3类图完美匹配的计数

唐保祥[1],任 韩[2]

(1. 天水师范学院数学与统计学院,甘肃 天水 741001)
(2. 华东师范大学数学系,上海 200062)

[摘要] 图的完美匹配计数问题是匹配理论研究中的一个重要课题,此问题有很强的物理学和化学背景. 但是,一般图的完美匹配计数问题却是NP-困难的. 用划分、求和再递推的方法给出了3类图完美匹配数目的计算公式. 所给出的方法,可以计算出许多二分图的所有完美匹配的数目.

[关键词] 完美匹配,递推式,棋盘

[中图分类号] O157.5 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)01-0016-06

The Number of Perfect Matchings in Three Types of Graphs

Tang Baoxiang[1],Ren Han[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001,China)
(2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: It is an interesting and important problem to count the number of the perfect matchings in graphs, since it origins from both physics and chemistry. But the problem of counting the number of the perfect matchings for general graphs is NP-difficult. In this paper, by applying differentiation, summation and re-recursion calculation, several counting formulas of the perfect matching for three specific types of graphs are given. By the method presented in this paper, many bipartite graphs of the number of all perfect matchings can be calculated.

Key words: perfect matching, recurrence relation, chessboard

匹配理论是图论研究的重要内容之一,是一个有生机活力的研究领域,它不仅具有很强的应用背景,而且在过去的几十年中,它是快速发展的组合论中许多重要思想的源泉. 图的完美匹配计数理论又是匹配理论中的重要内容之一. 现在,图的完美匹配计数理论已经在多个领域得到应用[1-5],也引起了众多数学家、物理学家和化学家的广泛关注[6-10]. 遗憾的是,Valiant L 1979年证明了,一个图(即使是偶图)的完美匹配计数是NP-难问题. 因此,要得到一般图的完美匹配数的计算公式是非常困难的. 目前,已有一些文献对一些特殊图的完美匹配计数作了相关的研究[11-22]. 本文给出了3类图完美匹配数目的计算公式,所给方法,适合相同结构重复出现的很多偶图完美匹配数的求解.

定义1 设 $m+1$ 条长为 n 的路 $P_i = u_{i1}u_{i2}u_{i3}\cdots u_{i,n+1}$ $(i=1,2,\cdots,m,m+1)$,连接路 P_i 与 P_{i+1} 中的顶点 u_{ij} 与 $u_{i+1,j}$ $(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n,n+1)$ 所得的图,称为 $m\times n$ 的棋盘. 本文将 $m\times n$ 的棋盘记为 $Q_{m\times n}$.

定义2 若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同,则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同完美匹配.

1 结果及其证明

定理1 棋盘 $Q^i_{3\times1}$ 的顶点集为 $V(Q^i_{3\times1}) = \{u_{1i},u_{2i},u_{3i},u_{4i},v_{1i},v_{2i},v_{3i},v_{4i}\}$, $i=1,2,\cdots,n$. 分别连接棋盘 $Q^i_{3\times1}$ 和 $Q^{i+1}_{3\times1}$ 的顶点 v_{1i} 和 $u_{1,i+1}$, v_{4i} 和 $u_{4,i+1}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 所得到的图记为 $2-a-$

收稿日期: 2011-09-25.
基金项目: 国家自然科学基金(11171114).
通讯联系人: 唐保祥,副教授,研究方向: 图论和组合数学. E-mail: tbx0618@sina.com

$nQ_{3\times1}$，如图 1 所示. $f(n)$ 表示图 $2-a-nQ_{3\times1}$ 的所有不同的完美匹配的数目，则 $f(n)=\frac{13+3\sqrt{13}}{26}\cdot\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)^n+\frac{13-3\sqrt{13}}{26}\cdot\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)^n$.

证明 为了求 $f(n)$，先定义图 G_1，并求其完美匹配的数目. 将长为 3 的路 $v_1v_2v_3v_4$ 的端点 v_1 和 v_4 分别与图 $2-a-nQ_{3\times1}$ 的顶点 u_{11} 和 u_{41} 各连接一条边；再将长为 1 的路 u_1u_2 的端点 u_1 和 u_2 分别与路 $v_1v_2v_3v_4$ 的顶点 v_2 和 v_3 各连接一条边，所得到的图记为 G_1，如图 2 所示. 易知图 G_1 有完美匹配. $\sigma(n)$ 表示图 G_1 的完美匹配的数目. 设图 G_1 完美匹配的集合为 $\mathscr{M}$，图 G_1 含边 u_1v_2，u_1u_2 的完美匹配集合分别为 $\mathscr{M}_1$，$\mathscr{M}_2$. 则 $\mathscr{M}_i\neq\varnothing$，$i=1,2$. $\mathscr{M}_1\cap\mathscr{M}_2=\varnothing$. 所以 $\mathscr{M}=\mathscr{M}_1\cup\mathscr{M}_2$，$\sigma(n)=|\mathscr{M}|=|\mathscr{M}_1|+|\mathscr{M}_2|$.

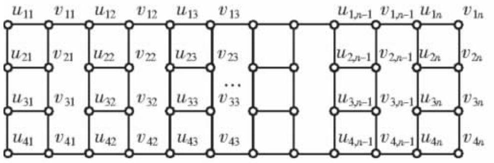

图 1 $2-a-nQ_{3\times1}$ 图

Fig.1 Figure of $2-a-nQ_{3\times1}$

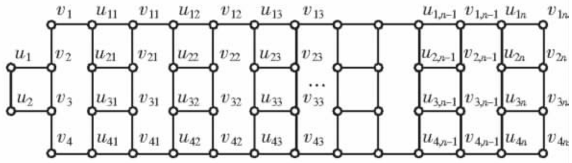

图 2 G_1 图

Fig.2 Figure of G_1

求 $|\mathscr{M}_1|$. $\forall M_1\in\mathscr{M}_1$，因为 $u_1v_2\in M_1$，所以 u_2v_3，v_1u_{11}，$v_4u_{41}\in M_1$. 由 $\sigma(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_1|=\sigma(n-1)$.

求 $|\mathscr{M}_2|$.

情形 1 $\mathscr{M}_{21}\subseteq\mathscr{M}_2$，$\forall M_{21}\in\mathscr{M}_{21}$，$u_1u_2$，$v_2v_3$，$v_1u_{11}$，$v_4u_{41}\in M_{21}$，由 $\sigma(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{21}|=\sigma(n-1)$.

情形 2 $\mathscr{M}_{22}\subseteq\mathscr{M}_2$，$\forall M_{22}\in\mathscr{M}_{22}$，$u_1u_2$，$v_1v_2$，$v_3v_4\in M_{22}$，由 $f(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{22}|=f(n)$. 故 $|\mathscr{M}_2|=\sigma(n-1)+f(n)$.

综上所述，

$$\sigma(n)=2\sigma(n-1)+f(n). \tag{1}$$

再求 $f(n)$. 易知图 $2-a-nQ_{3\times1}$ 有完美匹配. 设图 $2-a-nQ_{3\times1}$ 的完美匹配的集合为 $\mathscr{M}$，图 $2-a-nQ_{3\times1}$ 含边 $u_{11}v_{11}$，$u_{11}u_{21}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathscr{M}_1$，$\mathscr{M}_2$. 则 $\mathscr{M}_i\neq\varnothing$，$i=1,2$. $\mathscr{M}_1\cap\mathscr{M}_2=\varnothing$. 所以 $\mathscr{M}=\mathscr{M}_1\cup\mathscr{M}_2$，$f(n)=|\mathscr{M}|=|\mathscr{M}_1|+|\mathscr{M}_2|$.

求 $|\mathscr{M}_1|$.

情形 1 $\mathscr{M}_{11}\subseteq\mathscr{M}_1$，$\forall M_{11}\in\mathscr{M}_{11}$，$u_{11}v_{11}$，$u_{21}v_{21}$，$u_{31}v_{31}$，$u_{41}v_{41}\in M_{11}$，由 $f(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{11}|=f(n-1)$.

情形 2 $\mathscr{M}_{12}\subseteq\mathscr{M}_1$，$\forall M_{12}\in\mathscr{M}_{12}$，$u_{11}v_{11}$，$u_{21}v_{21}$，$u_{31}u_{41}$，$v_{31}v_{41}\in M_{12}$，由 $f(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{12}|=f(n-1)$.

情形 3 $\mathscr{M}_{13}\subseteq\mathscr{M}_1$，$\forall M_{13}\in\mathscr{M}_{13}$，$u_{11}v_{11}$，$u_{21}u_{31}$，$v_{21}v_{31}$，$u_{41}v_{41}\in M_{13}$，由 $f(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{13}|=f(n-1)$.

易知 $\mathscr{M}_1=\mathscr{M}_{11}\cup\mathscr{M}_{12}\cup\mathscr{M}_{13}$，$\mathscr{M}_{1i}\cap\mathscr{M}_{1j}=\varnothing$，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant 3$.

综上所述，$|\mathscr{M}_1|=3f(n-1)$.

求 $|\mathscr{M}_2|$.

情形 1 $\mathscr{M}_{21}\subseteq\mathscr{M}_2$，$\forall M_{21}\in\mathscr{M}_{21}$，$u_{11}u_{21}$，$v_{11}v_{21}$，$u_{31}v_{31}$，$u_{41}v_{41}\in M_{21}$，由 $f(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{21}|=f(n-1)$.

情形 2 $\mathscr{M}_{22}\subseteq\mathscr{M}_2$，$\forall M_{22}\in\mathscr{M}_{22}$，$u_{11}u_{21}$，$v_{11}v_{21}$，$u_{31}u_{41}$，$v_{31}v_{41}\in M_{22}$，由 $f(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{22}|=f(n-1)$.

情形 3 $\mathscr{M}_{23}\subseteq\mathscr{M}_2$，$\forall M_{23}\in\mathscr{M}_{23}$，$u_{11}u_{21}$，$u_{31}u_{41}$，$v_{21}v_{31}$，$v_{11}u_{12}$，$v_{41}u_{42}\in M_{23}$，由 $\sigma(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{23}|=\sigma(n-2)$.

易知 $\mathscr{M}_2=\mathscr{M}_{21}\cup\mathscr{M}_{22}\cup\mathscr{M}_{23}$，$\mathscr{M}_{2i}\cap\mathscr{M}_{2j}=\varnothing$，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant 3$.

综上所述，$|\mathscr{M}_2| = 2f(n-1) + \sigma(n-2)$.

故

$$f(n) = 5f(n-1) + \sigma(n-2). \tag{2}$$

由(1)和(2)式，有

$$f(n) = 5f(n-1) + f(n-2) + 2\sigma(n-3), \tag{3}$$

$$f(n-1) = 5f(n-1) + \sigma(n-3). \tag{4}$$

(3) $-2\times$(4)，得

$$f(n) = 7f(n-1) - 9f(n-2). \tag{5}$$

易知 $f(1) = 5$，$f(2) = 26$. 因此，解递推式(5)，得

$$f(n) = \frac{13+3\sqrt{13}}{26}\cdot\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \frac{13-3\sqrt{13}}{26}\cdot\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$

证毕.

定理 2　棋盘 $Q_{3\times1}^i$ 的顶点集为 $V(Q_{3\times1}^i) = \{u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, u_{4i}, v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}, v_{4i}\}$，$i = 1,2,\cdots,n$. 分别连接棋盘 $Q_{3\times1}^i$ 和 $Q_{3\times1}^{i+1}$ 的顶点 v_{2i} 和 $u_{2,i+1}$，v_{3i} 和 $u_{3,i+1}$ $(i = 1,2,\cdots,n-1)$ 所得到的图记为 $2-b-nQ_{3\times1}$，如图 3 所示. $g(n)$ 表示图 $2-b-nQ_{3\times1}$ 的所有不同的完美匹配的数目，则 $g(n) = \frac{5+2\sqrt{5}}{10}\cdot(3+\sqrt{5})^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{10}\cdot(3-\sqrt{5})^n$.

证明　为了求 $g(n)$，先定义一个图 G_2，并求其完美匹配的数目. 将长为 1 的路 u_1u_2 的端点 u_1 和 u_2 分别与图 $2-b-nQ_{3\times1}$ 的顶点 u_{21} 和 u_{31} 各连接一条边得到的图记为 G_2，如图 4 所示. 易知图 G_2 有完美匹配. $\tau(n)$ 表示图 G_2 的完美匹配的数目. 设图 G_2 的完美匹配的集合为 $\mathscr{M}$，图 G_2 含边 u_1u_{21}，u_1u_2 的完美匹配集合分别为 $\mathscr{M}_1$，$\mathscr{M}_2$. 则 $\mathscr{M}_i \neq \varnothing$，$i = 1,2$. $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2 = \varnothing$. 所以 $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2$，$\tau(n) = |\mathscr{M}| = |\mathscr{M}_1| + |\mathscr{M}_2|$.

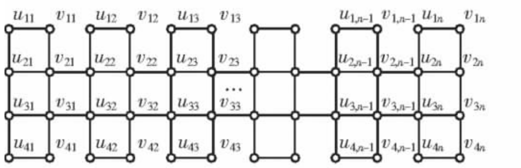

图 3　2-b-$nQ_{3\times1}$ 图

Fig.3　Figure of 2-b-$nQ_{3\times1}$

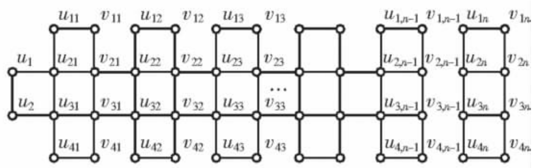

图 4　G_2 图

Fig.4　Figure of G_2

求 $|\mathscr{M}_1|$. $\forall M_1 \in \mathscr{M}_1$，因为 $u_1u_{21} \in M_1$，所以 $u_2u_{31}, u_{11}v_{11}, u_{41}v_{41} \in M_1$. 故由 $\tau(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_1| = \tau(n-1)$.

求 $|\mathscr{M}_2|$. $\forall M_2 \in \mathscr{M}_2$，因为 $u_1u_2 \in M_{21}$，所以由 $g(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_2| = g(n)$.

故

$$\tau(n) = g(n) + \tau(n-1). \tag{6}$$

求 $g(n)$ 的值. 易知图 $2-b-nQ_{3\times1}$ 有完美匹配. 设图 $2-b-nQ_{3\times1}$ 的完美匹配的集合为 $\mathscr{M}$，图 $2-b-nQ_{3\times1}$ 含边 $u_{11}v_{11}$，$u_{11}u_{21}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathscr{M}_1$，$\mathscr{M}_2$. 则

$\mathscr{M}_i \neq \varnothing$，$i = 1,2$. $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2 = \varnothing$. 所以 $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2$，$g(n) = |\mathscr{M}_1| + |\mathscr{M}_2|$.

求 $|\mathscr{M}_1|$.

情形 1　$\mathscr{M}_{11} \subseteq \mathscr{M}_1$，$\forall M_{11} \in \mathscr{M}_{11}$，$u_{11}v_{11}, u_{21}v_{21}, u_{31}v_{31}, u_{41}v_{41} \in M_{11}$，由 $g(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{11}| = g(n-1)$.

情形 2　$\mathscr{M}_{12} \subseteq \mathscr{M}_1$，$\forall M_{12} \in \mathscr{M}_{12}$，$u_{11}v_{11}, u_{21}v_{21}, u_{31}u_{41}, v_{31}v_{41} \in M_{12}$，由 $g(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{12}| = g(n-1)$.

情形 3　$\mathscr{M}_{13} \subseteq \mathscr{M}_1$，$\forall M_{13} \in \mathscr{M}_{13}$，$u_{11}v_{11}, u_{21}u_{31}, v_{21}v_{31}, u_{41}v_{41} \in M_{13}$，由 $g(n)$ 的定义知，$|\mathscr{M}_{13}| = g(n-1)$.

情形 4　$\mathscr{M}_{14} \subseteq \mathscr{M}_1$,$\forall M_{14} \in \mathscr{M}_{14}$,$u_{11}v_{11}$,$u_{21}u_{31}$,$u_{41}v_{41}$,$v_{21}u_{22}$,$v_{31}u_{32}$,$u_{12}v_{12}$,$u_{42}v_{42} \in M_{14}$,由 $\tau(n)$ 的定义知,$|\mathscr{M}_{14}| = \tau(n-2)$.

易知 $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_{11} \cup \mathscr{M}_{12} \cup \mathscr{M}_{13} \cup \mathscr{M}_{14}$,$\mathscr{M}_{1i} \cap \mathscr{M}_{1j} = \varnothing$,$i \neq j$,$1 \leqslant i,j \leqslant 4$.

综上,就有 $|\mathscr{M}_1| = 3g(n-1) + \tau(n-2)$.

求 $|\mathscr{M}_2|$.

情形 1　$\mathscr{M}_{21} \subseteq \mathscr{M}_2$,$\forall M_{21} \in \mathscr{M}_{21}$,$u_{11}u_{21}$,$v_{11}v_{21}$,$u_{31}v_{31}$,$u_{41}v_{41} \in M_{21}$,由 $g(n)$ 的定义知,$|\mathscr{M}_{21}| = g(n-1)$.

情形 2　$\mathscr{M}_{22} \subseteq \mathscr{M}_2$,$\forall M_{22} \in \mathscr{M}_{22}$,$u_{11}u_{21}$,$u_{31}u_{41}$,$v_{11}v_{21}$,$v_{31}v_{41} \in M_{22}$,由 $g(n)$ 的定义知,$|\mathscr{M}_{22}| = g(n-1)$. 显然 $\mathscr{M}_{21} \cap \mathscr{M}_{22} = \varnothing$,$\mathscr{M}_2 = \mathscr{M}_{21} \cup \mathscr{M}_{22}$,$|\mathscr{M}_2| = |\mathscr{M}_{21}| + |\mathscr{M}_{22}|$,故 $|\mathscr{M}_2| = 2g(n-1)$.

综上所述,

$$g(n) = 5g(n-1) + \tau(n-2). \tag{7}$$

由(6)和(7)式,得

$$g(n) = 5g(n-1) + g(n-2) + \tau(n-3), \tag{8}$$

再由(7)式,得

$$g(n-1) = 5g(n-2) + \tau(n-3), \tag{9}$$

(8)-(9)得

$$g(n) = 6g(n-1) - 4g(n-2), \tag{10}$$

易知 $g(1) = 5$,$g(2) = 26$. 解递推式(10),得

$$g(n) = \frac{5+2\sqrt{5}}{10} \cdot (3+\sqrt{5})^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{10} \cdot (3-\sqrt{5})^n.$$

证毕.

定理 3　设 5 圈 C_5^i 的顶点集为 $V(C_{51}^i) = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}\}$,$i = 1,2,\cdots,2n$. 圈 C_5^i 与 C_5^{i+1} 的顶点 u_{i1} 与 $u_{i+1,1}$,u_{i1} 与 $u_{i+1,5}$,u_{i3} 与 $u_{i+1,4}$ 之间分别连接一条边($i = 1,2,\cdots,2n-1$)所得到的图记为 $3-2nC_5$,如图 5 所示. $\varphi(n)$ 表示图 $3-2nC_5$ 的完美匹配的数目,则 $\varphi(n) = \frac{7+2\sqrt{7}}{21} \cdot (4+\sqrt{7})^n + \frac{7-2\sqrt{7}}{21} \cdot (4-\sqrt{7})^n$.

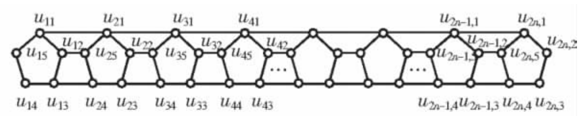

图 5　$3-2nC_5$ 图

Fig.5　Figure of $3-2nC_5$

证明　为了求 $\varphi(n)$,先定义图 G_3 和 G_4 如下:将路 uv 的两端点 u,v 分别与图 $3-2nC_5$ 的顶点 u_{15},u_{14} 各连接一条边,得到的图记为 G_3;将路 uv 的两端点 u,v 分别与图 $3-2nC_5$ 的顶点 u_{11},u_{15} 各连接一条边,得到的图记为 G_4 如图 6、图 7 所示.

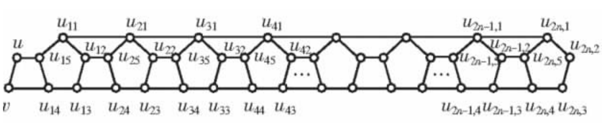

图 6　G_3 图

Fig.6　Figure of G_3

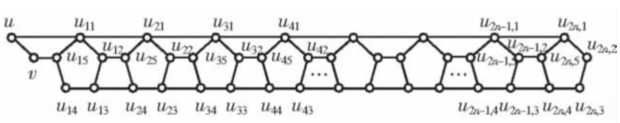

图 7　G_4 图

Fig.7　Figure of G_4

易知图 $3-2nC_5$,G_3,G_4 均有完美匹配. $h(n)$,$\theta(n)$ 分别表示图 G_3 和 G_4 的完美匹配的数目.

先求 $h(n)$. 设图 G_3 完美匹配的集合为 $\mathscr{M}$,图 G_3 含边 uv,uu_{15} 的完美匹配集合分别为 $\mathscr{M}_1$,$\mathscr{M}_2$. 则 $\mathscr{M}_i \neq \varnothing$,$i = 1,2$,$\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2 = \varnothing$. 所以 $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2$,从而 $h(n) = |\mathscr{M}| = |\mathscr{M}_1| + |\mathscr{M}_2|$.

求 $|\mathscr{M}_1|$. $\forall M_1 \in \mathscr{M}_1$,因为 $uv \in M_1$,所以由 $\varphi(n)$ 的定义知,$|\mathscr{M}_1| = \varphi(n)$.

求 $|\mathscr{M}_2|$.

情形 1　$\mathscr{M}_{21} \subseteq \mathscr{M}_2$,$\forall M_{21} \in \mathscr{M}_2$,$uu_{15}$,$vu_{14}$,$u_{11}u_{21}$,$u_{12}u_{25}$,$u_{13}u_{24} \in M_{21}$,由 $h(n)$ 的定义知,$|\mathscr{M}_{21}| =$

$h(n-1)$.

情形2　$\mathscr{M}_{22}\subseteq\mathscr{M}_2$，$\forall M_{22}\in\mathscr{M}_2$，$uu_{15}$，$vu_{14}$，$u_{11}u_{21}$，$u_{12}u_{13}$，$u_{25}u_{24}\in M_{22}$，由$h(n)$的定义知，$|\mathscr{M}_{22}|=h(n-1)$.

情形3　$\mathscr{M}_{23}\subseteq\mathscr{M}_2$，$\forall M_{23}\in\mathscr{M}_2$，$uu_{15}$，$vu_{14}$，$u_{11}u_{12}$，$u_{21}u_{25}$，$u_{13}u_{24}\in M_{23}$，由$h(n)$的定义知，$|\mathscr{M}_{23}|=h(n-1)$. 易知$\mathscr{M}_2=\mathscr{M}_{21}\cup\mathscr{M}_{22}\cup\mathscr{M}_{23}$，$\mathscr{M}_{2i}\cap\mathscr{M}_{2j}=\varnothing$，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant 3$. 所以就有$|\mathscr{M}_2|=|\mathscr{M}_{21}|+|\mathscr{M}_{22}|+|\mathscr{M}_{23}|=3h(n-1)$.

综上所述，

$$h(n)=\varphi(n)+3h(n-1). \tag{11}$$

再求$\theta(n)$. 设图G_4的完美匹配的集合为$\mathscr{M}$，图G_4含边uv，uu_{11}的完美匹配集合分别为$\mathscr{M}_1$，$\mathscr{M}_2$. 则$\mathscr{M}_i=\varnothing$，$i=1,2$. $\mathscr{M}_1\cap\mathscr{M}_2=\varnothing$.

所以$\mathscr{M}=\mathscr{M}_1\cup\mathscr{M}_2$，$\theta(n)=|\mathscr{M}|=|\mathscr{M}_1|+|\mathscr{M}_2|$.

求$|\mathscr{M}_1|$. 因为$\forall M_1\in\mathscr{M}_1$，$uv\in M_1$，所以由$\varphi(n)$的定义知，$|\mathscr{M}_1|=\varphi(n)$.

求$|\mathscr{M}_2|$. $\forall M_2\in\mathscr{M}_2$，因为$uu_{11}\in M_2$，所以必有$vu_{25}$，$u_{14}u_{13}$，$u_{12}u_{25}$，$u_{24}u_{23}\in M_2$，所以由$\theta(n)$的定义知，$|\mathscr{M}_2|=\theta(n-1)$.

综上所述，

$$\theta(n)=\varphi(n)+\theta(n-1). \tag{12}$$

最后求$\varphi(n)$. 设图$3-2nC_5$的完美匹配的集合为$\mathscr{M}$，图$3-2nC_5$含边$u_{15}u_{11}$，$u_{15}u_{14}$的完美匹配集合分别为$\mathscr{M}_1$，$\mathscr{M}_2$. 则$\mathscr{M}_i=\varnothing$，$i=1,2$. $\mathscr{M}_1\cap\mathscr{M}_2=\varnothing$.

所以$\mathscr{M}=\mathscr{M}_1\cup\mathscr{M}_2$，$\varphi(n)=|\mathscr{M}|=|\mathscr{M}_1|+|\mathscr{M}_2|$.

求$|\mathscr{M}_1|$. $\forall M_1\in\mathscr{M}_1$，因为$u_{15}u_{11}\in M_1$，所以必有$u_{14}u_{13}$，$u_{12}u_{25}$，$u_{24}u_{23}\in M_1$，从而由$h(n)$定义知，$|\mathscr{M}_1|=h(n-1)$.

求$|\mathscr{M}_2|$.

情形1　$\mathscr{M}_{21}\subseteq\mathscr{M}_2$，$\forall M_{21}\in\mathscr{M}_{21}$，$u_{15}u_{14}$，$u_{11}u_{21}$，$u_{12}u_{25}$，$u_{13}u_{24}\in M_{21}$，由$\theta(n)$的定义知，$|\mathscr{M}_{21}|=h(n-1)$.

情形2　$\mathscr{M}_{22}\subseteq\mathscr{M}_2$，$\forall M_{22}\in\mathscr{M}_{22}$，$u_{15}u_{14}$，$u_{11}u_{21}$，$u_{12}u_{13}$，$u_{25}u_{24}\in M_{22}$，由$h(n)$的定义知，$|\mathscr{M}_{22}|=h(n-1)$.

情形3　$\mathscr{M}_{23}\subseteq\mathscr{M}_2$，$\forall M_{23}\in\mathscr{M}_{23}$，$u_{15}u_{14}$，$u_{11}u_{12}$，$u_{21}u_{25}$，$u_{13}u_{24}\in M_{23}$，由$h(n)$的定义知，$|\mathscr{M}_{23}|=h(n-1)$.

易知$\mathscr{M}_2=\mathscr{M}_{21}\cup\mathscr{M}_{22}\cup\mathscr{M}_{23}$，$\mathscr{M}_{2i}\cap\mathscr{M}_{2j}=\varnothing$，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant 3$.

综上所述，$|\mathscr{M}_2|=|\mathscr{M}_{21}|+|\mathscr{M}_{22}|+|\mathscr{M}_{23}|=3h(n-1)$.

故

$$\varphi(n)=3h(n-1)+\theta(n-1). \tag{13}$$

由(11)，(12)和(13)式，有

$$\varphi(n)=4\varphi(n-1)+9h(n-2)+\theta(n-2), \tag{14}$$

由(13)式，得

$$\varphi(n-1)=3h(n-2)+\theta(n-2), \tag{15}$$

(14) $-3\times$(13)得

$$\varphi(n)=7\varphi(n-1)-2\theta(n-2), \tag{16}$$

由(12)和(16)式，得

$$\varphi(n)=7\varphi(n-1)-2\varphi(n-2)-2\theta(n-3), \tag{17}$$

再(16)式，得

$$\varphi(n-1)=7\varphi(n-2)-2\theta(n-3), \tag{18}$$

(17) $-$ (18)得

$$\varphi(n)=8\varphi(n-1)-9\varphi(n-2), \tag{19}$$

易知$\varphi(1)=4$，$h(1)=7$，$\theta(1)=5$，所以由(12)式知，$\varphi(n)=26$.

因此，解递推式(19)，得

$$\varphi(n) = \frac{7+2\sqrt{7}}{21}\cdot(4+\sqrt{7})^n + \frac{7-2\sqrt{7}}{21}\cdot(4-\sqrt{7})^n.$$

证毕.

[参考文献]

[1] Hall G G. A graphic model of a class of molecules [J]. Int J Math Edu Sci Technol, 1973, 4(3): 233-240.

[2] Pauling L. The Nature of Chemical Bond, Cornell [M]. New York: Ithaca Univ Press, 1939.

[3] Cyvin S J, Gutman I. Kekulé Structures in Benzennoid Hydrocarbons [M]. Berlin: Springer Press, 1988.

[4] Kasteleyn P W. Graph theory and crystal physics [C] // Harary F. Graph Theory and Theoretical Physics. London: Academic Press, 1967: 43-110.

[5] Lovász L, Plummer M. Matching Theory [M]. New York: North-Holland Press, 1986.

[6] Clucu M. Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry [J]. J Combin Theory Ser A, 1997, 77: 87-97.

[7] Fischer I, Little C H C. Even circuits of prescribed clockwise parity [J/OL]. Electro J Combin, 2003, 10: 1-20 [2010-04-20]. http://www.emis.ams.org/journals/EJC/Volume_10/PDF/V1oi1r45.pdf

[8] Jockusch W. Perfect mathings and perfect squares [J]. J Combin Theory Ser A, 1994, 67: 100-115.

[9] Kasteleyn P W. The number of dimmer on a quadratic lattice [J]. Physica, 1961, 27(12): 1 209-1 225.

[10] Kasteleyn P W. Dimmer statistics and phase transition [J]. Math Phys, 1963, 4: 287-293.

[11] 于青林，刘桂真. 图的因子和匹配可扩性 [M]. 北京：高等教育出版社，2010.

[12] Brightwell G R, Winkler P, Hard C, et al. Adventures at the interface of combinatories and statistical physics [J]. ICM, 2002, 3: 605-624.

[13] Zhang Heping. The connectivity of Z-transformation graphs of perfect matchings of polyominoes [J]. Discrete Mathematics, 1996, 158: 257-272.

[14] Zhang Heping, Zhang Fuji. Perfect matchings of polyomino graphs [J]. Graphs and Combinatorics, 1997, 13: 259-304.

[15] 张莲珠. 渺位四角系统完美匹配数的计算 [J]. 厦门大学学报：自然科学版，1998, 37(5): 629-633.

[16] 张莲珠. 两类四角系统的匹配数与点独立集数 [J]. 数学研究，1999, 32(3): 97-102.

[17] 林泓，林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算 [J]. 福州大学学报：自然科学版，2005, 33(6): 704-710.

[18] Yan Weigen, Zhang Fuji. Enumeration of perfect matchings of a type of cartesian products of graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154: 145-157.

[19] 张洁，孙志人. 拟无爪泛圈图的一个充分条件 [J]. 南京师大学报：自然科学版，2009, 32(1): 22-24.

[20] 晏卫根，叶永南. 一类运算图的匹配数 [J]. 中国科学 A 辑：数学，2006, 39(9): 1 014-1 022.

[21] 唐保祥，任韩. 几类图完美匹配的数目 [J]. 南京师大学报：自然科学版，2010, 33(3): 1-6.

[22] 唐保祥，李刚，任韩. 3 类图完美匹配的数目 [J]. 浙江大学学报：理学版，2011, 38(4): 16-19.

[责任编辑：丁　蓉]