

结构多位置裂缝识别的有限元方法

林 缨 李学平

(中南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

[摘要] 由振动系统动力方程的有限元表达形式,推导出结构损伤和模态参数间的联系,建立基于有限元的结构多位置裂缝的识别方法.本方法通过损伤灵敏度矩阵,识别结构裂缝所在的单元位置并确定裂缝的深度,计算简便.作者通过数值计算,验证了此方法的有效性.从算例结果可以看出,将结构单元适当细分,可以提高裂缝识别的精度.

[关键词] 损伤灵敏度矩阵 结构裂缝单元识别 结构裂缝深度算式 有限元列式 模态参数

[中图分类号] TU323.3 ,O322 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)01-0039-07

Identification of Multi-Position Cracks in Structures Based on Finite Element Method

Lin Ying ,Li Xueping

(School of Civil Engineering , Central South University , Changsha 410075 , China)

Abstract: The connection between structural damage and modal parameter was derived and the identification of multi-position cracks in structures based on finite element method was obtained by using finite element expression of vibrating system's dynamic equation. By making use of damage sensitivity matrix , it is eligible to identify exact positions of structural cracks , and the crack depths in the meanwhile. This method is simple in calculation. This method is verified by means of numerical calculations. The results show that comparatively detailed division of the structural elements may improve the identification accuracy.

Key words: damage sensitivity matrix , identification of structural crack element , formula of structural crack depth , finite element formulation , modal parameter

在工程实践中,裂缝的存在对结构危害性较大,因此对含裂缝的结构进行研究具有重要的现实意义.长期以来,基于动力特性的结构损伤检测方法在航空、航天、机械、土木工程等众多领域得到普遍应用,至今却没有完全令人满意的解决方案,故而一直是国际学术界与工程界关注的热点.

目前在结构损伤和裂缝检测研究中应用最多的方法是监测固有频率的变化^[1-3].由于工程实践中,固有频率很容易测量得到,且与测量位置无关,频率测量的精度也比振型和阻尼测量的精度高,因此通常选择固有频率作为探测损伤位置及程度的参数.但是目前大多数研究还处于对单个位置损伤的数值仿真阶段^[4-7],仿真结果及其结论也不统一.对双位置裂缝和多位置裂缝的识别研究则较少见到^[8-9],研究的难点在于需要对多个裂缝的位置和深度进行识别.

本文运用有限元摄动方法和线弹性断裂力学理论,由振动系统的动力方程的有限元表达形式,推导结构损伤和模态参数间的联系,以获得识别结构裂缝位置以及裂缝深度的算式.

1 损伤梁运动方程的有限元列式

考虑等截面 Euler-Bernoulli 梁,共有 p 处横向裂缝,距左端支座的距离分别为 $x_{c1}, x_{c2}, \dots, x_{cp}$,如图 1

收稿日期: 2011-10-12.

通讯联系人:李学平,博士,副教授,研究方向:结构损伤识别. E-mail: lixueping@mail.csu.edu.cn

所示:

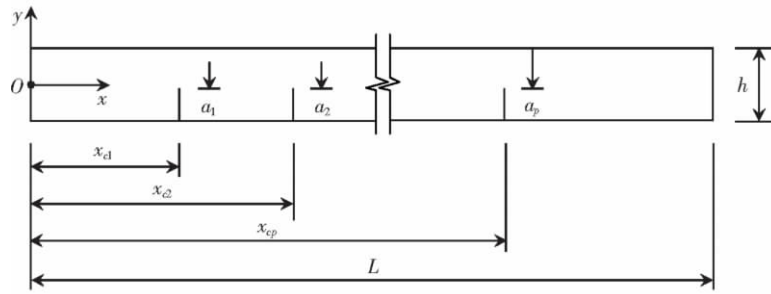


图1 多裂缝梁模型

Fig.1 Multi-crack beam model

其自由振动的运动方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \left(EI - \sum_{i=1}^p EI_{ci} \delta(x - x_{ci}) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (1)$$

其中 $y(x, t)$ 为梁的横向位移; ρ 为梁的质量密度; A 为横截面面积; E 为材料的弹性模量; I 为梁截面的惯性矩; I_{ci} 为裂缝位置梁截面惯性矩的减少量. 对于矩形截面而言

$$I_c = \frac{ba^3}{12} + ba \left(\frac{h-a}{2} \right)^2 = \frac{ab}{12} (3h^2 - 6ah + 4a^2), \quad (2)$$

其中 b h 分别为截面的宽和高 a 为裂缝深度. 则系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (3)$$

弹性势能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI - \sum_{i=1}^p EI_{ci} \delta(x - x_{ci}) \right] \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (4)$$

将梁的横向位移表示为

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^n Y_k(x) q_k(t), \quad (5)$$

其中 $Y_k(x)$ 是梁的模式振型. 从而动能和弹性势能可写成

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left[\sum_{k=1}^n Y_k(x) \dot{q}_k(t) \sum_{j=1}^n Y_j(x) \dot{q}_j(t) \right] dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_k(t) m_{kj} \dot{q}_j(t), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI - \sum_{i=1}^p EI_{ci} \delta(x - x_{ci}) \right] \left(\sum_{k=1}^n Y''_k(x) q_k(t) \sum_{j=1}^n Y''_j(x) q_j(t) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\sum_{k=1}^n Y''_k(x) q_k(t) \sum_{j=1}^n Y''_j(x) q_j(t) \right) dx - \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p EI_{ci} \delta(x - x_{ci}) \int_0^L \left(\sum_{k=1}^n Y''_k(x) q_k(t) \sum_{j=1}^n Y''_j(x) q_j(t) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n q_k(t) k_{kj} q_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n q_k(t) k'_{kj} q_j(t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$m_{kj} = \int_0^L \rho A Y_k(x) Y_j(x) dx, \quad (8a)$$

$$k_{kj} = \int_0^L EI Y''_k(x) Y''_j(x) dx, \quad (8b)$$

$$k'_{kj} = \sum_{i=1}^p \int_0^L EI_{ci} \delta(x - x_{ci}) Y''_k(x) Y''_j(x) dx = \sum_{i=1}^p EI_{ci} Y''_k(x_{ci}) Y''_j(x_{ci}). \quad (8c)$$

代入 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0, \quad (9)$$

因此得

$$\sum_{j=1}^n m_{kj} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n (k_{kj} - k'_{kj}) q_j(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

将上式写成矩阵形式

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + ([K] - [K']) \{q(t)\} = 0, \quad (11)$$

其中

$$[M] = \{m_{kj} \mid k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (12a)$$

$$[K] = \{k_{kj} \mid k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (12b)$$

$$[K'] = \{k'_{kj} \mid k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (12c)$$

$$\{q(t)\} = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\}^T. \quad (12d)$$

2 结构损伤的灵敏度矩阵

忽略阻尼的影响, 无裂缝梁振动的特征方程为

$$([K] - \omega^2 [M]) \Phi = 0, \quad (13)$$

其中 $[K]$ 为刚度矩阵, $[M]$ 为质量矩阵, Φ 为正则化振型, ω 为固有频率.

由式 (11) 知, 结构损伤后, 如果不考虑质量的变化, 由于刚度的变化, 从而引起固有频率及振型产生相应的变化量为 $[\Delta\omega^2]$ 和 $[\Delta\Phi]$. 结构损伤后的动力特征方程为

$$([K] - [K'] - (\omega^2 - \Delta\omega^2) [M]) (\Phi - \Delta\Phi) = 0, \quad (14)$$

左乘 $[\Phi - \Delta\Phi]^T$, 将上式展开, 且略去二阶项后, 经整理可化为

$$\begin{aligned} & \Phi^T (\omega^2 [M] - [K]) \Phi - \Phi^T [K'] \Phi + \Delta\Phi^T (\omega^2 [M] - [K]) \Phi + \\ & \Phi^T (\omega^2 [M] - [K]) \Delta\Phi + \Delta\omega^2 \Phi^T [M] \Phi = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

根据 $[M]$ 和 $[K]$ 的对称性并注意到 (13) 式

$$\Delta\omega^2 = \frac{\Phi^T [K'] \Phi}{\Phi^T [M] \Phi}. \quad (16)$$

对于某阶模态 i , 上式为

$$\Delta\omega_i^2 = \frac{\Phi_i^T [K'] \Phi_i}{\Phi_i^T [M] \Phi_i}, \quad (17)$$

联立式 (13) 可得

$$\frac{\Delta\omega_i^2}{\omega_i^2} = \frac{\Phi_i^T [K'] \Phi_i}{\Phi_i^T [K] \Phi_i}. \quad (18)$$

定义单元损伤系数矩阵

$$[K']_N = D_N [K]_N, \quad (19)$$

其元素为

$$D_i = \frac{(K'_N)_{ij}}{(K_N)_{ij}}, \quad (20)$$

K'_N 和 K_N 分别为损伤后刚度矩阵的变化与损伤前的刚度矩阵, N 代表损伤单元. 式 (18) 可化为^[4]

$$\frac{\Delta\omega_i^2}{\omega_i^2} = \sum_{N=1}^n S_{iN} D_N, \quad (21)$$

其中 S_{iN} 为反映刚度变化的特征值敏感度, n 为总单元数. 上式写成矩阵形式为

$$\{Z\} = [S] \{D\}, \quad (22)$$

其中 Z 为特征值变化向量, $[S]$ 为灵敏度矩阵, D 为损伤参数列阵.

对于等截面梁的特征值敏感度矩阵的元素可由下式计算:

$$S_{iN} = \frac{\int_{x_N}^{x_{N+1}} \{ \Phi''_i(x) \}^2 dx}{\int_0^L \{ \Phi''_i(x) \}^2 dx} . \quad (23)$$

按照 Gudmunson 的研究^[10] 模态应变能的变化与固有频率的变化有如下关系:

$$\frac{\Delta U_i}{U_i} = \frac{\Delta \omega_i^2}{\omega_i^2} , \quad (24)$$

其中 U_i 是未损伤结构的第 i 阶模态应变能 ΔU_i 是结构损伤后第 i 阶模态应变能的损失.

3 损伤识别算式

现在,假设我们讨论的梁为 Euler-Bernoulli 梁,其第 i 阶模态应变能 U_i 为:

$$U_i = \int_0^L EI \{ \Phi''_i(x) \}^2 dx. \quad (25)$$

由线弹性断裂力学理论知,当裂缝深度由 0 增加到 a 时所消耗的能量为

$$E_c = \int_0^a G da = \int_0^a G b da , \quad (26)$$

其中 b 为梁截面的宽度, G 是应变能释放率. 假设仅存在第 I 型裂缝, 则应变能释放率可写为

$$G = \frac{K_I^2}{E} , \quad (27)$$

其中 K_I 是第 I 型裂缝的应力强度因子, E 为弹性模量.

由文献[11]知,

$$\Delta U_i = E_c. \quad (28)$$

联立考虑式(26)、式(27)和式(28), 使得应变能的变化为

$$\Delta U_i = \int_0^a \frac{K_I^2}{E} b da = \frac{b}{E} \int_0^a K_I^2 da , \quad (29)$$

而

$$K_I = \gamma \sigma \sqrt{\pi a} , \quad (30)$$

其中 γ 是与裂缝长度和梁的深度之比有关的一个几何因子. 对于无限长板条在纯弯曲下单边裂纹的情况,

$$\gamma(a) = 1.122 - 1.40 \left(\frac{a}{h} \right) + 7.33 \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 13.08 \left(\frac{a}{h} \right)^3 + 14.0 \left(\frac{a}{h} \right)^4. \quad (31)$$

为简化分析, 假设上式在线弹性、多裂纹条件下也成立, 则式(29)可化为

$$\Delta U_i = \frac{\pi b \sigma_N^2}{E} \int_0^a \gamma^2(a) a_N da = \frac{\pi b \sigma_N^2}{E} \xi(a_N) , \quad (32)$$

$$\xi(a_N) = \int_0^a \gamma^2(a_N) a_N da , \quad (33)$$

上式中 $a_N = a(x_N)$ 和 $\sigma_N = \sigma(x_N)$ 分别表示沿梁的轴线方向在位置 x_N 处的裂缝大小与最大弯曲应力. 对于 Euler-Bernoulli 梁, 其应力为

$$\sigma(x_N) = \frac{1}{2} E h \Phi''_i(x_N) , \quad (34)$$

$$\frac{\Delta U_i}{U_i} = \frac{\pi b h^2}{4I} \xi(a_N) , \quad (35)$$

联立式(21)、(28)和(35) 使得

$$Z_i = \sum_{n=1}^N S_{iN} \xi(a_N) . \quad (36)$$

假设梁被分成 m 段, 测得了前 q 阶固有频率, 则式(36)写成矩阵形式为

$$\{Z\}_{q \times 1} = [S]_{q \times m} \{D\}_{m \times 1} , \quad (37)$$

其中

$$D_i = \xi(a_N)_i, \quad (38)$$

上式可化为

$$\{D\}_{m \times 1} = \{[S]^T [S]\}^{-1} [S]^T \{Z\}_{q \times 1} = [S^*]_{m \times q} \{Z\}_{q \times 1}, \quad (39)$$

其中 $[S^*]_{m \times q} = \{[S]^T [S]\}^{-1} [S]^T$.

求解后 $\{D\}$ 中大于零的元素表示该单元存在裂缝. 由式(39) 得

$$D_i = \sum_{j=1}^q S_{ij}^* Z_j, \quad (40)$$

因此, 由式(38) 通过数值计算方法便可求得第 N 个位置的裂缝深度

$$\xi(a_N) = D_i. \quad (41)$$

这样, 只要求出了 $\{D\}$, 便可得到裂缝存在位置, 同时可计算其深度.

4 算法验证

为了验证识别算法的正确性, 以两端固支板作为数值算例. 其几何尺寸及有限元计算模型如图 2 所示. 材料参数为弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 密度 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$. 存在 3 处裂缝, 分别位于距左端支座 $x_1 = 0.13 \text{ m}$, 深度为 $a_1 = 0.3 \text{ cm}$; $x_2 = 0.32 \text{ m}$, $a_2 = 0.6 \text{ cm}$; $x_3 = 0.67 \text{ m}$, $a_3 = 1.0 \text{ cm}$. 不含裂缝时板的特征值由经典的理论方法计算, 含裂缝板的特征值由 Ansys 有限元分析软件计算得到, 计算结果列于表 1 中.

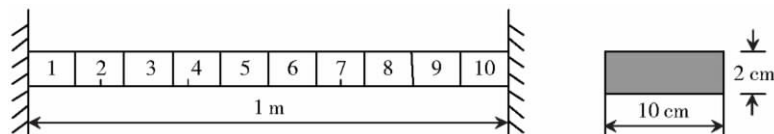


图 2 含裂缝两端固支板分析模型

Fig.2 Analytic model for two-edge fixed slab with cracks

表 1 两端固支板的前四阶固有频率

	ω_1/Hz	ω_2/Hz	ω_3/Hz	ω_4/Hz
完好板	104.18	287.14	562.97	930.53
裂缝板	101.78	282.63	551.48	922.76

将板划分为 10 个单元, 由式(23) 求得的特征敏感度矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0.0007 & 0.0168 & 0.0763 & 0.1674 & 0.2380 & 0.2380 & 0.1674 & 0.0763 & 0.0168 & 0.0007 \\ 0.0045 & 0.0763 & 0.2017 & 0.1793 & 0.0381 & 0.0381 & 0.1793 & 0.2017 & 0.0763 & 0.0045 \\ 0.0151 & 0.1547 & 0.1749 & 0.0217 & 0.1341 & 0.1341 & 0.0217 & 0.1749 & 0.1547 & 0.0151 \\ 0.0309 & 0.1961 & 0.0549 & 0.1306 & 0.0893 & 0.0893 & 0.1306 & 0.0549 & 0.1961 & 0.0309 \end{bmatrix},$$

由式(40) 算得 $\{D\}$ 中大于零的项为

$$\{D_2, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8\}^T = \{0.0047, 0.0204, 0.00026, 0.0007, 0.054, 0.0001\}^T,$$

损伤因子分布情况如图 3(a) 所示.

由于 D_5, D_6, D_8 相对于其他 3 个元素小得很多, 可认为这些单元不存在裂缝, 或裂缝极小, 可忽略. 由此可知板的第二单元(0.1 ~ 0.2 m)、第四单元(0.3 ~ 0.4 m) 和第七单元(0.6 ~ 0.7 m) 存在裂缝. 其相对深度由式(41) 求得

$$a_1/h = 0.141; \quad a_2/h = 0.293; \quad a_3/h = 0.478.$$

其裂缝识别结果与裂缝实际情况对比见表 2 和图 4(a) 所示.

为比较单元大小对计算精度的影响, 将板划分为 20 个单元, 按同样过程求得 $\{D\}$ 中大于零的项为

$$\{D_3, D_7, D_{14}\}^T = \{0.0051, 0.0209, 0.059\}^T.$$

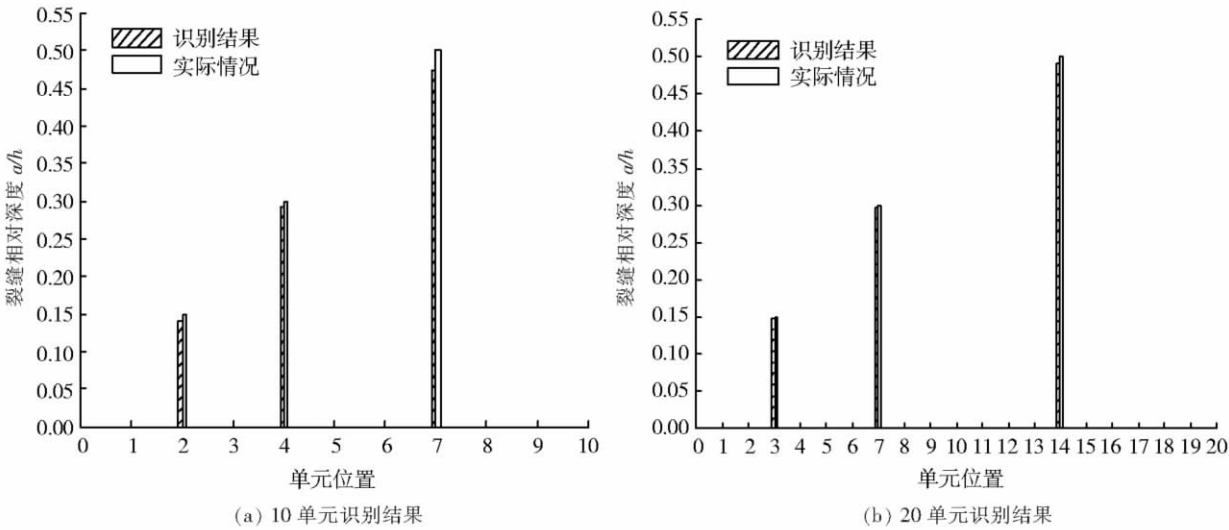
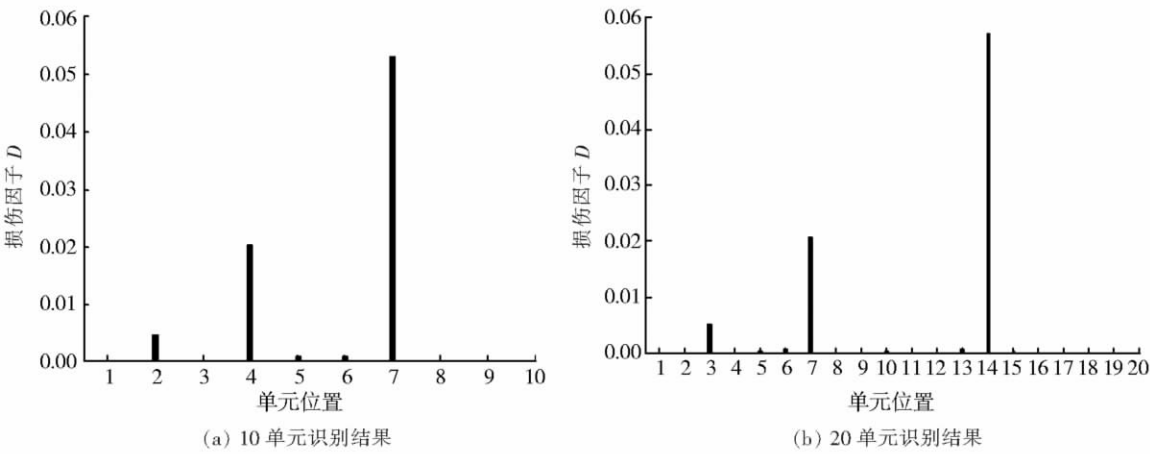
损伤因子分布情况如图 3(b) 所示. 由此可知板的第三单元(0.1 ~ 0.15 m)、第七单元(0.3 ~ 0.35 m) 和第十四单元(0.65 ~ 0.7 m) 存在裂缝. 其相对深度由式(41) 求得

$$a_1/h = 0.147; \quad a_2/h = 0.296; \quad a_3/h = 0.492.$$

其裂缝识别结果与裂缝实际情况对比如表 2 和图 4(b) 所示.

表 2 两端固支板裂缝识别结果与实际状况比较

实际状况		识别结果					
		10 单元			20 单元		
位置 x/m	深度 $/ (a/h)$	位置 x/m	深度 $/ (a/h)$	误差 $/\%$	位置 x/m	深度 $/ (a/h)$	误差 $/\%$
0.13	0.15	0.1 ~ 0.2	0.141	- 6.0	0.10 ~ 0.15	0.147	- 2
0.32	0.20	0.3 ~ 0.4	0.293	- 2.3	0.30 ~ 0.35	0.296	- 1.33
0.67	0.50	0.6 ~ 0.7	0.478	- 4.4	0.65 ~ 0.70	0.492	- 1.6



5 结论

本文提出了一种结构多裂缝诊断的有限元方法. 运用摄动方法和线弹性断裂力学理论 ,推导出裂缝梁结构振动时动力方程的有限元表达式 ,建立了由结构损伤前和损伤后的前几阶(一般为 3 阶)特征值的变化 ,识别裂缝所在的单元以及其深度的算式. 以上算例基于板带 ,但对于其他结构 ,如简支梁、悬臂梁、两端固支梁或多跨连续梁等的损伤识别 ,通过选择相应的应力强度因子的计算公式 ,本文方法也同样适用(由于篇幅所限 ,其他算例未给出) .

从数值模拟计算结果可以看出 ,该方法能同时识别出裂缝位置和其程度 ,具有计算简单的特点. 虽然

裂缝位置只能识别出裂缝所在的单元,不过随着结构单元划分得较细,识别精度将会相应提高,当然在实际应用中,没必要过分追求计算精度,需要注意计算精度和计算效率的协调。

[参考文献]

- [1] Salawu O S. Detection of structural damage through changes in frequency: a review [J]. Engineering Structures, 1997, 19 (9): 718-723.
- [2] Lakshmi Narayana K, Jebaraj C. Sensitivity analysis of local/global modal parameters for identification of a crack in a beam [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 228(5): 977-994.
- [3] Karthikeyana M, Tiwaria R, Talukda S. Crack localisation and sizing in a beam based on the free and forced response measurements [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21: 1362-1385.
- [4] 高芳清. 基于模态分析的结构损伤检测方法研究 [J]. 西南交通大学学报, 1998, 33(1): 108-113.
- [5] Ren Weixin, Guido De Roeck. Structural damage identification using modal data I: simulation verification [J]. Journal of Structural Engineering, 2002, 128(1): 87-95.
- [6] Ren Weixin, Guido De Roeck. Structural damage identification using modal data II: test verification [J]. Journal of Structural Engineering, 2002, 128(1): 96~104.
- [7] 汪之松, 郭惠勇, 李正良. 基于频率响应的不同结构损伤识别方法研究 [J]. 工程力学, 2008, 25(6): 6-13.
- [8] 徐峰, 彭海阔, 孟光. 基于损伤因子的板架结构损伤识别方法研究 [J]. 振动与冲击, 2010, 29(12): 22-25.
- [9] Lu Q, Ren G, Zhan Y. Multiple damage location with flexibility curvature and relative frequency change for beam structures [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 253(5): 1101-1114.
- [10] Gudmunson P. Eigenfrequency. Changes of structures due to cracks, notches or other geometric changes [J]. Journal Mech Phys Solids, 1982, 30(5): 339-53.
- [11] Yang X F, Swamidas A S J, Seshadri R. Crack identification in vibrating beam using the energy method [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 244(2): 339-357.

[责任编辑: 顾晓天]