

P_1 非协调四边形元解 Stokes 问题的多重网格算法

黄萍^{1,2}, 王琛玮², 杨巨玲², 徐丹丹¹

(1. 中国人民解放军理工大学理学院, 江苏 南京 211101)

(2. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 研究了用 $\bar{P}_1 - Q_0$ 元(其中 \bar{P}_1 表示 P_1 非协调四边形元)解 Stokes 问题的多重网格算法. 由于 $\bar{P}_1 - Q_0$ 元不满足 LBB 条件, 因此其不能直接用来求解 Stokes 问题. 本文基于曾提出的一种 $\bar{P}_1 - Q_0$ 元解 Stokes 问题的非协调混合有限元稳定化逼近方法, 提出了 W 循环多重网格方法, 证明了该方法的最优收敛性. 最后给出的数值算例验证了该理论结果.

[关键词] P_1 非协调四边形元, Stokes 问题, 多重网格算法, 稳定化方法

[中图分类号] O241 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1001-4616(2012)01-0001-11

A Multigrid Method of P_1 Nonconforming Quadrilateral Finite Element for Solving Stokes Problem

Huang Ping^{1,2}, Wang Chenwei², Yang Juling², Xu Dandan¹

(1. Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)

(2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract: In this paper, we study the multigrid method of $\bar{P}_1 - Q_0$ elements (where \bar{P}_1 denotes P_1 nonconforming quadrilateral finite element) for solving Stokes problem. Since $\bar{P}_1 - Q_0$ elements violate the LBB condition, they can not be used for solving Stokes problem directly. Recently, we proposed a stabilized method of $\bar{P}_1 - Q_0$ elements for solving Stokes problem. Based on this stabilized method, we propose a W -cycle multigrid method, and show the optimal convergence of W -cycle multigrid method with a sufficiently large number of smoothing steps. Finally, numerical experiments are presented to confirm our theoretical results.

Key words: P_1 nonconforming quadrilateral finite element, Stokes problem, multigrid method, stabilized method

本文考虑了用 $\bar{P}_1 - Q_0$ 元(其中 \bar{P}_1 表示 P_1 非协调四边形元)解如下的齐次边界 Stokes 问题

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 上,} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 上,} \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \end{cases}$$

的多重网格算法, 其中 $\Omega \in \mathbf{R}^2$ 是一个有界单连通多角形区域, $\Gamma = \partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的.

\bar{P}_1 元最初是由 Park 在他的博士论文^[1]中提出的. 2003 年 Park 和 Sheen 在 [2] 中用 \bar{P}_1 元离散逼近二阶椭圆问题, 得到了最优误差估计. \bar{P}_1 元是一种只有 3 个自由度的非协调四边形元, 而 [3 ~ 5] 中介绍的非协调四边形元有 5 个或 4 个自由度, \bar{P}_1 元在所有的非协调四边形元中具有最少的自由度. 文 [6] 中指出, 将在单元上具有 4 个自由度的非协调矩形元应用在一般四边形剖分时, 其最优收敛阶要降低. 文 [2] 中提出对 \bar{P}_1 元采用一种非等参变换, 避免了最优收敛阶的降低. 但是 $\bar{P}_1 - Q_0$ 元不满足 LBB 条件, 因而不能直接用来求解 Stokes 问题^[2,7]. 我们在文 [8] 中利用标志 $\bar{P}_1 - Q_0$ 元 LBB 条件不足的那一项, 修正与 Stokes 问题的混合变分形式相对应的 Lagrange 函数, 得到一种修正的混合变分形式, 从而提出了一种 \bar{P}_1

收稿日期: 2011-11-07.

基金项目: 国家自然科学基金(10871100).

通讯联系人: 黄萍, 讲师, 研究方向: 偏微分方程数值解. E-mail: pinghuang1984@163.com

- Q_0 元解 Stokes 问题的非协调混合有限元稳定化逼近方法, 最终证明了这种方法的稳定性, 得到了最优误差估计.

多重网格算法提供了一种解有限元或有限差分代数方程的最优算法, 其已成为了求解大型科学与工程计算问题的最有效方法之一. 对于 \bar{P}_1 元, 文 [9] 研究了其解 Poisson 问题的有限体积方法和瀑布型多重网格算法. 在本文中, 我们基于 $\bar{P}_1 - Q_0$ 元解 Stokes 问题的非协调混合有限元稳定化方法, 提出了 W 循环多重网格算法, 证明了其最优收敛性. 最后给出数值算例验证了我们的理论结果.

1 P_1 非协调四边形元

设 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 是一个有界单连通多角形区域, $\Gamma = \partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, $\{J_k\}_{1 \leq k \leq K}$ 是 Ω 的一族拟一致正则四边形剖分^[10], 其中 J_{k+1} 是通过连接 J_k 中四边形对边中点得到的. 对任意的四边形 $Q \in J_k$, $b_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示 Q 的 4 个顶点, $m_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示 $\overline{b_{i-1}b_i}$ 的中点 (这里 $b_0 = b_4$), 设 $\hat{Q} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ 是一个参考单元, $\hat{b}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是它的四个顶点, 则存在 1 个惟一的可逆变换

$$F_Q: \hat{Q} \rightarrow Q, \quad F_Q(\hat{b}_i) = b_i, \quad 1 \leq i \leq 4.$$

记

$$h_k = \max\{\text{diam}(Q) \mid Q \in J_k\},$$

我们有 $h_k = h_1/2^{k-1}$. 设 $N_{k,Q}, N_{k,P}, N_{k,E}$ 分别表示剖分 J_k 上四边形数、结点数和边的个数, 特别地, 设 $N_{k,P}^i$ 表示剖分 J_k 上内部结点的个数. 记

$$\begin{aligned} P_k &= \{p_1, p_2, \dots, p_{N_{k,P}} \mid p_i \text{ 是剖分 } J_k \text{ 上的结点 } i = 1, 2, \dots, N_{k,P}\}, \\ P_k^i &= \{p_1, p_2, \dots, p_{N_{k,P}^i} \mid p_i \text{ 是剖分 } J_k \text{ 上的内部结点 } i = 1, 2, \dots, N_{k,P}^i\}, \\ E_k &= \{e_1, e_2, \dots, e_{N_{k,E}} \mid e_i \text{ 是剖分 } J_k \text{ 上的四边形的边 } i = 1, 2, \dots, N_{k,E}\}, \\ M_k &= \{m_1, m_2, \dots, m_{N_{k,E}} \mid m_i \text{ 是 } E_k \text{ 中某个边 } e_i \text{ 的中点 } i = 1, 2, \dots, N_{k,E}\}. \end{aligned}$$

如 [10] 中所定义, 对任意的整数 $m \geq 0$, 实数 $p \geq 1$, $H^{m,p}(\Omega)$ 表示 Sobolev 空间, $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 和 $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ 分别表示其范数和半范数, 当 $p = 2$ 时, 它们分别简记为 $H^m(\Omega)$, $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 和 $|\cdot|_{m,\Omega}$. $H_0^1(\Omega)$ 表示 $H^1(\Omega)$ 中在边界 Γ 上迹为 0 的函数所组成的空间, $L_0^2(\Omega)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中在 Ω 上积分为 0 的函数所组成的空间, C 表示一类与 h_k 无关的正常数.

为了方便起见, 下面我们来简单介绍一下有关 P_1 非协调四边形元的一些性质^[2]. 令 $P_1(Q) = \text{Span}\{1, x, y\}$, 我们有

引理 1 若 $u \in P_1(Q)$, 则 $u(m_1) + u(m_3) = u(m_2) + u(m_4)$. 反之, 若 $u_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 满足 $u_1 + u_3 = u_2 + u_4$, 则存在惟一的 $u \in P_1(Q)$, 使得 $u(m_i) = u_i (i = 1, 2, 3, 4)$.

引理 2 对 $1 \leq i \leq 4$, 定义 $\phi_i \in P_1(Q)$, 使得

$$\phi_i(m_j) = \begin{cases} 1, & j = i, i + 1 \pmod{4}, \\ 0, & \text{其他情况}, \end{cases}$$

则 $\text{span}\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\} = P_1(Q)$. 事实上 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ 中任意 3 个所张成的空间为 $P_1(Q)$.

定义 1 定义

$$\begin{aligned} NC^k &= \{v_k: \Omega \rightarrow R \mid v_k|_Q \in P_1(Q), \forall Q \in J_k, v_k \text{ 在任意的 } m \in M_k \setminus \Gamma \text{ 处连续}\}, \\ NC_0^k &= \{v_k \in NC^k \mid v_k(m) = 0, \forall m \in \Gamma \cap M_k\}. \end{aligned}$$

我们称 NC_0^k 为剖分 J_k 上的 P_1 非协调四边形元空间.

定义 2 设 p_j 是 J_k 中任一个结点, $M_k(j)$ 表示以 p_j 为端点的边的中点的集合. 定义 $\Phi_k^j (j = 1, 2, \dots, N_{k,P}) \in NC^k$, 使得

$$\Phi_k^j(m) = \begin{cases} 1, & \text{若 } m \in M_k(j), \\ 0, & \text{若 } m \in M_k \setminus M_k(j). \end{cases} \quad (1)$$

事实上 $\Phi_k^j (j = 1, 2, \dots, N_{k,P})$ 就是 NC^k 的基函数.

定义 3 定义插值算子 $\Pi_k: H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow NC_0^k$, 使得

$$\Pi_k v(m) = \frac{1}{2}(v(p_1) + v(p_2)) , \quad \forall m \in M_k , \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) ,$$

其中 p_1, p_2 是 m 所在边的两个端点.

注1 类似地, 令 $\mathbf{H}^2(\Omega) = (H^2(\Omega))^2$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^2$, 对任意的 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, 有

$$\Pi_k \mathbf{v}(m) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}(p_1) + \mathbf{v}(p_2)) , \quad \forall m \in M_k ,$$

其中 p_1, p_2 是 m 所在边的两个端点.

引理3 对任意的 $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 有

$$\|\phi - \Pi_k \phi\|_{0,\Omega} + h_k \left(\sum_{Q \in J_k} \|\phi - \Pi_k \phi\|_{1,Q}^2 \right)^{1/2} \leq Ch_k^2 \|\phi\|_{2,\Omega} .$$

2 解 Stokes 问题的 P_1 非协调四边形元的稳定化方法

下面简要介绍一下我们在 [8] 中的主要工作. 我们考虑如下的齐次边界 Stokes 问题

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} , & \text{在 } \Omega \text{ 上} , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , & \text{在 } \Omega \text{ 上} , \\ \mathbf{u} = 0 , & \text{在 } \Gamma \text{ 上} . \end{cases} \quad (2)$$

(2) 的混合变分形式为: 求 $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) , & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) , \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 , & \forall q \in L_0^2(\Omega) , \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx , \\ b(\mathbf{v}, p) &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx , \\ F(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx . \end{aligned}$$

定义4 对于给定的结点 $p_i \in J_k$, 设 Ω_i 为以它为公共顶点的宏元, 对任意的 $q \in L^2(\Omega)$, 取 $q_i = Q_i q$, 其中 Q_i 是 $L^2(\Omega_i) \rightarrow R$ 的 L^2 投影, 即取

$$q_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} q \, dx .$$

定义

$$\Pi_k^1 q = \sum_{i=1}^{N_{k,p}} q_i \phi_i ,$$

其中 $\phi_i (i = 1, 2, \dots, N_{k,p})$ 表示剖分 J_k 上双线性元的结点基.

记 $\mathbf{V}_k = \mathbf{NC}_0^k = (\mathbf{NC}_0^k)^2$, $\mathbf{S}_k = \{q \in L^2(\Omega) \mid q|_Q \in P_0(Q), \forall Q \in J_k\}$, $\hat{\mathbf{S}}_k = \mathbf{S}_k \cap L_0^2(\Omega)$. 我们所得到的非协调混合有限元稳定化离散逼近格式为: 求 $(\mathbf{u}_k, p_k) \in \mathbf{V}_k \times \hat{\mathbf{S}}_k$, 使得

$$\tilde{Q}_k(\mathbf{u}_k, p_k; \mathbf{v}_k, q_k) = F(\mathbf{v}_k, q_k) , \quad \forall (\mathbf{v}_k, q_k) \in \mathbf{V}_k \times \hat{\mathbf{S}}_k , \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k(\mathbf{u}_k, p_k; \mathbf{v}_k, q_k) &= a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + b_k(\mathbf{v}_k, p_k) + b_k(\mathbf{u}_k, q_k) - G(p_k, q_k) , \\ a_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) &= \int_{\Omega} \nabla_k \mathbf{u}_k : \nabla_k \mathbf{v}_k \, dx , \\ b_k(\mathbf{v}_k, p_k) &= - \int_{\Omega} p_k \nabla_k \cdot \mathbf{v}_k \, dx , \\ G(p_k, q_k) &= \int_{\Omega} (p_k - \Pi_k^1 p_k) (q_k - \Pi_k^1 q_k) , \\ F(\mathbf{v}_k, q_k) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_k \, dx , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_k \mathbf{v}_k) |_Q &= \nabla(\mathbf{v}_k |_Q), \\ (\nabla_k \cdot \mathbf{v}_k) |_Q &= \nabla \cdot (\mathbf{v}_k |_Q). \end{aligned}$$

记

$$\|\mathbf{v}\|_k = \left\{ \sum_{Q \in J_k} |\mathbf{v}|_{1,Q}^2 \right\}^{1/2}.$$

定理1 对任意的 $(\mathbf{u}_k, p_k) \in \mathbf{V}_k \times S_k$, 有

$$\sup_{(\mathbf{v}_k, q_k) \in \mathbf{V}_k \times S_k} \frac{\tilde{Q}_k(\mathbf{u}_k, p_k; \mathbf{v}_k, q_k)}{\|\mathbf{v}_k\|_k + \|q_k\|_{0,\Omega}} \geq C(\|\mathbf{u}_k\|_k + \|p_k\|_{0,\Omega}).$$

定理2 存在惟一的 $(\mathbf{u}_k, p_k) \in \mathbf{V}_k \times S_k$, 满足

$$\tilde{Q}_k(\mathbf{u}_k, p_k; \mathbf{v}_k, q_k) = F(\mathbf{v}_k, q_k), \quad \forall (\mathbf{v}_k, q_k) \in \mathbf{V}_k \times S_k.$$

定理3 设 $(\mathbf{u}, p) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ 和 $(\mathbf{u}_k, p_k) \in \mathbf{V}_k \times S_k$ 分别是问题(3)和(4)的解, 则

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_k + \|p - p_k\|_{0,\Omega} \leq Ch_k(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|p\|_{1,\Omega}).$$

3 网格转移算子和网格相关范数

设 π_k^0 是从 $L^2(\Omega)$ 到 S_k 的正交投影算子, 即对任意的 $q \in L^2(\Omega)$, 有

$$\pi_k^0 q |_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q q dx, \quad \forall Q \in J_k,$$

则易得

$$\nabla_k \cdot (\Pi_k \mathbf{v}) = \pi_k^0(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

下面我们来定义网格转移算子和网格相关范数, 有关网格转移算子的估计在多重网格分析中有着十分重要的地位.

定义5 定义 J_{k-1}^k 是从 \mathbf{V}_{k-1} 到 \mathbf{V}_k 的算子, 对任意的 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{k-1}$, 设

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_{k-1}^P} \mathbf{v}_j \Phi_{k-1}^j,$$

令

$$J_{k-1}^k \mathbf{v} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_k^P} \mathbf{w}_j \Phi_k^j \in \mathbf{V}_k,$$

对任意的 $p_j \in P_k^i$,

$$\mathbf{w}_j = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{v}(m_t), & p_j \in P_{k-1}^i, \\ \mathbf{v}(p_j), & \text{其他情况,} \end{cases}$$

其中 N 表示剖分 J_{k-1} 中以 p_j 为顶点的边的个数, $m_t (t = 1, 2, \dots, N)$ 表示这些边的中点.

定义6 定义粗网格到细网格的转移算子为

$$I_{k-1}^k: \mathbf{V}_{k-1} \times S_{k-1} \rightarrow \mathbf{V}_k \times S_k,$$

使得

$$I_{k-1}^k(\mathbf{v}, q) = (J_{k-1}^k \mathbf{v}, q), \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_{k-1} \times S_{k-1}. \tag{5}$$

定义7 定义网格相关内积为

$$((\mathbf{v}_1, q_1) | (\mathbf{v}_2, q_2))_k = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)_{L^2(\Omega)} + h_k^2(q_1, q_2)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall (\mathbf{v}_1, q_1) | (\mathbf{v}_2, q_2) \in \mathbf{V}_k \times S_k.$$

定义8 定义细网格到粗网格的转移算子为

$$I_k^{k-1}: \mathbf{V}_k \times S_k \rightarrow \mathbf{V}_{k-1} \times S_{k-1},$$

使得

$$\begin{aligned} (I_k^{k-1}(\mathbf{v}_1, q_1) | (\mathbf{v}_2, q_2))_{k-1} &= ((\mathbf{v}_1, q_1) | I_{k-1}^k(\mathbf{v}_2, q_2))_k, \\ \forall (\mathbf{v}_1, q_1) \in \mathbf{V}_k \times S_k | (\mathbf{v}_2, q_2) \in \mathbf{V}_{k-1} \times S_{k-1}. \end{aligned}$$

引理4 网格转移算子 I_{k-1}^k 和 I_k^{k-1} 有如下性质

(1) 对任意的 $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_k \times S_k, (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$ 的充分必要条件为

$$((\mathbf{v}, q), (\mathbf{0}, 1))_k = 0.$$

(2) 对任意的 $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_{k-1} \times S_{k-1}$, 有

$$(I_{k-1}^k(\mathbf{v}, q), (\mathbf{0}, 1))_k = \frac{1}{4}((\mathbf{v}, q), (\mathbf{0}, 1))_{k-1}.$$

(3) 对任意的 $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_{k-1} \times \hat{S}_{k-1}$, 有

$$I_{k-1}^k(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k.$$

(4) 对任意的 $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$, 有

$$I_k^{k-1}(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_{k-1} \times \hat{S}_{k-1}.$$

引理的证明是显然的, 这里不再赘述.

定义 9 定义算子

$$B_k: \mathbf{V}_k \times S_k \rightarrow \mathbf{V}_k \times S_k,$$

使得

$$(B_k(\mathbf{v}_1, q_1), (\mathbf{v}_2, q_2))_k = \tilde{Q}_k(\mathbf{v}_1, q_1; \mathbf{v}_2, q_2), \quad \forall (\mathbf{v}_1, q_1), (\mathbf{v}_2, q_2) \in \mathbf{V}_k \times S_k.$$

引理 5 $\mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$ 是 B_k 作用下的不变子空间, 即

$$B_k: \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k \rightarrow \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k.$$

证明 注意到

$$\int_{\Omega} \nabla_k \cdot \mathbf{v} dx = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_k,$$

对任意的 $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$, 有

$$(B_k(\mathbf{v}, q), (\mathbf{0}, 1))_k = \tilde{Q}_k(\mathbf{v}, q; \mathbf{0}, 1) = - \int_{\Omega} \nabla_k \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} (q - \Pi_k^1 q)(1 - \Pi_k^1) dx = 0, \quad (6)$$

由引理 4(1) 和(6) 知 $B_k(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$.

由引理 5, 我们可以定义

$$\hat{B}_k: \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k \rightarrow \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k,$$

其为算子 B_k 在 $\mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$ 上的限制.

引理 6 设 $\rho(\hat{B}_k)$ 表示算子 \hat{B}_k 的谱半径, 则

$$\rho(\hat{B}_k) \leq Ch_k^{-2} \quad k = 1, 2, \dots$$

定义 10 定义网格相关范数为

$$\| \| (\mathbf{v}, q) \| \|_{s, k} = ((\hat{B}_k^2)^{s/2}(\mathbf{v}, q), (\mathbf{v}, q))_k^{1/2}, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k. \quad (7)$$

类似于 [11], 我们有如下引理.

引理 7 (7) 所定义的网格相关范数有如下性质

(1) 对任意的 $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$, 有

$$\| \| (\mathbf{v}, q) \| \|_{0, k} = (\| \mathbf{v} \|_{0, \Omega}^2 + h_k^2 \| q \|_{0, \Omega}^2)^{1/2}. \quad (8)$$

(2) 对任意的 $(\mathbf{v}_1, q_1), (\mathbf{v}_2, q_2) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$, 有

$$| \tilde{Q}_k(\mathbf{v}_1, q_1; \mathbf{v}_2, q_2) | \leq \| \| (\mathbf{v}_1, q_1) \| \|_{2, k} \| \| (\mathbf{v}_2, q_2) \| \|_{0, k}.$$

(3) 对任意的 $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$, 有

$$\| \| (\mathbf{v}, q) \| \|_{2, k} = \sup_{(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{q}) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k} \frac{\tilde{Q}_k(\mathbf{v}, q; \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{q})}{\| \| (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{q}) \| \|_{0, k}}.$$

定义 11 定义算子

$$P_k^{k-1}: \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k \rightarrow \mathbf{V}_{k-1} \times \hat{S}_{k-1}.$$

对任意的 $(\mathbf{v}_1, q_1) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k, (\mathbf{v}_2, q_2) \in \mathbf{V}_{k-1} \times \hat{S}_{k-1}$, 有

$$\tilde{Q}_{k-1}(P_k^{k-1}(\mathbf{v}_1, q_1); (\mathbf{v}_2, q_2)) = \tilde{Q}_k((\mathbf{v}_1, q_1); I_{k-1}^k(\mathbf{v}_2, q_2)).$$

4 多重网格算法

定义 12 定义 $f_k \in \mathbf{V}_k$, 使得

$$(f_k, \nu_k)_{L^2(\Omega)} = (f, \nu_k)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \nu_k \in V_k.$$

我们首先在 k 层上定义如下多重网格算法. 对于方程

$$\hat{B}_k(y, z) = (w, g), \tag{9}$$

设 $MG(k, (y_0, z_0), (w, g))$ 是其在 k 层上的多重网格迭代解, 其中 $(y_0, z_0) \in V_k \times S_k$ 为初值.

(1) 当 $k = 1$ 时, $MG(1, (y_0, z_0), (w, g))$ 可直接求解而得, 即

$$MG(1, (y_0, z_0), (w, g)) = \hat{B}_1^{-1}(w, g).$$

(2) 当 $k > 1$ 时, $MG(k, (y_0, z_0), (w, g))$ 递归定义如下:

(i) 光滑步. 置

$$(y_l, z_l) = (y_{l-1}, z_{l-1}) + \frac{1}{\Lambda_k} B_k((w, g) - B_k(y_{l-1}, z_{l-1})), \quad 1 \leq l \leq m,$$

其中 m 是一个与 k 无关的正常数, $\Lambda_k = Ch_k^{-4}$ 表示 \hat{B}_k^2 的谱半径.

(ii) 校正步. 置

$$(\bar{w}, \bar{g}) = I_k^{-1}((w, g) - \hat{B}_k(y_m, z_m)),$$

$$(v_0, q_0) = (0, \rho),$$

$$(v_i, q_i) = MG(k-1, (y_{i-1}, q_{i-1}), (\bar{w}, \bar{g})), \quad i = 1, 2.$$

(3) 最后多重网格迭代解定义为

$$MG(k, (y_0, z_0), (w, g)) = (y_m, z_m) + I_{k-1}^k(v_2, q_2).$$

完全多重网格算法是上述算法的一个套迭代. 设 $(\hat{u}_{k-1}, \hat{p}_{k-1})$ 是 $k-1$ 层上方程 $\hat{B}_{k-1}(u_{k-1}, p_{k-1}) = (f_{k-1}, \rho)$ 的多重网格迭代解, 从而可以在 k 层上利用 $I_{k-1}^k(\hat{u}_{k-1}, \hat{p}_{k-1})$ 为初值进行 r 次 k 层上的多重网格迭代, 以此得到 k 层上的多重网格迭代解 (\hat{u}_k, \hat{p}_k) , 以此类推, 最后得到所要求精度的迭代解, 具体格式如下.

(1) 当 $k = 1$ 时, 置

$$(\hat{u}_1, \hat{p}_1) = \hat{B}_1^{-1}(f_1, \rho).$$

(2) 当 $k > 2$ 时, 置

(i) $(u_k^0, p_k^0) = I_{k-1}^k(\hat{u}_{k-1}, \hat{p}_{k-1}),$

(ii) $(u_k^l, p_k^l) = MG(k, (u_k^{l-1}, p_k^{l-1}), (f_k, \rho)), \quad 1 \leq l \leq r.$

(iii) $(\hat{u}_k, \hat{p}_k) = (u_k^r, p_k^r).$

5 收敛性分析

引理 8^[11] 对任意的 $v \in NC^k$, 任意的 $Q \in J_k$ (如图 1), 设

$$v|_Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 v_i \Phi_i,$$

其中 $\Phi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是 NC^k 对应于 Q 的顶点 b_i 的基函数, 则存在正常数 C_1 和 C_2 , 使得

$$C_1 \{ (v_1 - v_3)^2 + (v_2 - v_4)^2 \} \leq |v|_{1,Q}^2 \leq C_2 \{ (v_1 - v_3)^2 + (v_2 - v_4)^2 \}.$$

注 2 引理 8 的结论对相应的向量值函数空间仍然成立.

下面我们来分析上节所定义的多重网格算法的收敛性. 我们有如下 4 个关于网格转移算子的估计, 再由 [12] 中的理论框架就可得收敛性. 设 $k-1$ 层剖分 J_{k-1} 上有一个不重叠的宏元剖分 T_{k-1} , 事实上当 $k \geq 3$ 时, T_{k-1} 可取为 J_{k-2} (如图 2), 则对任意的 $Q \in J_k$, 存在唯一的 $T \in T_{k-1}$, 使得 $Q \subset T$.

引理 9 对任意的 $v \in V_{k-1}$, 有

$$\| J_{k-1}^k v \|_{0,\Omega} \leq C \| v \|_{0,\Omega}.$$

证明 对任意的 $v \in V_{k-1}$, 记 $w = J_{k-1}^k v \in V_k$, 对任意的 $Q \in J_k$ (如图 1), 设

$$w|_Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 w_i \Phi_i, \tag{10}$$

其中 $\Phi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是剖分 J_k 上 NC^k 对应于 Q 的顶点 b_i 的基函数. 设 $T \in T_{k-1}, Q \subset T$.

下面我们来估计 $\|J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega}$, 由(1) 和(10) 我们有如下估计

$$\|J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 = \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}^2 \leq Ch_k^2 \sum_{i=1}^4 \mathbf{w}^2(m_i) \leq Ch_k^2 \sum_{i=1}^4 \mathbf{w}_i^2.$$

(1) 若 Q 有一个顶点是剖分 J_{k-1} 上的内部结点, 如图 3 中的 Q_4 , 其有 1 个顶点 $b_3 \in P_{k-1}^i$, 则

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}(M_1) + \mathbf{v}(M_3)}{2} \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}(M_3) \quad \mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{v}(M_3) + \mathbf{v}(M_4) + \mathbf{v}(M_5) + \mathbf{v}(M_6)}{4} \quad \mathbf{w}_4 = \mathbf{v}(M_4),$$

所以

$$\|J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \leq Ch_k^2 \sum_{i=1}^6 \mathbf{v}^2(M_i) \leq C \|\mathbf{v}\|_{0,T}^2.$$

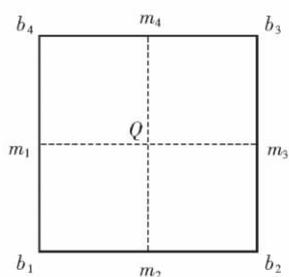


图 1 剖分 J_k 中任意的单元 Q

Fig.1 Arbitrary element Q in the subdivision J_k

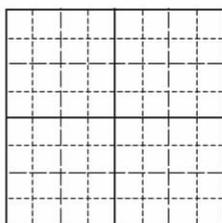


图 2 宏元剖分 T_{k-1}

Fig.2 The macroelement subdivision T_{k-1}

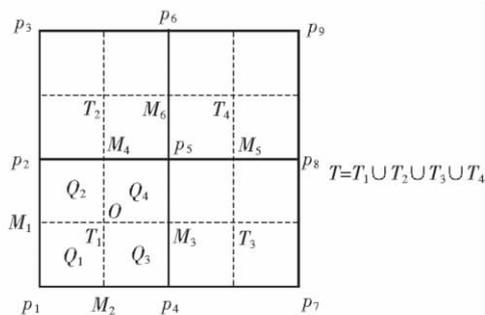


图 3 剖分 J_{k-1} 上的结点

Fig.3 The vertices of subdivision J_{k-1}

(2) 若 Q 有 3 个顶点都在 Γ 上, 如图 3 中的 Q_1 , 其 3 个顶点 b_1, b_2, b_4 都是边界点, 则

$$\mathbf{w}_1 = 0 \quad \mathbf{w}_2 = 0 \quad \mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{v}(M_1) + \mathbf{v}(M_3)}{2} = \frac{\mathbf{v}(M_3)}{2} \quad \mathbf{w}_4 = 0,$$

所以

$$\|J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \leq C \|\mathbf{v}\|_{0,T_1}^2 \leq C \|\mathbf{v}\|_{0,T}^2.$$

(3) 同理, 若 Q 有且只有两个顶点在 Γ 上, 如图 3 中的 Q_2 和 Q_3 , 有

$$\|J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 \leq C \|\mathbf{v}\|_{0,T}^2.$$

综上所述, 可得

$$\|J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{v}\|_{0,T}, \quad \forall Q \in J_k,$$

则

$$\|J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{k-1}.$$

从而引理得证.

引理 10 对任意的 $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_{k-1} \times \hat{S}_{k-1}$, 有

$$\|I_{k-1}^k(\mathbf{v}, q)\|_{0,k} \leq \|C(\mathbf{v}, q)\|_{0,k-1}.$$

证明 由(5), (8) 和引理 9 可知

$$\|I_{k-1}^k(\mathbf{v}, q)\|_{0,k}^2 = \|(J_{k-1}^k \mathbf{v}, q)\|_{0,k}^2 = \|J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + h_k^2 \|q\|_{0,\Omega}^2 \leq C(\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + h_{k-1}^2 \|q\|_{0,\Omega}^2) = C\|C(\mathbf{v}, q)\|_{0,k-1}^2.$$

从而引理得证.

引理 11 对任意的 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{k-1}$, 有

$$\|\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq Ch_k \|\mathbf{v}\|_{k-1}.$$

证明 对任意的 $Q \in J_k$ (如图 1), 设 $T \in T_{k-1}, Q \subset T$ (不妨设 $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, 如图 3), 对任意的 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{k-1}$, 设

$$J_{k-1}^k \mathbf{v}|_Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \mathbf{w}_i \Phi_k^i, \tag{11}$$

$$\mathbf{v}|_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 \mathbf{v}_i \Phi_{k-1}^i. \tag{12}$$

其中 $\Phi_k^i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是 J_k 上 NC^k 对应于 Q 的顶点 b_i 的基函数, $\Phi_{k-1}^i (i = 1, 2, \dots, 9)$ 是 J_{k-1} 上 NC^{k-1} 对应于 T 上结点 p_i 的基函数.

(1) 若 Q 有一个顶点是剖分 J_{k-1} 上的内部结点, 如图 3 中的 Q_4 , 其有一个顶点 $b_3 \in P_{k-1}^i$, 则

$$w_2 = \frac{v_4 + v_5}{2}, \tag{13}$$

$$w_3 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{v_2 + v_5}{2} + \frac{v_4 + v_5}{2} + \frac{v_6 + v_5}{2} + \frac{v_8 + v_5}{2} \right\} = \frac{v_5}{2} + \frac{v_2 + v_4 + v_6 + v_8}{8}, \tag{14}$$

$$w_4 = \frac{v_2 + v_5}{2}. \tag{15}$$

由(1) 和(12) 知

$$v|_Q(b_2) = \frac{v_4 + v_5}{2}, \tag{16}$$

$$v|_Q(b_3) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_4 + \frac{3}{2}v_5 \right\} = -\frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_4 + \frac{3}{4}v_5, \tag{17}$$

$$v|_Q(b_4) = \frac{v_2 + v_5}{2}. \tag{18}$$

又由(12) ,(16) ,(17) 和(18) , 可得

$$v|_Q(m_3) = \frac{v|_Q(b_2) + v|_Q(b_3)}{2} = -\frac{1}{8}v_1 + \frac{1}{8}v_2 + \frac{3}{8}v_4 + \frac{5}{8}v_5, \tag{19}$$

$$v|_Q(m_4) = \frac{v|_Q(b_3) + v|_Q(b_4)}{2} = -\frac{1}{8}v_1 + \frac{3}{8}v_2 + \frac{1}{8}v_4 + \frac{5}{8}v_5. \tag{20}$$

由(11) ,(13) ,(14) 和(15) , 可得

$$J_{k-1}^k v|_Q(m_3) = \frac{w_2 + w_3}{2} = \frac{5}{16}v_4 + \frac{1}{2}v_5 + \frac{v_2 + v_6 + v_8}{16}, \tag{21}$$

$$J_{k-1}^k v|_Q(m_4) = \frac{w_3 + w_4}{2} = \frac{5}{16}v_2 + \frac{1}{2}v_5 + \frac{v_4 + v_6 + v_8}{16}. \tag{22}$$

由(19) 和(21) , 可得

$$\begin{aligned} (v - J_{k-1}^k v)|_Q(m_3) &= -\frac{v_1}{8} + \frac{v_2}{16} + \frac{v_4}{16} + \frac{v_5}{8} - \frac{v_6}{16} - \frac{v_8}{16} = \\ &= \frac{1}{16}(-2v_1 + v_2 + v_4 + 2v_5 - v_6 - v_8) \leq \frac{1}{16}(2|v_1 - v_5| + |v_2 - v_6| + |v_4 - v_8|), \end{aligned} \tag{23}$$

由(20) 和(22) , 可得

$$(v - J_{k-1}^k v)|_Q(m_4) \leq \frac{1}{16}(2|v_1 - v_5| + |v_2 - v_6| + |v_4 - v_8|). \tag{24}$$

注意到

$$(v - J_{k-1}^k v)|_Q(m_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

由引理 8 ,(23) 和(24) , 可得

$$\begin{aligned} \|v - J_{k-1}^k v\|_{0,Q}^2 &\leq Ch_k^2 \sum_{i=1}^4 ((v - J_{k-1}^k v)|_Q(m_i))^2 = Ch_k^2 \{ ((v - J_{k-1}^k v)|_Q(m_3))^2 + \\ &+ ((v - J_{k-1}^k v)|_Q(m_4))^2 \} \leq Ch_k^2 \{ (v_1 - v_5)^2 + (v_2 - v_6)^2 + (v_4 - v_8)^2 \} \leq Ch_k^2 \sum_{i=1}^4 |v|_{1,T_i}^2. \end{aligned}$$

(2) 若 Q 有且只有两个顶点在 Γ 上, 如图 3 中的 Q_2 , 则

$$w_3 = \frac{v_2 + v_5}{2}, \tag{25}$$

$$w_4 = 0. \tag{26}$$

由(1) 和(12) 知

$$v|_Q(b_1) = 0, \tag{27}$$

$$\mathbf{v} |_{\varrho}(b_3) = \frac{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5}{2}, \quad (28)$$

$$\mathbf{v} |_{\varrho}(b_4) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_1 + \frac{3}{2} \mathbf{v}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_4 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_5 \right) = \frac{1}{4} \mathbf{v}_1 + \frac{3}{4} \mathbf{v}_2 - \frac{1}{4} \mathbf{v}_4 + \frac{1}{4} \mathbf{v}_5. \quad (29)$$

又由(12) ,(27) ,(28) 和(29) ,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{v} |_{\varrho}(m_1) &= \frac{\mathbf{v}_{\varrho}(b_1) + \mathbf{v}_{\varrho}(b_4)}{2} = \frac{1}{8} \mathbf{v}_1 + \frac{3}{8} \mathbf{v}_2 - \frac{1}{8} \mathbf{v}_4 + \frac{1}{8} \mathbf{v}_5, \\ \mathbf{v} |_{\varrho}(m_4) &= \frac{\mathbf{v}_{\varrho}(b_3) + \mathbf{v}_{\varrho}(b_4)}{2} = \frac{1}{8} \mathbf{v}_1 + \frac{5}{8} \mathbf{v}_2 - \frac{1}{8} \mathbf{v}_4 + \frac{3}{8} \mathbf{v}_5, \end{aligned} \quad (30)$$

由(11) ,(25) 和(26) 知

$$J_{k-1}^k \mathbf{v} |_{\varrho}(m_4) = \frac{\mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4}{2} = \frac{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5}{4}. \quad (31)$$

注意到 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, $J_{k-1}^k \mathbf{v} |_{\varrho}(m_1) = \mathbf{0}$,则

$$(\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}) |_{\varrho}(m_1) = \frac{1}{8} \mathbf{v}_1 + \frac{3}{8} \mathbf{v}_2 - \frac{1}{8} \mathbf{v}_4 + \frac{1}{8} \mathbf{v}_5 \leq \frac{1}{8} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_5), \quad (32)$$

由(30) 和(31) ,可得

$$(\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}) |_{\varrho}(m_4) = \frac{1}{8} \mathbf{v}_1 + \frac{3}{8} \mathbf{v}_2 - \frac{1}{8} \mathbf{v}_4 + \frac{1}{8} \mathbf{v}_5 \leq \frac{1}{8} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_5). \quad (33)$$

注意到

$$(\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}) |_{\varrho}(m_i) = \mathbf{0}, \quad i = 2, 3,$$

由引理 8 ,(32) 和(33) ,可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\varrho}^2 &\leq Ch_k^2 \sum_{i=1}^4 ((\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}) |_{\varrho}(m_i))^2 = Ch_k^2 \{ ((\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}) |_{\varrho}(m_1))^2 + \\ &((\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}) |_{\varrho}(m_4))^2 \} \leq Ch_k^2 \{ (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_5)^2 \} \leq Ch_k^2 |\mathbf{v}|_{1,T_1}^2. \end{aligned}$$

(3) 同理,若 Q 有 3 个顶点在 Γ 上,如图 3 中 Q_1 ,则

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\varrho}^2 &\leq Ch_k^2 \sum_{i=1}^4 ((\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}) |_{\varrho}(m_i))^2 = \\ Ch_k^2 \{ ((\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}) |_{\varrho}(m_1))^2 + ((\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}) |_{\varrho}(m_2))^2 \} &\leq Ch_k^2 |\mathbf{v}|_{1,T_1}^2. \end{aligned}$$

综上所述,我们有

$$\|\mathbf{v} - J_{k-1}^k \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq Ch_k \|\mathbf{v}\|_{k-1}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{k-1}.$$

从而引理得证.

引理 12 对任意的 $(\mathbf{v}, q) \in (\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$,有

$$\|I_{k-1}^k(\Pi_{k-1} \mathbf{v}, \pi_{k-1}^0 q) - (\Pi_k \mathbf{v}, \pi_k^0 q)\|_{0,k} \leq Ch_k^2 \{ |\mathbf{v}|_{2,\Omega} + |q|_{1,\Omega} \}.$$

证明 对任意的 $Q \in J_k$ (如图 1) ,设 $T \in T_{k-1}$, $Q \subset T$ (不妨设 $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$,如图 3) .设

$$\begin{aligned} J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{v} &= \mathbf{w}, \\ \mathbf{w} |_{\varrho} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \mathbf{w}_i \Phi_i^k, \end{aligned}$$

其中 Φ_i^k ($i = 1, 2, 3, 4$) 是剖分 J_k 上 NC^k 对应于 Q 的 4 个顶点 b_i 的基函数. 若 Q 有 1 个顶点是剖分 J_{k-1} 上的内部结点,如图 3 中的 Q_4 ,其有 1 个顶点 $b_3 \in P_{k-1}^i$.由定义 3 和 5 ,可得

$$J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{v} |_{\varrho}(m_1) = \frac{1}{8} \mathbf{v}(p_1) + \frac{3}{8} \mathbf{v}(p_2) + \frac{1}{8} \mathbf{v}(p_4) + \frac{3}{8} \mathbf{v}(p_5), \quad (34)$$

$$J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{v} |_{\varrho}(m_2) = \frac{1}{8} \mathbf{v}(p_1) + \frac{1}{8} \mathbf{v}(p_2) + \frac{3}{8} \mathbf{v}(p_4) + \frac{3}{8} \mathbf{v}(p_5), \quad (35)$$

$$J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{v} |_{\varrho}(m_3) = \frac{5}{16} \mathbf{v}(p_4) + \frac{1}{2} \mathbf{v}(p_5) + \frac{\mathbf{v}(p_2) + \mathbf{v}(p_6) + \mathbf{v}(p_8)}{16}, \quad (36)$$

$$J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{v} |_{\varrho}(m_4) = \frac{5}{16} \mathbf{v}(p_2) + \frac{1}{2} \mathbf{v}(p_5) + \frac{\mathbf{v}(p_4) + \mathbf{v}(p_6) + \mathbf{v}(p_8)}{16}, \quad (37)$$

$$\Pi_k \mathbf{v} \big|_Q(m_1) = \frac{\mathbf{v}(M_4) + \mathbf{v}(O)}{2}, \tag{38}$$

$$\Pi_k \mathbf{v} \big|_Q(m_2) = \frac{\mathbf{v}(O) + \mathbf{v}(M_3)}{2}, \tag{39}$$

$$\Pi_k \mathbf{v} \big|_Q(m_3) = \frac{\mathbf{v}(P_5) + \mathbf{v}(M_3)}{2}, \tag{40}$$

$$\Pi_k \mathbf{v} \big|_Q(m_4) = \frac{\mathbf{v}(P_5) + \mathbf{v}(M_4)}{2}, \tag{41}$$

所以对任意的 $\mathbf{P}_1 \in \mathbf{P}_1(T)$, 由(34) ~ (41), 我们有

$$(J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{P}_1 - \Pi_k \mathbf{P}_1) \big|_Q(m_i) = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{42}$$

由(42) 知

$$\begin{aligned} \|J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{v} - \Pi_k \mathbf{v}\|_{0,Q}^2 &\leq Ch_k^2 \sum_{i=1}^4 ((J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{v} - \Pi_k \mathbf{v}) \big|_Q(m_i))^2 = \\ Ch_k^2 \sum_{i=1}^4 ((J_{k-1}^k \Pi_{k-1}(\mathbf{v} + \mathbf{P}_1) - \Pi_k(\mathbf{v} + \mathbf{P}_1)) \big|_Q(m_i))^2 &\leq Ch_k^2 \inf_{\mathbf{P}_1 \in \mathbf{P}_1(T)} \|\mathbf{v} + \mathbf{P}_1\|_{0,\infty,T}^2. \end{aligned} \tag{43}$$

由 Scaling 技巧, 商空间全范数和半范数的等价性以及嵌入定理^[13], 有

$$\inf_{\mathbf{P}_1 \in \mathbf{P}_1(T)} \|\mathbf{v} + \mathbf{P}_1\|_{0,\infty,T} \leq C \inf_{\hat{\mathbf{P}}_1 \in \hat{\mathbf{P}}_1(T)} \|\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{P}}_1\|_{0,\infty,T} \leq C \inf_{\hat{\mathbf{P}}_1 \in \hat{\mathbf{P}}_1(T)} \|\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{P}}_1\|_{2,T} \leq C |\hat{\mathbf{v}}|_{2,T} \leq Ch_k |\mathbf{v}|_{2,T}, \tag{44}$$

根据(43) 和(44), 可得

$$\|J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{v} - \Pi_k \mathbf{v}\|_{0,Q} \leq Ch_k^2 |\mathbf{v}|_{2,T}. \tag{45}$$

当 Q 有且只有两个顶点在 Γ 上或有 3 个顶点在 Γ 上时, 同理可得(45), 所以

$$\|J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{v} - \Pi_k \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq Ch_k^2 |\mathbf{v}|_{2,\Omega}.$$

由正交投影算子的性质知

$$\|\pi_k^0 q - q\|_{0,\Omega} \leq Ch_k |q|_{1,\Omega}.$$

所以

$$\begin{aligned} \|\|I_{k-1}^k(\Pi_{k-1} \mathbf{v} \pi_{k-1}^0 q) - (\Pi_k \mathbf{v} \pi_k^0 q)\|\|_{0,k} &= \{ \|J_{k-1}^k \Pi_{k-1} \mathbf{v} - \Pi_k \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + h_k^2 \|\pi_{k-1}^0 q - \pi_k^0 q\|_{0,\Omega}^2 \}^{1/2} \leq \\ \{ Ch_k^4 |\mathbf{v}|_{2,\Omega}^2 + h_k^2 \|\pi_{k-1}^0 q - q\|_{0,\Omega}^2 + h_k^2 \|q - \pi_k^0 q\|_{0,\Omega}^2 \}^{1/2} &\leq Ch_k^2 \{ |\mathbf{v}|_{2,\Omega} + |q|_{1,\Omega} \}. \end{aligned}$$

从而引理得证.

由引理 9 ~ 12, 我们可利用 [12] 中的理论框架, 直接得如下几个定理.

定理 4 设 $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$ 是(9) 的解, $(\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$ 是(9) 的 2 层网格迭代解, $(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$ 是迭代初值, 我们有

$$\|\|(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*, \mathbf{z} - \mathbf{z}^*)\|\|_{0,k} \leq Cm^{-1/2} \|\|(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0, \mathbf{z} - \mathbf{z}_0)\|\|_{0,k}.$$

定理 5 设 $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$ 是(9) 的解, $MG(k, (\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0), (\mathbf{w}, \mathbf{g})) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$ 是(9) 的 k 层多重网格迭代解, 则

$$\|\|(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - MG(k, (\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0), (\mathbf{w}, \mathbf{g}))\|\|_{0,k} \leq Cm^{-1/2} \|\|(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0, \mathbf{z} - \mathbf{z}_0)\|\|_{0,k}.$$

定理 6 设 $(\mathbf{u}_k, \mathbf{p}_k) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$ 是(4) 的解, $(\hat{\mathbf{u}}_k, \hat{\mathbf{p}}_k) \in \mathbf{V}_k \times \hat{S}_k$ 是(4) 的 r 次迭代多重网格迭代解, 若 m 和 r 足够大, 则

$$\|\|\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_k\|\|_{0,\Omega} + h_k (\|\|\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_k\|\|_k + \|\|\mathbf{p}_k - \hat{\mathbf{p}}_k\|\|_{0,\Omega}) \leq Ch_k^2 (\|\|\mathbf{u}\|\|_{2,\Omega} + \|\|\mathbf{p}\|\|_{1,\Omega}).$$

6 数值算例

本节我们给出一个数值算例, 取 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, 设 $(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in (\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ 是问题(2) 的精确解, 其中 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$,

$$\begin{aligned} u_1 &= 2x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y), \\ u_2 &= -2x(1-x)(1-2x)y^2(1-y)^2, \\ p &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

对 Ω 进行等距剖分, 下面我们考虑 W 循环多重网格方法的收敛率. 用 l 表示网格层, $iter(m, m)$ 为当残量相对误差不超过 10^{-5} 时所进行的多重网格迭代次数, 其中 m 为前光滑和后光滑的次数, 最粗网格的尺寸取 $\frac{1}{2}$, 且迭代初始值取为零. 从表 1, 我们发现当网格尺寸变小时, 对于光滑次数 m 充分大时, W 循环多重网格法的迭代次数保持不变, 通过计算, 我们得到了如表 1 所示的结果, 可知本文的非协调混合有限元离散逼近误差能够达到最优.

表 1 W 循环的迭代次数

		TOL = 10^{-5}					
		1	2	3	4	5	6
$iter(4, 4)$		9	8	9	9	9	9
$iter(5, 5)$		9	8	7	9	8	

[参考文献]

- [1] Park C. A study on locking phenomena in finite element methods [D]. Seoul: Department of Mathematics, Seoul National University, 2002.
- [2] Park C, Sheen D. P_1 -nonconforming quadrilateral finite element methods for second-order elliptic problems [J]. SIAM J Numer Anal, 2003, 41: 624-640.
- [3] Han H. Nonconforming elements in the mixed finite element method [J]. J Comp Math, 1984, 2: 223-233.
- [4] Rannacher R, Turek S. Simple nonconforming quadrilateral Stokes element [J]. Numer Methods Partial Differential Equations, 1992, 8: 97-111.
- [5] Douglas J, J R Santos J E, Sheen D, et al. Nonconforming Galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems [J]. RAIRO Math Model Numer Anal, 1999, 33: 747-770.
- [6] Arnold D N, Boffi D, Falk R S. Approximation by quadrilateral finite elements [J]. Math Comp, 2002, 71: 909-922.
- [7] Grajewski M, Hron J, Turek S. Numerical analysis for a new nonconforming linear finite element on quadrilaterals [J]. J Comp Appl Math, 2006, 193: 38-50.
- [8] 黄萍, 陈金如. 解 Stokes 问题的 P_1 非协调四边形元的稳定化方法 [J]. 计算数学, 2010, 32(1): 81-96.
- [9] Man H, Shi Z. P_1 nonconforming quadrilateral finite volume element method and its cascading multigrid algorithm for elliptic problems [J]. J Comput Math, 2006, 24: 59-80.
- [10] Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [11] 王锋, 陈金如. 带间断系数椭圆问题的 P_1 非协调四边形元的加性 Schwarz 方法 [J]. 计算数学, 2009, 31(2): 209-224.
- [12] Brenner S C. A nonconforming mixed multigrid method for the pure displacement problem in planar linear elasticity [J]. SIAM J Numer Anal, 1993, 33: 116-135.
- [13] 王烈衡, 许学军. 有限元方法的数学基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[责任编辑: 丁蓉]