


图 5 不同 κ 值下平均值 $\langle n | U^+ U | n \rangle$ 随 n 的变化
Fig5 The average values $\langle n | U^+ U | n \rangle$ versus n for different κ values

[参考文献]

[1] Heller E J, O'Connor P W, Gehlen J. The eigenfunctions of classical chaotic systems [J]. Physica Scripta, 1989, 40: 354-359.
[2] 汪昭, 杨双波. 势阱中的混沌及量子对应 [J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2009, 31(3): 31.
[3] Wintgen D, Marzner H, Briggs J S. Properties of off-shell coulomb radial wave functions [J]. J Phys A, 1987, 20: L965-L968.
[4] Casati D, Chirikov B V, Ford J, et al. Stochastic behavior of a quantum pendulum under periodic perturbation [M]. Lect Notes Phys, 1979, 93: 334-352.

(下转第 82 页)

- electrochemical detection[J]. Journal of Pharmaceutical and Biomedical Analysis 2006 ,41: 493-499.
- [48] 靳淑萍,李萍,董树清,等. 毛细管电泳-电化学检测法测定黄芪及其制剂中的活性成分[J]. 色谱 2009 ,27(2): 229-232.
- [49] Zhou Xiaoguang ,Zheng Chunying ,Sun Jinying ,et al. Analysis of nephrotoxic and carcinogenic aristolochic acids in Aristolochia plants by capillary electrophoresis with electrochemical detection at a carbon fiber microdisk electrode [J]. Journal of Chromatography A ,2006 ,1109: 152-159.
- [50] Peng Youyuan ,Yuan Jianjun ,Liu Fanghua ,et al. Determination of active components in rosemary by capillary electrophoresis with electrochemical detection [J]. Journal of Pharmaceutical and Biomedical Analysis 2005 ,39: 431-437.
- [51] Zhou Xiaoguang ,Zheng Chunying ,Huang Jianshe ,et al. Identification of herb Acanthopanax senticosus (Rupr. Et Maxim.) harms by capillary electrophoresis with electrochemical detection [J]. Analytical Sciences 2007 ,23: 705-711.
- [52] Chen Gang ,Xu Xuejiao ,Zhu Yizhun ,et al. Determination of honokiol and magnolol in Cortex Magnoliae officinalis by capillary electrophoresis with electrochemical detection [J]. Journal of Pharmaceutical and Biomedical Analysis 2006 ,41: 1479-1484.
- [53] Zhou Guobin ,Guan Yueqing ,Chen Huizong ,et al. Simultaneous determination of pharmacologically active ingredients in Rhodiola by capillary chromatography with electrochemical detection [J]. Journal of Chromatography A ,2007 ,1142: 236-239.

[责任编辑: 顾晓天]

(上接第54页)

- [5] Komogrove A N. On conservation of conditionally periodic motion for small change in Hamilton function [J]. Dokl Akad Nauk SSSR ,1954 ,98: 527-530.
- [6] Arnold V I. Proof of a theorem of A. N. Komogrove of quasi-periodic motion [J]. Usp Mat Nauk SSSR ,1963 ,18: 13-40.
- [7] Moser J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus [J]. Nachr Akad Wiss Gottingen Math—Phys ,1962 ,K1: 1-20.
- [8] Zaslavsky G M ,Zakharov My ,Sagdeev R Z ,et al. Stochastic web and diffusion of particles in a magnetic field [J]. Sov Phys JEPT ,1986 ,64: 294-303.
- [9] Hu Bambi ,Li Baowen ,Liu Jie ,et al. Quantum chaos of a kicked particle in an infinite potential well [J]. Phys Rev Lett ,1999 ,82: 4 224-4 227.
- [10] Dana Itzhack ,Amit Maty. General approach to diffusion of periodically kicked charges in a magnetic field [J]. Phys Rev E ,1995 ,51: R2 731-R2 734.

[责任编辑: 顾晓天]