第 35 卷第 2 期
2012 年 6 月

南京师大学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition)

Vol. 35 No. 2
June,2012

次范整线性空间上的可加奇性算子空间

方锦暄[1],李 晗[1,2]

(1. 南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210046)
(2. 解放军信息工程大学理学院,河南 郑州 450001)

[摘要] 利用次范整线性空间上可加奇性算子的 3 种不同的次范数和拟次范数,研究了可加奇性算子空间. 证明了有界(局部有界、球有界)可加奇性算子空间关于相应的算子次范数(拟次范数)构成一个次范(拟次范)整线性空间. 此外,还给出了可加奇性算子空间成为完备次范整线性空间的几个充分条件.

[关键词] 次范整线性空间,可加奇性算子空间,完备性
[中图分类号] O189.11 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)02-0001-07

Spaces of Additive Odd Operators on Sub-Normed Z-Spaces

Fang Jinxuan[1],Li Han[1,2]

(1. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)
(2. Institute of Sciences, The PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: Using the three different sub-norm and quasi-sub-norms of additive odd operators on sub-normed integral-linear spaces, the space of additive odd operators is studied. We prove that the space of bounded (local-bounded, ball-bounded) additive odd operators with a corespoinding sub-norm (quasi-sub-norm) of operators is a sub-normed (quasi-sub-normed) space. In addition, we also give some sufficient conditions for these spaces of additive odd operators to be complete sub-normed integral-linear spaces.

Key words: sub-nomed integral-linear spaces, spaces of additive odd operators, completeness

1 预备知识

王国俊等在文[1]中引入并研究了平移空间. 在文[2]中引入了次范整线性空间(简称次范 Z-空间),证明了任一可换平移空间,可以导出一个次范 Z-空间. 在文[3]中,我们证明了可换平移空间与次范 Z-空间本质上是等价的,两者可互相确定. 次范 Z-空间是赋范线性空间的重要推广,因此进一步研究次范 Z-空间的基本理论是有科学意义的. 在文[3]中,我们建立了 Abel 群上的 Hahn-Banach 定理,即 Abel 群上可加奇泛函的延拓定理. 作为其推论,得到了次范 Z 空间上的 Hahn-Banach 定理. 在文[4]中,研究了次范 Z-空间上的可加奇性算子理论. 定义了可加奇性算子 3 种不同的拟次范数,其中 1 种是次范数. 利用它们分别给出了可加奇性算子 3 种有界性(即有界、局部有界和球有界)的刻画,深入地讨论了这 3 种有界性之间的关系,以及它们与连续性之间的关系,给出使它们彼此等价的条件. 此外,还进一步研究了次范 Z-空间上连续可加奇性算子族的共鸣定理,推广了文[2]的相应结果. 在文[2-4]工作的基础上,本文将研究次范 Z-空间上的可加奇性算子空间. 利用文[4]引入的可加奇性算子的 3 种不同的(拟)次范数,证明了有界可加奇性算子空间关于相应的算子次范数构成一个次范整线性空间;(在 θ 处)局部有界和球有界的可加奇性算子空间关于相应的算子拟次范数构成拟次范整线性空间,同时,给出了使它们构成次范整线性空间的充分条件. 此外,我们还给出了使这些可加奇性算子空间成为完备的次范 Z-空间的几个充

收稿日期: 2011-12-20.
基金项目: 国家自然科学基金(10671094).
通讯联系人: 方锦暄,教授,研究方向: 泛函分析. E-mail: jxfang@njnu.edu.cn

分条件. 我们的工作推广了经典泛函分析中赋范空间上有界线性算子空间的相应理论.

设$(X, +, \theta)$是Abel群,Z是整数加群,其中θ是零元. $\mathbf{Z}^+$和$\mathbf{Z}^-$分别表示所有正整数和所有负整数的集合. 我们定义整数m与X中元素x的"数乘"mx如下:

$$mx = \begin{cases} \underbrace{x + \cdots + x}_{m}, & m \in \mathbf{Z}^+, \\ -[(-m)x], & m \in \mathbf{Z}^-, \\ \theta, & m = 0. \end{cases}$$

容易验证$(X, +, \theta)$上的这种"数乘"运算(称为Z－数乘)具有如下性质:

(i) $m(x + y) = mx + my$;

(ii) $(m + n)x = mx + nx$;

(iii) $(mn)x = m(nx)$;

(iv) $1x = x$.

定义了这种"数乘"的Abel群$(X, +, \theta)$称为整线性空间,简单称为Z－线性空间,记为$(X, +, \theta)_{\mathbf{Z}}$,或简记为$X_{\mathbf{Z}}$.

定义1[2,4] 设$(X, +, \theta)_{\mathbf{Z}}$是一个整线性空间. 映射$\|\cdot\|: X_{\mathbf{Z}} \to [0, +\infty)$满足以下条件:

(SN－1) $\|x\| = 0$当且仅当$x = \theta$;

(SN－2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$;

(SN－3) $\|-x\| = \|x\|, x \in X$,

则称$\|\cdot\|$为$X_{\mathbf{Z}}$上的一个次范数,称$(X_{\mathbf{Z}}, \|\cdot\|)$为次范整线性空间,或简称次范Z－空间.

如果映射$\|\cdot\|: X_{\mathbf{Z}} \to [0, +\infty)$满足:(SN－1)$'$ $\|\theta\| = 0$,以及(SN－2)和(SN－3),则称$\|\cdot\|$为$X_{\mathbf{Z}}$上的一个拟次范数,称$(X_{\mathbf{Z}}, \|\cdot\|)$为拟次范Z－空间.

注1 文[2]中将次范整线性空间简称为"Z－空间",本文与文[4]一样,不采用这一简称,因为它容易与"整线性空间"(即"Z－线性空间")相混淆.

仿照赋范线性空间的情形,我们可以在次范Z－空间中,引入收敛点列、Cauchy列和完备性等概念.

定义2[4] 设$(X, +, \theta)$和$(Y, +, \theta)$是两个Abel群(为了简化记号,这两个群中的零元,使用了同一个记号θ),$T: X \to Y$是一映射,

(1) 如果对每个$x \in X$,有$T(-x) = -T(x)$ ($T(-x) = T(x)$),则称T为奇性算子(相应地,偶性算子);

(2) 如果对任何$x, y \in X$,有$T(x + y) = T(x) + T(y)$,则称T为可加算子.

特别地,如果$Y = \mathbf{R}$,则分别改称奇(偶)性算子、可加算子为奇(偶)性泛函、可加泛函.

定义3[2,4] 设$(X_{\mathbf{Z}}, \|\cdot\|_1)$和$(Y_{\mathbf{Z}}, \|\cdot\|_2)$是两个次范Z－空间,$T: X_{\mathbf{Z}} \to Y_{\mathbf{Z}}$是可加奇性算子,

(1) 如果存在$m > 0$使得对任何$x \in X$,有$\|Tx\|_2 \leqslant m\|x\|_1$,则称$T$是有界的.

(2) 如果存在某个小球$B_X(x_0, r) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leqslant r\}$ ($x_0 \in X, r > 0$)及$m > 0$,使得对任何$x \in B_X(x_0, r)$,有$\|Tx\|_2 \leqslant m\|x\|_1$,则称$T$在$x_0$处是局部有界的,简称$T$是局部有界的.

(3) 如果存在$r, m > 0$使得对任何$x \in B_X(\theta, r)$,有$\|Tx\|_2 \leqslant m$,则称T是球有界的.

注2[4] 文[2]对次范Z－空间上的"线性算子"定义了有界、局部有界和球有界性. 其实,次范Z－空间上的"线性算子"与"可加奇性算子"是等价的. 另外,需要指出的是上述定义2中给出的算子"局部有界性"与[2]中的定义有所不同,确切地说,文[2]意义下的"局部有界"就是这里的"在θ处局部有界". 不难看出:

T有界$\Rightarrow T$(在θ处)局部有界$\Rightarrow T$球有界. 其逆一般不成立(见文[4]的例1和例2).

定义4[4] 设$(X_{\mathbf{Z}}, \|\cdot\|)$是(拟)次范Z－空间,

(1) 如果$\|\cdot\|$满足:对任何$x \in X$和$n \in \mathbf{Z}^+$,$\|nx\| = n\|x\|$,则称$\|\cdot\|$是整齐性的.

(2) 如果$x_0 \in X$且存在自然数子列$\{n_k\}$使得$(1/n_k)x \in X (k = 1, 2, \cdots)$,则称$x_0$是$X$中的非孤立元.

有关的例子参见[4]中的例1～例4.

2 可加奇性算子空间

我们用 $\mathscr{A}(X,Y)$ 表示 X_Z 到 Y_Z 的可加奇性算子全体. 记 $\mathscr{B}(X,Y)$ 为 X_Z 到 Y_Z 的有界可加奇性算子全体. 在 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中定义加法,负元如下:

$$T_1, T_2, T \in \mathscr{B}(X,Y), \quad (T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x, \quad (-T)(x) = -(Tx),$$

则 $(\mathscr{B}(X,Y), +, \Theta)$ 是一个 Abel 群(其中 Θ 是零算子), $(\mathscr{B}(X,Y), +, \Theta)_Z$ 是一个整线性空间,简记为 $\mathscr{B}(X,Y)_Z$. 类似地,我们分别记 $\mathscr{B}_L(X,Y)$ 和 $\mathscr{B}_B(X,Y)$ 为 X_Z 到 Y_Z 的在 θ 处局部有界可加奇性算子全体和球有界可加奇性算子全体. 相应地, $(\mathscr{B}_L(X,Y), +, \Theta)_Z$ 和 $(\mathscr{B}_L(X,Y), +, \Theta)_Z$ 也是整线性空间,分别简记为 $\mathscr{B}_L(X,Y)_Z$ 和 $\mathscr{B}_B(X,Y)_Z$.

定义 5[4] 设 $(X_Z, \|\cdot\|_1)$ 和 $(Y_Z, \|\cdot\|_2)$ 是两个次范 Z-空间, $T: X_Z \to Y_Z$ 是可加奇性算子. 我们分别定义 3 个映射 $\|\cdot\|, \|\cdot\|_L, \|\cdot\|_B: \mathscr{A}(X,Y) \to [0, +\infty]$ 如下(规定 $\sup\varnothing = 0$):

$$\|T\| = \sup_{x\neq\theta} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}, \tag{1}$$

$$\|T\|_L = \inf_{r>0} \sup_{0<\|x\|_1\leq r} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}, \tag{2}$$

$$\|T\|_B = \inf_{0<r\leq 1} \sup_{\|x\|_1\leq r} \frac{\|Tx\|_2}{r}. \tag{3}$$

注 3 上述 $\|T\|_B$ 的定义与[4]中的定义稍有不同. 在[4]中,

$$\|T\|_B = \inf_{r>0} \sup_{\|x\|_1\leq r} \frac{\|Tx\|_2}{r}. \tag{3'}$$

不难看出,这一改动并不影响[4]中得到的所有结果. 但对下面关于球有界可加奇性算子空间完备性的讨论是有益的.

引理 1[4] 设 $(X_Z, \|\cdot\|_1)$ 和 $(Y_Z, \|\cdot\|_2)$ 是两个次范 Z-空间, $T \in \mathscr{A}(X,Y)$, 则

(1) T 有界当且仅当 $\|T\| < +\infty$;

(2) T 在 θ 处局部有界当且仅当 $\|T\|_L < +\infty$;

(3) T 球有界当且仅当 $\|T\|_B < +\infty$.

定理 1 由(1)式定义的 $\|\cdot\|$, 即

$$\|T\| = \sup_{x\neq\theta} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}, \quad T \in \mathscr{B}(X,Y)_Z$$

是 $\mathscr{B}(X,Y)_Z$ 上的次范数,从而 $(\mathscr{B}(X,Y)_Z, \|\cdot\|)$ 是一个次范 Z-空间.

证明 类似于赋范空间上有界线性算子空间的证明,故省略.

定理 2 由(2)式定义的 $\|\cdot\|_L$, 即

$$\|T\|_L = \inf_{r>0} \sup_{0<\|x\|_1\leq r} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}, \quad T \in \mathscr{B}_L(X,Y)_Z$$

是 $\mathscr{B}_L(X,Y)_Z$ 上的拟次范数,从而 $(\mathscr{B}_L(X,Y)_Z, \|\cdot\|_L)$ 是一个拟次范 Z-空间. 如果 X_Z 中的每个非零元是非孤立的,且 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 具有整齐性,则 $(\mathscr{B}_L(X,Y)_Z, \|\cdot\|_L)$ 是次范 Z-空间.

证明 (SN-1)′, (SN-3) 显然成立.

(SN-2) 设 $T_i \in \mathscr{B}_L(X,Y)_Z$, $i = 1,2$. 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $r_i > 0$ 使得

$$\sup_{0<\|x\|_1\leq r_i} \frac{\|T_ix\|_2}{\|x\|_1} < \|T_i\|_L + \varepsilon/2, \quad i = 1,2.$$

令 $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$, 则有

$$\sup_{0<\|x\|_1\leq r_0} \frac{\|T_ix\|_2}{\|x\|_1} < \|T_i\|_L + \varepsilon/2, \quad i = 1,2.$$

从而

$$\sup_{0<\|x\|_1\leq r_0} \frac{\|(T_1+T_2)(x)\|_2}{\|x\|_1} \leq \sup_{0<\|x\|_1\leq r_0} \frac{\|T_1x\|_2}{\|x\|_1} + \sup_{0<\|x\|_1\leq r_0} \frac{\|T_2x\|_2}{\|x\|_1} < \|T_1\|_L + \|T_2\|_L + \varepsilon.$$

所以,

$$\|T_1+T_2\|_L=\inf_{r>0}\sup_{0<\|x\|_1\leqslant r}\frac{\|(T_1+T_2)(x)\|_2}{\|x\|_1}\leqslant\sup_{0<\|x\|_1\leqslant r_0}\frac{\|(T_1+T_2)(x)\|_2}{\|x\|_1}<\|T_1\|_L+\|T_2\|_L+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性,即得 $\|T_1+T_2\|_L\leqslant\|T_1\|_L+\|T_2\|_L$,(SN-2)得证.因此,$(\mathscr{B}_L(X,Y)_{\mathrm{Z}},\|\cdot\|_L)$ 是拟次范 Z-空间.

设 X_{Z} 中的每个非零元是非孤立的,且 $\|\cdot\|_1$ 具有整齐性.如果 $\|T\|_L=0$,则由(2)式知,对任意的 $r>0$,当 $0\leqslant\|x\|_1\leqslant r$ 时,有 $\|Tx\|_2\leqslant r\|x\|_1$.现考虑任一 $x\in X,x\neq\theta$,由 x 的非孤立性知,存在自然数子列 $\{n_i\}$ 使得 $\frac{1}{n_i}x\in X(i=1,2,\cdots)$.显然,可选取 n_{i_0} 满足 $\frac{n_{i_0}r}{\|x\|_1}>1$.注意到 $\|\cdot\|_1$ 是整齐性的,不难证明 $\|\frac{1}{n_{i_0}}x\|_1=\frac{1}{n_{i_0}}\|x\|_1$.所以,我们有

$$\left\|\left[\frac{n_{i_0}r}{\|x\|_1}\right]\cdot\frac{1}{n_{i_0}}x\right\|_1=\left[\frac{n_{i_0}r}{\|x\|_1}\right]\left\|\frac{1}{n_{i_0}}x\right\|_1\leqslant\frac{n_{i_0}r}{\|x\|_1}\cdot\frac{1}{n_{i_0}}\|x\|_1=r.$$

由此推得

$$\left\|T\left(\left[\frac{n_{i_0}r}{\|x\|_1}\right]\frac{1}{n_{i_0}}x\right)\right\|_2\leqslant r\left\|\left[\frac{n_{i_0}r}{\|x\|_1}\right]\frac{1}{n_{i_0}}x\right\|_1=r\left[\frac{n_{i_0}r}{\|x\|_1}\right]\frac{1}{n_{i_0}}\|x\|_1.\tag{4}$$

注意到 $\|\cdot\|_2$ 具有整齐性,

$$\left\|T\left(\left[\frac{n_{i_0}r}{\|x\|_1}\right]\frac{1}{n_{i_0}}x\right)\right\|_2=\left[\frac{n_{i_0}r}{\|x\|_1}\right]\left\|T\left(\frac{1}{n_{i_0}}x\right)\right\|_2.\tag{5}$$

由(4),(5)推得

$$\|Tx\|_2=\left\|T\left(n_{i_0}\cdot\frac{1}{n_{i_0}}x\right)\right\|_2=n_{i_0}\left\|T\left(\frac{1}{n_{i_0}}x\right)\right\|_2\leqslant r\|x\|_1.$$

由 $r>0$ 的任意性,即得 $\|Tx\|_2=0(\forall x\neq\theta)$,这表明 $T=\Theta$.因此 $(\mathscr{B}_L(X,Y)_{\mathrm{Z}},\|\cdot\|_L)$ 是次范 Z-空间.

定理3　由(3)式定义的 $\|\cdot\|_B$,即

$$\|T\|_B=\inf_{0<r\leqslant 1}\sup_{\|x\|_1\leqslant r}\frac{\|Tx\|_2}{r},\quad T\in\mathscr{B}_B(X,Y)_{\mathrm{Z}}$$

是 $\mathscr{B}_B(X,Y)_{\mathrm{Z}}$ 上的拟次范数,从而 $(\mathscr{B}_B(X,Y)_{\mathrm{Z}},\|\cdot\|_B)$ 是一个拟次范 Z-空间.如果 X_{Z} 中的每个非零元是非孤立的,且 $\|\cdot\|_1$ 具有整齐性,则 $(\mathscr{B}_B(X,Y)_{\mathrm{Z}},\|\cdot\|_B)$ 是次范 Z-空间.

证明　类似于定理2,不难证明 $(\mathscr{B}_B(X,Y)_{\mathrm{Z}},\|\cdot\|_B)$ 是一个拟次范 Z-空间.

现在假设 X_{Z} 中的每个非零元是非孤立的,且 $\|\cdot\|_1$ 具有整齐性.如果 $\|T\|_B=0$,则由(3)式知,对任意的 $0<r\leqslant 1$,当 $\|x\|\leqslant r$ 时,下述不等式总成立:

$$\|Tx\|_2<\frac{r}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

对任何 $x\in X,x\neq\theta$,因为 x 是非孤立元,所以存在自然数子列 $\{n_i\}$ 使 $\frac{1}{n_i}x\in X(i=1,2,\cdots)$.因为 $\|\cdot\|_1$ 是整齐性的,所以可取充分大的 n_{i_0} 使 $\left\|\frac{1}{n_{i_0}}x\right\|_1=\frac{\|x\|_1}{n_{i_0}}\leqslant r$.于是,我们有

$$\left\|T\left(\frac{1}{n_{i_0}}x\right)\right\|_2<\frac{r}{n_{i_0}}.$$

由此推得

$$\|Tx\|_2=\left\|T\left(n_{i_0}\cdot\frac{1}{n_{i_0}}x\right)\right\|_2=\left\|n_{i_0}T\left(\frac{1}{n_{i_0}}x\right)\right\|_2\leqslant n_{i_0}\left\|T\left(\frac{1}{n_{i_0}}x\right)\right\|_2\leqslant n_{i_0}\cdot\frac{r}{n_{i_0}}=r.$$

于是,由 x 和 r 的任意性,我们可以断定 T 是零算子,即 $T=\Theta$.因此 $(\mathscr{B}_B(X,Y)_{\mathrm{Z}},\|\cdot\|_B)$ 是次范 Z-空间.

3 可加奇性算子空间的完备性

为了讨论算子空间 $B(X,Y)_{\mathbf{Z}}$ 的完备性，我们需要引进下列概念：

定义 6[3] 设 $(X_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|)$ 是(拟)次范 $\mathbf{Z}$－空间. 如果 $x_0 \in X$ 满足：对任何 $n \in \mathbf{Z}^+$，$\|nx_0\| = n\|x_0\|$，则称 x_0 是 $(X_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|)$ 中的整齐性元.

显然，$\|\cdot\|$ 是整齐性的当且仅当 $(X_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|)$ 中每个元是整齐性元.

例 1 设 $S = \{x_i \| i \in \mathbf{Z}\}$，在 S 中定义加法如下：$x_i + x_j = x_{i+j}$，记 $\theta = x_0$. 则 $(S,+,\theta)$ 是一个 Abel 群. 再在 $S_{\mathbf{Z}}$ 上定义 $\|x_i\| = \|i\|$，$x_i \in S$. 则不难验证 $(S_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|)$ 是一个次范 $\mathbf{Z}$－空间，且 $\|\cdot\|$ 是整齐性的.

例 2 设 $(S,+,\theta)$ 如上例定义. 现定义 $\|\cdot\|_1: S_{\mathbf{Z}} \to [0,+\infty)$ 如下：

$$\|x_i\|_1 = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ \|i\| + 1, & i \neq 0, \end{cases} \quad x_i \in S,$$

则不难验证 $(S_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_1)$ 也是次范 $\mathbf{Z}$－空间. 但是，$(S_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_1)$ 中不含有任何非零整齐性元.

事实上，对任何 $i \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$，当 $n \in N\backslash\{1\}$ 时，我们有

$$\|nx_i\|_1 = \|x_{ni}\|_1 = |ni| + 1 = n|i| + 1 < n(|i| + 1) = n\|x_i\|_1.$$

例 3 设 $((X_1)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_1)$ 是一个次范 $\mathbf{Z}$－空间，$(X_1)_{\mathbf{Z}}$ 中每个元都是整齐性元. $((X_2)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_2)$ 也是一个次范 $\mathbf{Z}$－空间，$(X_2)_{\mathbf{Z}}$ 中不含有任何非零整齐性元. 记 $X = X_1 \times X_2$，对 $x = (x_1,x_2)$，$y = (y_1,y_2) \in X$，定义加法：$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$，以及 $-x = (-x_1,-x_2)$，$\mathscr{O} = (\theta,\theta)$. 则不难看出 $(X,+,\mathscr{O})$ 是一个 Abel 群. 再在 $X_{\mathbf{Z}} = (X,+,\mathscr{O})_{\mathbf{Z}}$ 上定义映射 $\|\cdot\|: X \to [0,+\infty)$ 如下：

$$\|x\| = \|(x_1,x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2, \quad x = (x_1,x_2) \in X,$$

则 $(X_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|)$ 是一个次范 $\mathbf{Z}$－空间，称它为 $((X_1)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_1)$ 与 $((X_2)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_2)$ 的乘积次范 $\mathbf{Z}$－空间.

对任何 $n \in \mathbf{N}$ 及 $(x_1,\theta) \in X = X_1 \times X_2$，$x_1 \neq \theta$，注意到 x_1 是 $(X_1)_{\mathbf{Z}}$ 中的整齐性元，我们有

$$\|n(x_1,\theta)\| = \|(nx_1,\theta)\| = \|nx_1\|_1 + \|\theta\|_2 = n\|x_1\|_1 + n\|\theta\|_2 = n(\|x_1\|_1 + \|\theta\|_2) = n\|(x_1,\theta)\|.$$

因此，$X_{\mathbf{Z}}$ 中形如 (x_1,θ) 的元(其中 $x_1 \in X_1\backslash\{\theta\}$)都是非零整齐性元.

对任何 $(\theta,y_2) \in X = X_1 \times X_2$，$y_2 \neq \theta$，因为 y_2 不是 $(X_2)_{\mathbf{Z}}$ 的整齐性元，所以存在某个 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $\|ny_2\|_2 \neq n\|y_2\|_2$，从而

$$\|n(\theta,y_2)\| = \|(\theta,ny_2)\| = \|\theta\|_1 + \|ny_2\|_2 \neq \|\theta\|_1 + n\|y_2\|_2 = n(\|\theta\|_1 + \|y_2\|_2) = n\|(\theta,y_2)\|.$$

因此，$X_{\mathbf{Z}}$ 中形如 (θ,y_2) 的元(其中 $y_2 \in X_2\backslash\{\theta\}$)都不是整齐性元.

上述例子表明，存在这样的次范 $\mathbf{Z}$－空间 $(X_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|)$，它的元素中既有非零整齐性元，又有非整齐性元.

定义 7 设 $(X_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|)$ 是(拟)次范 $\mathbf{Z}$－空间. $x_0 \in X$ 称为 $X_{\mathbf{Z}}$ 的有理元，如果对任何 $n \in \mathbf{Z}^+$，$(1/n)x_0 \in X$.

显然"有理元"必是"非孤立元". x_0 是 $X_{\mathbf{Z}}$ 的有理元当且仅当对任何有理数 q，$qx_0 \in X$.

定理 4 设 $(X_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_1)$ 和 $(Y_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_2)$ 是两个次范 $\mathbf{Z}$－空间. 如果 $(Y_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_2)$ 是完备的，则算子次范 $\mathbf{Z}$－空间 $(\mathscr{B}(X,Y)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|)$ 也是完备的.

证明 类似于赋范空间上有界线性算子空间的情形，因此被省略.

定理 5 设 $(X_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_1)$ 和 $(Y_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_2)$ 是两个次范 $\mathbf{Z}$－空间. 如果 $X_{\mathbf{Z}}$ 中的每个非零元是非孤立的，$\|\cdot\|_1$ 具有整齐性，且 $(Y_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_2)$ 是完备的，则算子次范 $\mathbf{Z}$－空间 $(\mathscr{B}_L(X,Y)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_L)$ 也是完备的.

证明 设 $\{T_n\}$ 是 $(\mathscr{B}_L(X,Y)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_L)$ 中的任一 Cauchy 列，则对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 \in \mathbf{N}$，当 m，$n \geqslant n_0$ 时，有 $\|T_n - T_m\|_L < \varepsilon$. 从而由算子次范数的定义(2)知，存在 $r_0 > 0$，使得当 $m,n \geqslant n_0$ 和 $0 < \|x\|_1 \leqslant r_0$ 时，

$$\|T_nx - T_mx\|_2 = \|(T_n - T_m)x\|_2 \leqslant \varepsilon\|x\|_1. \tag{6}$$

对每个 $x \in X\backslash\{\theta\}$,因为 $\|\cdot\|_1$ 具有整齐性且 x 是非孤立的,所以存在充分大的自然数 k_0 使得 $(1/k_0)x \in X$ 且 $\|(1/k_0)x\|_1 = \|x\|_1/k_0 \leqslant r_0$,从而有

$$\left\|T_n\left(\frac{1}{k_0}x\right)-T_m\left(\frac{1}{k_0}x\right)\right\|_2 \leqslant \varepsilon\left\|\frac{1}{k_0}x\right\|_1 = \frac{\varepsilon}{k_0}\|x\|_1.$$

从而当 $m,n \geqslant n_0$ 时有

$$\|T_nx - T_mx\|_2 = \left\|k_0\left(T_n\left(\frac{1}{k_0}x\right)-T_m\left(\frac{1}{k_0}x\right)\right)\right\|_2 \leqslant$$

$$k_0\left\|T_n\left(\frac{1}{k_0}x\right)-T_m\left(\frac{1}{k_0}x\right)\right\|_2 \leqslant \varepsilon\|x\|_1.$$

这表明$\{T_nx\}$是 Y 中的 Cauchy 列. 又因$(Y_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_2)$是完备的,所以可定义 $Tx = \lim\limits_{n\to\infty}T_nx$,$x \in X$. 容易验证 T 是 X 到 Y 的可加奇性算子. 在(6)式中令 $m\to\infty$,推得

$$\|T_n - T\|_L \leqslant \sup_{0<\|x\|_1<r_0}\frac{\|(T_n - T)x\|_2}{\|x\|_1} \leqslant \varepsilon(\text{当 } n \geqslant n_0 \text{ 时}),$$

于是,由引理1知 $T-T_{n_0} \in \mathscr{B}_L(X,Y)$,从而 $T = T_{n_0} + (T-T_{n_0}) \in \mathscr{B}_L(X,Y)$,且$\{T_n\}$依算子次范数 $\|\cdot\|_L$ 收敛于 T. 因此$(\mathscr{B}_L(X,Y)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_L)$是完备的.

定理6　设$(X_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_1)$和$(Y_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_2)$是两个次范 $\mathbf{Z}$－空间. 如果 $X_{\mathbf{Z}}$ 中的每个元都是有理元,$\|\cdot\|_1$ 具有整齐性,且$(Y_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_2)$是完备的,则算子次范 $\mathbf{Z}$－空间$(\mathscr{B}_B(X,Y)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_B)$也是完备的.

证明　设$\{T_n\}$是$(\mathscr{B}_B(X,Y)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_B)$中的任一 Cauchy 列,则对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $n_0 \in \mathbf{N}$,当 $m,n \geqslant n_0$ 时,有 $\|T_n - T_m\|_B < \varepsilon$. 从而由算子次范数的定义(3)知,存在 $0 < r_0 \leqslant 1$,使得当 $m,n \geqslant n_0$ 和 $\|x\|_1 \leqslant r_0$ 时,

$$\|T_nx - T_mx\|_2 = \|(T_n - T_m)x\|_2 < r_0\varepsilon \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

对每个 $x \in X$ 且 $\|x\|_1 > r_0$,因为 $\|\cdot\|_1$ 具有整齐性且 x 是有理元,所以存在充分大的自然数 k 满足:$(1/k)x \in X$,$\|(1/n_k)x\|_1 = \|x\|_1/n_k$. 选取充分大的 k_0 使得 $\|x\|_1/k_0 = \|(1/k_0)x\|_1 \leqslant r_0$ 且 $\|x\|_1/(k_0-1) > r_0$,则由(7)得

$$\left\|T_n\left(\frac{1}{k_0}x\right)-T_m\left(\frac{1}{k_0}x\right)\right\|_2 \leqslant r_0\varepsilon(\text{当 } m,n \geqslant n_0 \text{ 时}).$$

从而推得

$$\|T_nx - T_mx\|_2 = \left\|k_0\left(T_n\left(\frac{1}{k_0}x\right)-T_m\left(\frac{1}{k_0}x\right)\right)\right\|_2 \leqslant$$

$$k_0\left\|T_n\left(\frac{1}{k_0}x\right)-T_m\left(\frac{1}{k_0}x\right)\right\|_2 \leqslant k_0r_0\varepsilon = (k_0-1)r_0\varepsilon + r_0\varepsilon \leqslant (\|x\|_1 + 1)\varepsilon(\text{当 } m,n \geqslant n_0). \tag{8}$$

由(7)和(8)知,对任何 $x \in X$,$\{T_nx\}$是 Y 中的 Cauchy 列. 又因$(Y_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_2)$是完备的,所以可定义 $Tx = \lim\limits_{n\to\infty}T_nx$,$x \in X$. 容易验证 T 是 X 到 Y 的可加奇性算子. 在(7)式中令 $m\to\infty$,推得

$$\|T_n - T\|_B \leqslant \sup_{\|x\|_1<r_0}\frac{\|(T_n - T)x\|_2}{r_0} \leqslant \varepsilon(\text{当 } n \geqslant n_0 \text{ 时}),$$

于是,由引理1知 $T - T_{n_0} \in \mathscr{B}_B(X,Y)$,从而 $T = T_{n_0} + (T - T_{n_0}) \in \mathscr{B}_B(X,Y)$,且$\{T_n\}$依算子次范数 $\|\cdot\|_B$ 收敛于 T. 因此$(\mathscr{B}_B(X,Y)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_B)$是完备的.

定理7　设$(X_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|_1)$和$(Y,\|\cdot\|_2)$是两个次范 $\mathbf{Z}$－空间,且 $X_{\mathbf{Z}}$ 中存在非零整齐性元. 如果算子次范 $\mathbf{Z}$－空间$(\mathscr{B}(X,Y)_{\mathbf{Z}},\|\cdot\|)$是完备的,则$(Y,\|\cdot\|_2)$是 Banach 空间.

证明　不妨设 x_0 是 $X_{\mathbf{Z}}$ 的非零整齐性元,则由次范 $\mathbf{Z}$－空间上 Hahn-Banach 定理的推论(即文[6]的推论1)知,存在 $X_{\mathbf{Z}}$ 上的有界可加奇性泛函 f,使 $f(x_0) = \|x_0\|_1$ 且 $\|f\| = 1$.

设$\{y_n\}$是$(Y,\|\cdot\|_2)$中任一 Cauchy 列,定义算子 $T_n: X_{\mathbf{Z}} \to Y$ 如下:

$$T_nx = f(x)y_n,\quad x \in X, n \in \mathbf{N}.$$

注意到$(Y,\|\cdot\|_2)$是赋范空间,故上式定义是有意义的. 由 f 的可加奇性易知,T_n 是可加奇性算子. 下证 T_n 是有界的. 因为

$$\|T_nx\|_2 = \|f(x)y_n\|_2 = |f(x)|\,\|y_n\|_2 \leqslant \|f\|\,\|x\|_1\|y_n\|_2 = \|y_n\|_2\|x\|_1,\quad x \in X,$$

所以 T_n 有界，且 $\| T_n \| \leqslant \| y_n \|_2 < +\infty$. 同理可推得

$$\| T_n - T_m \| \leqslant \| y_n - y_m \|_2.$$

注意到 $\{ y_n \}$ 是赋范空间 $(Y, \| \cdot \|_2)$ 中的 Cauchy 列，所以 $\{ T_n \}$ 是算子空间 $(\mathscr{B}(X, Y)_{\mathrm{Z}}, \| \cdot \|)$ 中的 Cauchy 列，再由 $(\mathscr{B}(X, Y)_{\mathrm{Z}}, \| \cdot \|)$ 的完备性可知，存在 $T \in \mathscr{B}(X, Y)_{\mathrm{Z}}$ 使得 $\| T_n - T \| \to 0 (n \to \infty)$. 令 $y = \dfrac{Tx_0}{\| x_0 \|_1} \in Y$，我们有

$$\| y_n - y \|_2 = \left\| \frac{T_n x_0}{\| x_0 \|_1} - \frac{T x_0}{\| x_0 \|_1} \right\|_2 = \frac{1}{\| x_0 \|_1} \| (T_n - T) x_0 \|_2 \leqslant \| T_n - T \| \to 0 (n \to \infty),$$

所以 $(Y, \| \cdot \|_2)$ 是 Banach 空间.

推论 1

设 $(X, \| \cdot \|_1)$，$(Y, \| \cdot \|_2)$ 是赋范空间，则 $\mathscr{B}(X, Y)$ 是 Banach 空间当且仅当 Y 是 Banach 空间.

[参考文献]

[1] Wang G J, Wang W. Generalization of the scheerffer's theorem [J]. Indian J Math, 1999, 41(3): 407-414.

[2] Wang G J, Bai Y C. Linear structure on translation spaces [J]. Acta Mathematica Sinica: Chinese Series, 2005, 48(1): 1-10.

[3] Li H, Fang J X. Hahn-Banach theorem on Abel group [J]. Acta Mathematica Sinica: Chinese Series, 2008, 51(5): 965-970.

[4] Li H, Fang J X. Additive odd operators on sub-normed integral-linear spaces [J]. Acta Mathematica Sinica: Chinese Series, 2010, 53(4): 773-784.

[责任编辑：丁　蓉]