第 35 卷第 1 期 2012 年 3 月
南京师大学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition)
Vol. 35 No. 1 Mar,2012

二维修正的 Zakharov 方程的适定性

游淑军[1,2],宁效琦[1]

(1. 怀化学院数学系,湖南 怀化 418008)
(2. 中南大学数学科学与计算技术学院,湖南 长沙 410083)

[摘要] 考虑一类修正的 Zakharov 方程的 Cauchy 问题的适定性. 通过一系列的先验估计,利用 Galerkin 方法,对于二维修正的 Zakharov 方程的 Cauchy 问题得到了整体光滑解的存在性和惟一性.

[关键词] 修正的 Zakharov 方程,Cauchy 问题,整体解
[中图分类号] O175.29 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)01-0022-07

Well-Posedness for a Two-Dimensional Modified Zakharov Equations

You Shujun[1,2],Ning Xiaoqi[1]

(1. Department of Mathematics, Huaihua University, Huaihua 418008, China)
(2. School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: This paper considers the existence and uniqueness of the solution to the Cauchy problem for a class of modified Zakharov equation in (2+1) dimensions. By virtue of a priori integral estimates and Galerkin method, this paper establish global in time existence and uniqueness of the solution to the problem.

Key words: modified Zakharov equations, Cauchy problem, global solution

描述等离子体中 Langmuir 波传播的 Zakharov 方程于 1972 年被 Zakharov 导出[1]. 最近关于量子修正的 Zakharov 方程引起了物理学家的极大兴趣. 首先是一维空间中量子修正的 Zakharov 方程的导出[2],接着该模型被延伸到二维和三维情形[3]. 修正的 Zakharov 方程无量纲形式为

$$i\partial_t E-\alpha\nabla\times(\nabla\times E)+\nabla(\nabla\cdot E)=nE+\Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E), \tag{1}$$

$$\partial_{tt}n-\Delta n=\Delta|E|^2-\Gamma\Delta^2 n. \tag{2}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$,E 表示高频电场的缓变振幅,n 是离子密度的扰动量. 参数 α 为光速和电子费米速度比的平方,通常非常大. 系数 Γ 用来衡量量子效应的影响,通常非常小[4].

本文考虑带如下初始条件的修正的 Zakharov 方程(1)、(2)的适定性.

$$E|_{t=0}=E_0(x),n|_{t=0}=n_0(x),n_t|_{t=0}=n_1(x). \tag{3}$$

主要研究二维情况时,该问题整体光滑解的存在惟一性.

将修正的 Zakharov 方程表示为 Hamilton 形式. 为此,引入向量值函数 Φ,从而方程(1)~(2)就转化为

$$i\partial_t E-(\alpha-1)\nabla\times(\nabla\times E)+\Delta E=nE+\Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E), \tag{4}$$

$$\partial_t n+\nabla\cdot\Phi=0, \tag{5}$$

$$\partial_t\Phi=-\nabla(n+|E|^2)+\Gamma\nabla\Delta n. \tag{6}$$

初始条件(3)变为

$$E|_{t=0}=E_0(x),n|_{t=0}=n_0(x),\Phi|_{t=0}=\Phi_0(x), \tag{7}$$

下面我们陈述本文的主要结论.

收稿日期:2011-09-01.
基金项目:湖南省教育厅科研项目(10C1056)、怀化学院科研项目(HHUY2011-01).
通讯联系人:游淑军,博士研究生,讲师,研究方向:偏微分方程理论与应用. E-mail:ysj980@yahoo.com.cn

定理 1 设 $E_0(x)\in H^{m+1}(\mathbf{R}^2)$,$n_0(x)\in H^m(\mathbf{R}^2)$,$n_1\in H^{m-2}(\mathbf{R}^2)$,$m\geqslant 6$. 则问题(1)~(3)存在惟一的整体光滑解

$$E(x,t)\in L^\infty(0,T;H^m(\mathbf{R}^2)),\quad E_t(x,t)\in L^\infty(0,T;H^{m-2}(\mathbf{R}^2))$$
$$n(x,t)\in L^\infty(0,T;H^m(\mathbf{R}^2)),\quad n_t(x,t)\in L^\infty(0,T;H^{m-2}(\mathbf{R}^2)).$$

为了行文的方便,我们对文中出现的符号作如下约定. 对 $1\leqslant q\leqslant\infty$,记号 $L^q(\mathbf{R}^n)$ 表示通常的 Lebesgue 空间,其范数表示为 $\|\cdot\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}$ 或 $\|\cdot\|_{L^q}$. 空间 $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ 中的范数表示为 $\|\cdot\|_{H^{s,p}(\mathbf{R}^n)}$. 当 $p=2$ 时,用记号 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 代替 $H^{s,2}(\mathbf{R}^n)$. 符号 C 表示不同的依赖于初始值的常数.

1 一些先验估计

要建立问题(4)~(7)的光滑解的存在性理论,关键是要推导出相关的先验估计.

引理 1 设 $E_0(x)\in L^2(\mathbf{R}^2)$,则问题(4)~(7)的解 E 满足

$$\|E(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}=\|E_0(x)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)}=M.$$

证明 在方程(4)两边同乘以 $\bar{E}$ 并在 $\mathbf{R}^2$ 上对 x 积分,然后两边取虚部即得证.

引理 2(Gagliardo-Nirenberg 不等式[5]) 设 $u\in L^q(\mathbf{R}^n)$,$D^m u\in L^r(\mathbf{R}^n)$,$1\leqslant q,r\leqslant\infty$,$0\leqslant j\leqslant m$,则存在常数 $C>0$,满足

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\|D^m u\|^{\alpha}_{L^r(\mathbf{R}^n)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbf{R}^n)},$$

其中 $0\leqslant\dfrac{j}{m}\leqslant\alpha\leqslant 1$,$\dfrac{1}{p}=\dfrac{j}{n}+\alpha\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{m}{n}\right)+(1-\alpha)\dfrac{1}{q}$.

引理 3 设 $E_0(x)\in H^2(\mathbf{R}^2)$,$n_0(x)\in H^1(\mathbf{R}^2)$,$\Phi_0(x)\in L^2(\mathbf{R}^2)$. 则

$$\|E\|^2_{H^1}+\|\nabla\cdot E\|^2_{H^1}+\|n\|^2_{H^1}+\|\Phi\|^2_{L^2}\leqslant C(M).$$

证明 在方程(4)两边同乘以 $\bar{E}_t$ 并在 $\mathbf{R}^2$ 上对 x 积分得

$$\int[iE_t-(\alpha-1)\nabla\times(\nabla\times E)+\Delta E]\cdot\bar{E}_t\mathrm{d}x=\int[nE+\Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E)]\cdot\bar{E}_t\mathrm{d}x.\tag{8}$$

在(8)式两边同时取实部得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|\nabla\cdot E\|^2_{L^2}+\alpha\|\nabla\times E\|^2_{L^2}+\int n|E|^2\mathrm{d}x+\Gamma\|\nabla(\nabla\cdot E)\|^2_{L^2}\right]=\int n_t|E|^2\mathrm{d}x.\tag{9}$$

又由(5),(6)式知

$$\int n_t|E|^2\mathrm{d}x=-\int\nabla\cdot\Phi|E|^2\mathrm{d}x=\int\Phi\cdot\nabla|E|^2\mathrm{d}x=$$
$$\int\Phi\cdot(\Gamma\nabla\Delta n-\nabla n-\partial_t\Phi)\mathrm{d}x=\int\nabla\cdot\Phi(-\Gamma\Delta n+n)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Phi\|^2_{L^2}=$$
$$\int n_t(\Gamma\Delta n-n)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Phi\|^2_{L^2}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Gamma\|\nabla n\|^2_{L^2}+\|n\|^2_{L^2}+\|\Phi\|^2_{L^2}].\tag{10}$$

于是结合(10)和(9)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|\nabla E\|^2_{L^2}+(\alpha-1)\|\nabla\times E\|^2_{L^2}+\int n|E|^2\mathrm{d}x+\Gamma\|\nabla(\nabla\cdot E)\|^2_{L^2}+\right.$$
$$\left.\frac{\Gamma}{2}\|\nabla n\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|n\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|\Phi\|^2_{L^2}\right]=0,$$

从而有

$$\|\nabla E\|^2_{L^2}+(\alpha-1)\|\nabla\times E\|^2_{L^2}+\int n|E|^2\mathrm{d}x+\Gamma\|\nabla(\nabla\cdot E)\|^2_{L^2}+$$
$$\frac{\Gamma}{2}\|\nabla n\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|n\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|\Phi\|^2_{L^2}=H,\tag{11}$$

其中

$$H=\|\nabla E_0\|^2_{L^2}+(\alpha-1)\|\nabla\times E_0\|^2_{L^2}+\int n_0|E_0|^2\mathrm{d}x+\Gamma\|\nabla(\nabla\cdot E_0)\|^2_{L^2}+$$
$$\frac{\Gamma}{2}\|\nabla n_0\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|n_0\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|\Phi_0\|^2_{L^2}.$$

利用 Hölder，Young 不等式和引理 2 有

$$\int n|E|^2\mathrm{d}x \leqslant \|n\|_{L^4}\|E\|^2_{L^{\frac{8}{3}}} \leqslant C\|\nabla n\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|n\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|\nabla E\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|E\|^{\frac{3}{2}}_{L^2} \leqslant$$

$$\frac{\Gamma}{4}\|\nabla n\|^2_{L^2} + C(M)\|n\|^{\frac{2}{3}}_{L^2}\|\nabla E\|^{\frac{2}{3}}_{L^2} \leqslant \frac{\Gamma}{4}\|\nabla n\|^2_{L^2} + \frac{1}{4}\|n\|^2_{L^2} + C(M)\|\nabla E\|_{L^2} \leqslant$$

$$\frac{\Gamma}{4}\|\nabla n\|^2_{L^2} + \frac{1}{4}\|n\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|\nabla E\|^2_{L^2} + C(M). \tag{12}$$

在(11)式中注意到不等式(12)即得

$$\frac{1}{2}\|\nabla E\|^2_{L^2} + (\alpha-1)\|\nabla\times E\|^2_{L^2} + \Gamma\|\nabla(\nabla\cdot E)\|^2_{L^2} + \frac{\Gamma}{4}\|\nabla n\|^2_{L^2} +$$

$$\frac{1}{4}\|n\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|\Phi\|^2_{L^2} \leqslant |H| + C(M). \tag{13}$$

引理 4[6]　设 $u\in W^{k,p}(\mathbf{R}^n)\cap W^{s,q}(\mathbf{R}^n)$，$k,s>0$，$p>1$，$q\geqslant 1$ 及 $kp=n<sq$. 则有

$$\|u\|_{L^\infty} \leqslant C\|u\|_{W^{k,p}}\left(1+\ln\left(1+\frac{\|u\|_{W^{s,q}}}{\|u\|_{W^{k,p}}}\right)\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

其中常数 C 仅与 k,s,p,q,n 有关.

引理 5　设 $E_0(x)\in H^3(\mathbf{R}^2)$，$n_0(x)\in H^2(\mathbf{R}^2)$，$\Phi_0(x)\in H^1(\mathbf{R}^2)$. 则

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\|E\|^2_{H^2} + \|\nabla\cdot E\|^2_{H^2} + \|n\|^2_{H^2} + \|\Phi\|^2_{H^1} + \|E_t\|^2_{L^2}\right] \leqslant C(M).$$

证明　首先将算子 ∂_t 作用到方程(4)两边，然后两边同乘以 $\bar{E}_t$ 并在 $\mathbf{R}^2$ 上对 x 积分得

$$\int[\mathrm{i}E_{tt} - (\alpha-1)\nabla\times(\nabla\times E_t) + \Delta E_t]\cdot\bar{E}_t\mathrm{d}x = \int[(nE)_t + \Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E_t)]\cdot\bar{E}_t\mathrm{d}x. \tag{14}$$

在(14)式两边同时取虚部得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|E_t\|^2_{L^2} = 2\mathrm{Im}\int n_tE\cdot\bar{E}_t\mathrm{d}x \leqslant 2\|E\|_{L^\infty}\|n_t\|_{L^2}\|E_t\|_{L^2}. \tag{15}$$

在方程(6)两边同乘以 $\Delta\Phi$ 并在 $\mathbf{R}^2$ 上对 x 积分得

$$\int\Phi_t\cdot\Delta\Phi\mathrm{d}x = -\int\nabla(n+|E|^2)\cdot\Delta\Phi\mathrm{d}x + \Gamma\int\nabla\Delta n\cdot\Delta\Phi\mathrm{d}x. \tag{16}$$

由于

$$\int\Phi_t\cdot\Delta\Phi\mathrm{d}x = -\int\nabla\Phi_t\cdot\nabla\Phi\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Phi\|^2_{L^2},$$

$$-\int\nabla n\cdot\Delta\Phi\mathrm{d}x = \int\Delta n\nabla\cdot\Phi\mathrm{d}x = -\int\Delta nn_t\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla n\|^2_{L^2},$$

$$-\int\nabla|E|^2\cdot\Delta\Phi\mathrm{d}x = \int\Delta|E|^2\nabla\cdot\Phi\mathrm{d}x = -\int\Delta|E|^2n_t\mathrm{d}x,$$

$$\Gamma\int\nabla\Delta n\cdot\Delta\Phi\mathrm{d}x = -\Gamma\int\Delta n\nabla\cdot(\Delta\Phi)\mathrm{d}x = \Gamma\int\Delta n\Delta n_t\mathrm{d}x = \frac{\Gamma}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta n\|^2_{L^2},$$

于是由(16)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|\nabla\Phi\|^2_{L^2} + \|\nabla n\|^2_{L^2} + \Gamma\|\Delta n\|^2_{L^2}\right] = 2\int\Delta|E|^2n_t\mathrm{d}x \leqslant$$

$$4\|n_t\|_{L^2}(\|E\|_{L^\infty}\|\Delta E\|_{L^2} + \|\nabla E\|^2_{L^4}) \leqslant C\|n_t\|_{L^2}\|\Delta E\|_{L^2}(\|E\|_{L^\infty}+1). \tag{17}$$

在方程(4)两边同乘以 $\Delta\bar{E}$ 并在 $\mathbf{R}^2$ 上对 x 积分得

$$\int[\mathrm{i}E_t - (\alpha-1)\nabla\times(\nabla\times E) + \Delta E]\cdot\Delta\bar{E}\mathrm{d}x = \int[nE + \Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E)]\cdot\Delta\bar{E}\mathrm{d}x. \tag{18}$$

由于

$$\mathrm{Re}\int\mathrm{i}E_t\cdot\Delta\bar{E}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\|\Delta E\|^2_{L^2} + \|E_t\|^2_{L^2},$$

$$\mathrm{Re}\int-(\alpha-1)\nabla\times(\nabla\times E)\cdot\Delta\bar{E}\mathrm{d}x =$$

$$\operatorname{Re}\int(\alpha-1)\nabla(\nabla\times E)\cdot\nabla(\nabla\times\bar{E})\mathrm{d}x=(\alpha-1)\|\nabla(\nabla\times E\|)_{L^2}^2,$$

$$\operatorname{Re}\int\Delta E\cdot\Delta\bar{E}\mathrm{d}x=\|\Delta E\|_{L^2}^2,$$

$$\operatorname{Re}\int nE\cdot\Delta\bar{E}\mathrm{d}x\leqslant\|E\|_{L^\infty}\|n\|_{L^2}\|\Delta E\|_{L^2}\leqslant C\|\Delta E\|_{L^2}^{\frac12}\|E\|_{L^2}^{\frac12}\|\Delta E\|_{L^2}\leqslant C+\frac14\|\Delta E\|_{L^2}^2,$$

$$\operatorname{Re}\int\Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E)\cdot\Delta\bar{E}\mathrm{d}x=-\operatorname{Re}\int\Gamma\Delta(\nabla\cdot E)\Delta(\nabla\cdot\bar{E})\mathrm{d}x=-\Gamma\|\Delta(\nabla\cdot E)\|_{L^2}^2,$$

于是从(18)式得

$$\frac12\|\Delta E\|_{L^2}^2+(\alpha-1)\|\nabla(\nabla\times E)\|_{L^2}^2+\Gamma\|\Delta(\nabla\cdot E)\|_{L^2}^2\leqslant\|E_t\|_{L^2}^2+C.\tag{19}$$

由引理 4 和(13)式可知

$$\|E\|_{L^\infty}\leqslant C(1+\ln(1+\|E\|_{H^2}))^{\frac12}\leqslant C(1+\ln(1+\|\Delta E\|_{L^2}))^{\frac12}.\tag{20}$$

将(15)式结合(17)式并注意到(19),(20)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\nabla\Phi\|_{L^2}^2+\|\nabla n\|_{L^2}^2+\Gamma\|\Delta n\|_{L^2}^2+\|E_t\|_{L^2}^2]\leqslant C(\|n_t\|_{L^2}^2+\|E_t\|_{L^2}^2+1)(1+\ln(1+\|E_t\|_{L^2}^2)).\tag{21}$$

利用 Gronwall 不等式得

$$\|\nabla\Phi\|_{L^2}^2+\|\nabla n\|_{L^2}^2+\Gamma\|\Delta n\|_{L^2}^2+\|E_t\|_{L^2}^2+1\leqslant C(M).$$

于是由(19)式知

$$\frac12\|\Delta E\|_{L^2}^2+(\alpha-1)\|\nabla(\nabla\times E)\|_{L^2}^2+\Gamma\|\Delta(\nabla\cdot E)\|_{L^2}^2\leqslant C(M).\tag{22}$$

引理 6 设 $E_0(x)\in H^4(\mathbf{R}^2)$，$n_0(x)\in H^3(\mathbf{R}^2)$，$n_1\in H^1(\mathbf{R}^2)$. 则

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[\|E\|_{H^3}^2+\|\nabla\cdot E\|_{H^3}^2+\|n\|_{H^3}^2+\|E_t\|_{H^1}^2+\|n_t\|_{H^1}^2]\leqslant C(M).$$

证明 在方程(2)两边同乘以 Δn_t 并在 $\mathbf{R}^2$ 上对 x 积分得

$$\int n_{tt}\Delta n_t\mathrm{d}x-\int\Delta n\Delta n_t\mathrm{d}x=\int\Delta|E|^2\Delta n_t\mathrm{d}x-\Gamma\int\Delta^2 n\Delta n_t\mathrm{d}x.\tag{23}$$

于是从(23)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\nabla n_t\|_{L^2}^2+\|\Delta n\|_{L^2}^2+\Gamma\|\nabla\Delta n\|_{L^2}^2]=2\int\nabla\Delta|E|^2\cdot\|\nabla n_t\|\mathrm{d}x\leqslant C\|\nabla n_t\|_{L^2}(\|\nabla\Delta E\|_{L^2}+1).\tag{24}$$

将算子 ∂_t 作用到方程(4)的两边，然后乘以 $\Delta\bar{E}_t$ 并在 $\mathbf{R}^2$ 上对 x 积分得

$$\int[\mathrm{i}E_{tt}-(\alpha-1)\nabla\times(\nabla\times E_t)+\Delta E_t]\cdot\Delta\bar{E}_t\mathrm{d}x=\int[(nE)_t+\Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E_t)]\cdot\Delta\bar{E}_t\mathrm{d}x.\tag{25}$$

由于

$$\operatorname{Im}\int\mathrm{i}E_{tt}\cdot\Delta\bar{E}_t\mathrm{d}x=-\operatorname{Re}\int\nabla E_{tt}\cdot\nabla\bar{E}_t\mathrm{d}x=-\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla E_t\|_{L^2}^2,$$

$$\operatorname{Im}\int[-(\alpha-1)\nabla\times(\nabla\times E_t)+\Delta E_t]\cdot\Delta\bar{E}_t\mathrm{d}x=0,$$

$$\operatorname{Im}\int(nE)_t\cdot\Delta\bar{E}_t\mathrm{d}x=\operatorname{Im}\int(n_tE+nE_t)\cdot\Delta\bar{E}_t\mathrm{d}x=$$

$$-\operatorname{Im}\int\nabla(n_tE+nE_t)\cdot\nabla\bar{E}_t\mathrm{d}x=-\operatorname{Im}\int[\nabla n_t\cdot(E\cdot\nabla\bar{E}_t)+n_t\nabla E\cdot\nabla\bar{E}_t+\nabla n\cdot(E_t\cdot\nabla\bar{E}_t)]\mathrm{d}x\leqslant C(\|\nabla n_t\|_{L^2}^2+\|\nabla E_t\|_{L^2}^2+1),$$

$$\operatorname{Im}\int\Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E_t)\cdot\Delta\bar{E}_t\mathrm{d}x=-\operatorname{Im}\int\Gamma\Delta(\nabla\cdot E_t)\Delta(\nabla\cdot\bar{E}_t)\mathrm{d}x=0,$$

于是由(25)式知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla E_t\|_{L^2}^2 \leqslant C(\|\nabla n_t\|_{L^2}^2+\|\nabla E_t\|_{L^2}^2+1).\tag{26}$$

在方程(4)两边同乘以$\Delta^2\overline{E}$并在$\mathbf{R}^2$上对x积分得

$$\int[\mathrm{i}E_t-(\alpha-1)\nabla\times(\nabla\times E)+\Delta E]\cdot\Delta^2\overline{E}\mathrm{d}x=\int[nE+\Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E)]\cdot\Delta^2\overline{E}\mathrm{d}x.\tag{27}$$

由于

$$\mathrm{Re}\int \mathrm{i}E_t\cdot\Delta^2\overline{E}\mathrm{d}x=-\mathrm{Re}\int\mathrm{i}\nabla E_t\cdot\nabla\Delta\overline{E}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\|\nabla\Delta E\|_{L^2}^2+\|\nabla E_t\|_{L^2}^2,$$

$$\mathrm{Re}\int-(\alpha-1)\nabla\times(\nabla\times E)\cdot\Delta^2\overline{E}\mathrm{d}x=$$

$$-\mathrm{Re}\int(\alpha-1)\Delta(\nabla\times E)\cdot\Delta(\nabla\times\overline{E})\mathrm{d}x=-(\alpha-1)\|\Delta(\nabla\times E)\|_{L^2}^2,$$

$$\mathrm{Re}\int\Delta E\cdot\Delta^2\overline{E}\mathrm{d}x=-\mathrm{Re}\int\nabla(\Delta E)\nabla(\Delta\overline{E})\mathrm{d}x=-\|\nabla(\Delta E)\|_{L^2}^2,$$

$$\mathrm{Re}\int nE\cdot\Delta^2\overline{E}\mathrm{d}x=-\mathrm{Re}\int[\nabla n\cdot(E\cdot\nabla\Delta\overline{E})+n\nabla E\cdot\nabla\Delta\overline{E}]\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\|\nabla\Delta E\|_{L^2}^2+C,$$

$$\mathrm{Re}\int\Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E)\cdot\Delta^2\overline{E}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int\Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot E)\cdot\nabla\Delta(\nabla\cdot\overline{E})\mathrm{d}x=\Gamma\|\nabla\Delta(\nabla\cdot E)\|_{L^2}^2,$$

于是由(27)式得

$$\frac{1}{2}\|\nabla\Delta E\|_{L^2}^2+(\alpha-1)\|\Delta(\nabla\times E)\|_{L^2}^2+\Gamma\|\nabla\Delta(\nabla\cdot E)\|_{L^2}^2\leqslant\|\nabla E_t\|_{L^2}^2+C.\tag{28}$$

结合(24),(26)式并注意到(28)式知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\nabla n_t\|_{L^2}^2+\|\Delta n\|_{L^2}^2+\Gamma\|\nabla\Delta n\|_{L^2}^2+\|\nabla E_t\|_{L^2}^2]\leqslant C(\|\nabla n_t\|_{L^2}^2+\|\nabla E_t\|_{L^2}^2+1).\tag{29}$$

利用Gronwall不等式得

$$\|\nabla n_t\|_{L^2}^2+\|\Delta n\|_{L^2}^2+\Gamma\|\nabla\Delta n\|_{L^2}^2+\|\nabla E_t\|_{L^2}^2+1\leqslant C.\tag{30}$$

由(28)式知

$$\frac{1}{2}\|\nabla\Delta E\|_{L^2}^2+(\alpha-1)\|\Delta(\nabla\times E)\|_{L^2}^2+\Gamma\|\nabla\Delta(\nabla\cdot E)\|_{L^2}^2\leqslant C.\tag{31}$$

将证明引理5,引理6的方法继续下去,可以得到

引理7　设$E_0(x)\in H^{m+1}(\mathbf{R}^2)$,$n_0(x)\in H^m(\mathbf{R}^2)$,$n_1\in H^{m-2}(\mathbf{R}^2)$,$m\geqslant 4$,则

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[\|E\|_{H^m}^2+\|\nabla\cdot E\|_{H^m}^2+\|n\|_{H^m}^2+\|E_t\|_{H^{m-2}}^2+\|n_t\|_{H^{m-2}}^2]\leqslant C(M).$$

2　整体光滑解的存在惟一性

下面我们来证明定理1.

存在性的证明　用Galerkin方法,构造问题(4)~(7)的近似解E^ν,n^ν,Φ^ν. 类似于引理1,引理3及引理5知$\|E^\nu\|_{H_0^1}$,$\|n^\nu\|_{H_0^1}$,$\|E_t^\nu\|_{L^2}$,$\|n^\nu\|_{tL^2}$一致有界. 于是存在E^ν,n^ν的子列(仍记为E^ν,n^ν)使得

$E^\nu\to E$　在$L^\infty(0,T;H_0^1)$内弱收敛;

$E_t^\nu\to E_t$　在$L^\infty(0,T;L^2)$内弱收敛;

$n^\nu\to n$　在$L^\infty(0,T;H_0^1)$内弱收敛;

$n_t^\nu\to n_t$　在$L^\infty(0,T;L^2)$内弱收敛.

从而知

$E^\nu\to E$　在$L^2(Q)$内强收敛且几乎处处收敛;　(32)

$n^\nu\to n$　在$L^2(Q)$内强收敛且几乎处处收敛.　(33)

又可得$\|n^\nu E^\nu\|_{L^2}$和$\||E^\nu|^2\|_{L^2}$的一致有界性. 于是存在$n^\nu E^\nu$,$|E^\nu|^2$的子列(仍记为$n^\nu E^\nu$,$|E^\nu|^2$)使得

$n^\nu E^\nu\to f$　在$L^\infty(0,T;L^2)$内弱收敛;　(34)

$$|E^{\nu}|^2 \to g \quad \text{在 } L^{\infty}(0,T;L^2) \text{ 内弱收敛}. \tag{35}$$

结合(32) ~ (35) 知

$$f = nE, \quad g = |E|^2.$$

于是由弱收敛性质和紧性定理可得问题(4) ~ (7) 广义解的存在性. 再利用引理 7 中的先验估计和 Sobolev 嵌入定理即可得到问题(4) ~ (7) 的光滑解.

惟一性的证明 设 E_1, n_1, Φ_1 和 E_2, n_2, Φ_2 均为问题(4) ~ (7) 的解. 记

$$u = E_1 - E_2, \quad v = n_1 - n_2, \quad w = \Phi_1 - \Phi_2,$$

则 u, v, w 满足如下方程

$$\mathrm{i}\partial_t u - \alpha \nabla \times (\nabla \times u) + \nabla(\nabla \cdot u) = n_1 E_1 - n_2 E_2 + \Gamma \nabla \Delta(\nabla \cdot u), \tag{36}$$

$$\partial_t v + \nabla \cdot w = 0, \tag{37}$$

$$\partial_t w = -\nabla(v + |E_1|^2 - |E_2|^2) + \Gamma \nabla \Delta v, \tag{38}$$

带初值条件

$$u|_{t=0} = 0, v|_{t=0} = 0, w|_{t=0} = 0, x \in \mathbf{R}^2. \tag{39}$$

在方程(36) 两边同乘以 $\bar{u}$ 并在 $\mathbf{R}^2$ 上对 x 积分得

$$\int (\mathrm{i}\partial_t u - \alpha \nabla \times (\nabla \times u) + \nabla(\nabla \cdot u)) \cdot \bar{u} \mathrm{d}x = \int (n_1 E_1 - n_2 E_2 + \Gamma \nabla \Delta(\nabla \cdot u)) \cdot \bar{u} \mathrm{d}x. \tag{40}$$

由于

$$\mathrm{Im}\int \mathrm{i}\partial_t u \cdot \bar{u} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int \mathrm{i}\partial_t u \cdot \bar{u} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2,$$

$$\mathrm{Im}\int (-\alpha \nabla \times (\nabla \times u) + \nabla(\nabla \cdot u)) \cdot \bar{u} \mathrm{d}x = 0,$$

$$\mathrm{Im}\int \Gamma \nabla \Delta(\nabla \cdot u) \cdot \bar{u} \mathrm{d}x = 0,$$

$$\mathrm{Im}\int (n_1 E_1 - n_2 E_2) \cdot \bar{u} \mathrm{d}x = \mathrm{Im}\int (n_1 u + v E_2) \cdot \bar{u} \mathrm{d}x = \mathrm{Im}\int v E_2 \cdot \bar{u} \mathrm{d}x \leqslant$$
$$\|E_2\|_{L^\infty} \|v\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leqslant C(\|v\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2),$$

所以由(40) 式知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2 \leqslant C(\|v\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2). \tag{41}$$

在方程(38) 两边同乘以 w 并在 $\mathbf{R}^2$ 上对 x 积分得

$$\int \partial_t w \cdot w \mathrm{d}x = \int [-\nabla(v + |E_1|^2 - |E_2|^2) + \Gamma \nabla \Delta v] \cdot w \mathrm{d}x. \tag{42}$$

由于

$$\int \partial_t w \cdot w \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2,$$

$$\int -\nabla v \cdot w \mathrm{d}x = \int v(\nabla \cdot w) \mathrm{d}x = -\int v v_t \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^2}^2,$$

$$\int -\nabla(|E_1|^2 - |E_2|^2) \cdot w \mathrm{d}x = -\int \nabla(E_1 \cdot \bar{u} + u \cdot \bar{E}_2) \cdot w \mathrm{d}x =$$

$$-\int (\nabla E_1 \cdot \bar{u} + E_1 \cdot \nabla \bar{u} + \nabla u \cdot \bar{E}_2 + u \cdot \nabla \bar{E}_2) \cdot w \mathrm{d}x \leqslant C(\|u\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2),$$

$$\int \Gamma \nabla \Delta v \cdot w \mathrm{d}x = -\int \Gamma \Delta v \nabla \cdot w \mathrm{d}x = \int \Gamma \Delta v v_t \mathrm{d}x = -\frac{\Gamma}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|_{L^2}^2,$$

于是从(42) 式知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|w\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \Gamma \|\nabla v\|_{L^2}^2] \leqslant C(\|u\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2). \tag{43}$$

在方程(36) 两边同乘以 $\Delta\bar{u}$ 并在 $\mathbf{R}^2$ 上对 x 积分得

$$\int (\mathrm{i}\partial_t u - \alpha \nabla \times (\nabla \times u) + \nabla(\nabla \cdot u)) \cdot \Delta\bar{u} \mathrm{d}x = \int (n_1 E_1 - n_2 E_2 + \Gamma \nabla \Delta(\nabla \cdot u)) \cdot \Delta\bar{u} \mathrm{d}x. \tag{44}$$

注意到

$$\mathrm{Im}\int \mathrm{i}\partial_t u\cdot\Delta\bar{u}\mathrm{d}x=-\mathrm{Re}\int\nabla\partial_t u\cdot\nabla\bar{u}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2,$$

$$\mathrm{Im}\int(-\alpha\nabla\times(\nabla\times u)+\nabla(\nabla\cdot u))\cdot\Delta\bar{u}\mathrm{d}x=0,$$

$$\mathrm{Im}\int\Gamma\nabla\Delta(\nabla\cdot u)\cdot\Delta\bar{u}\mathrm{d}x=0,$$

$$\mathrm{Im}\int(n_1E_1-n_2E_2)\cdot\Delta\bar{u}\mathrm{d}x=-\mathrm{Im}\int\nabla(n_1u+vE_2)\cdot\nabla\bar{u}\mathrm{d}x=$$

$$-\mathrm{Im}\int[\nabla n_1\cdot(u\cdot\nabla\bar{u})+\nabla v\cdot(E_2\cdot\nabla\bar{u})+v\nabla E_2\cdot\nabla\bar{u}]\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C(\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2),$$

所以由(44)式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2\leqslant C(\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2).\tag{45}$$

因此,结合(41),(43)和(45)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|u\|_{L^2}^2+\|w\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2]\leqslant$$

$$C(\|v\|_{L^2}^2+\|w\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^2).\tag{46}$$

利用 Gronwall 不等式并注意到初始条件(39)得

$$u\equiv0,\quad v\equiv0,\quad w\equiv0.$$

定理1证毕.

[参考文献]

[1] Zakharov V E. Collapse of Langmuir waves [J]. Sov Phys JETP, 1972, 35: 908-914.

[2] Garcia L G, Haas F, L P L de Oliveira, et al. Modified Zakharov equations for plasmas with a quantum correction [J]. Phys Plasmas, 2005, 12(1): 1-8.

[3] Haas F, Shukla P K. Quantum and classical dynamics of Langmuir wave packets [J]. Phys Rev E, 2009, 79(6): 1-9.

[4] Simpson G, Sulem C, Sulem P L. Arrest of Langmuir wave collapse by quantum effects [J]. Phys Rev E, 2009, 80(5): 1-9.

[5] Friedman A. Partial Differential Equations [M]. New York, Montreal Que, London: Holt, Reihart and Winston, Inc, 1969.

[6] Brezis H, Gallouet T. Nonlinear Schröinger evolution equations [J]. Nonlinear Anal, 1980, 4(4): 677-681.

[责任编辑:丁 蓉]