和集与给定序列相交问题

吴建东,杨全会

(南京师范大学数学科学学院、数学研究所,江苏 南京 210046)

[摘要] 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无界的正整数序列,满足当 $n\to\infty$ 时 $a_{n+1}/a_n\to\alpha$. 设 $\beta>\max\{\alpha,2\}$. 则存在 x_0,对所有 $x>x_0$,若 A,B 是 $[0,x]$ 的子集且满足 $0\in A\cap B$,$|A|+|B|\geqslant 2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)x$,则和集 $A+B$ 包含序列 $\{a_n\}$ 的元素. 本文是 Kapoor V 结果的一般化.

[关键词] 和集,序列
[中图分类号] O156.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)02-0022-02

Sumsets Intersecting a Sequence

Wu Jiandong,Yang Quanhui

(School of Mathematical Sciences and Institute of Mathematics,Nanjing Normal University,Nanjing 210046,China)

Abstract: Let $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be an unbounded sequence of positive integers with $a_{n+1}/a_n\to\alpha$ as $n\to\infty$, and let $\beta>\max\{\alpha,2\}$. Then there exists an x_0 such that for all $x>x_0$ and if $A,B\subseteq[0,x]$ are sets of nonnegative integers with $0\in A\cap B$ and

$$|A|+|B|\geqslant 2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)x,$$

then the sumset $A+B$ contains an element of the sequence $\{a_n\}$. This generalizes a recent result by Kapoor V.

Key words: sumsets,sequences

1 引言及主要结果

设 A,B 是整数集合,其和集与差集分别定义为 $A+B=\{a+b: a\in A,b\in B\}$,$A-B=\{a-b: a\in A,b\in B\}$. 对任意整数 t,定义集合 $t+A=\{t\}+A$,$t-A=\{t\}-A$ 以及 $2A=A+A$.

在[1]中,Erdös 和 Freud 猜想:若整数集合 $A\subseteq[1,n]$,$|A|>n/3$,则 2 的方幂可以表示为集合 A 中不同元素的和. 对充分大的 n,Erdös 和 Freiman[2] 证明猜想成立,后来 Nathanson 和 Sárközy[3] 将 n 的界作了改进.

另一方面,Lev[4] 证明了:若整数集合 $A\subseteq[0,n]$ 满足 $|A|\geqslant n/2+1$,则或者 A 包含 2 的方幂,或者 A 中存在两个不同元素其和是 2 的方幂. 最近,潘灏[5] 证明了:若 $m\geqslant 3$,$A\in[0,n]$,$0\in A$,$|A|\geqslant(1-1/m)n+1$,则 $2A$ 包含 m 的方幂. 其他整数子集和的相关研究结果,读者可以参考文献[6-8].

在[9]中 Kapoor 研究由不小于 2 的实数的方幂生成的序列,证明了:对无界正整数序列 $\{a_n\}$ 满足当 $n\to\infty$ 时 $a_{n+1}/a_n\to\alpha$,实数 $\beta>\max\{\alpha,2\}$,对所有充分大的 x,若非负整数集合 $A\subseteq[0,x]$ 满足 $0\in A$ 和 $|A|\geqslant(1-1/\beta)x$,则 $2A$ 包含序列 $\{a_n\}$ 的元素.

本文利用证明关于 2 的方幂的 Lev 引理[4] 的方法,将 Kapoor 的结果一般化如下:

定理 1 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是无界的正整数序列,满足当 $n\to\infty$ 时 $a_{n+1}/a_n\to\alpha$. 设 $\beta>\max\{\alpha,2\}$. 则存

收稿日期:2012-01-08.
基金项目:国家自然科学基金(11071121)、江苏省研究生科研创新计划项目(CXLX11-0862).
通讯联系人:吴建东,博士,讲师,研究方向:数论. E-mail:wjd.njnu@163.com

在 x_0 满足对所有 $x > x_0$,若 A,B 是 $[0,x]$ 的子集且满足 $0 \in A \cap B$,$|A| + |B| \geqslant 2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)x$,则和集 $A + B$ 包含序列 $\{a_n\}$ 的元素.

定理 1 可以从下面更一般的结果得出:

定理 2 设无界正整数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $a_{n+1}/a_n \leqslant \beta$,$\beta$ 是大于等于 2 的常数. 则对所有 $x \geqslant 0$,若非负整数集合 $A,B \subseteq [0,x]$ 满足 $0 \in A \cap B$,

$$|A| + |B| > 2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{2}{\beta} \cdot \left[\frac{a_1}{2}\right] + 2,$$

则和集 $A + B$ 中包含序列 $\{a_n\}$ 中的元素.

注 令 $a_1 = 2k$,$A = [0,k]$,$B = [0,k-1]$,$\left[\frac{a_1 - 1}{2}\right] \leqslant x < a_1$. 则 $|A| + |B| = 2k + 1 = a_1 + 1$. 若将参考文献 [1] 中 $\left[\frac{a_1 - 1}{2}\right]$ 代替定理 2 中 $\left[\frac{a_1}{2}\right]$,则 $|A| + |B| > 2\left[\frac{a_1 - 1}{2}\right] + 2 = 2\left[\frac{a_1 + 1}{2}\right]$. 但显然 a_1 不在集合 $A + B = [0,2k-1]$ 中. 因此,定理 2 中条件 $\left[\frac{a_1}{2}\right]$ 是最优的.

2 定理 2 的证明

首先假设 $0 \leqslant x < a_1$,集合 $A,B \subseteq [0,x]$ 满足定理条件. 令 $x_0 = [a_1/2]$.

若 $x < x_0$,则 $|A| + |B| > 2(1 - 1/\beta)x + 2x_0/\beta + 2 > 2x + 2$.

因为 $A,B \subseteq [0,x]$,这显然不可能. 所以 $x_0 \leqslant x < a_1$,我们得到

$$|A| + |B| > 2(1 - 1/\beta)x + 2x_0/\beta + 2 \geqslant 2x_0 + 2 = 2[a_1/2] + 2 \geqslant a_1 + 1,$$

则 $(a_1 - A) \cap B \neq \varnothing$,可推得 $a_1 \in A + B$. 定理在 $0 \leqslant x < a_1$ 时成立.

下面对 $[x]$ 用数学归纳法证明定理成立. 不失一般性,假设 x 是正整数,$x \geqslant a_1$. 由于序列 $\{a_n\}$ 无界,可以选择最小的 r,使 $x < a_{r+1}$. 则 $x \geqslant a_r$. 我们得到 $a_r \leqslant x < a_{r+1}$. 令集合 A,B 满足定理条件. 下面分两种情况:

情形 1 $x \leqslant a_{r+1}/2$. 令 $A_1 = A \cap [0,a_r]$,$A_2 = A \cap (a_r,x]$,$B_1 = B \cap [0,a_r]$,$B_2 = B \cap (a_r,x]$. 则 $|A_2| \leqslant x - a_r$,$|B_2| \leqslant x - a_r$. 若 $(a_r - A_1) \cap B_1 = \varnothing$,则 $|A_1| + |B_1| \leqslant a_r + 1$. 我们得到

$$|A| + |B| = |A_1| + |A_2| + |B_1| + |B_2| \leqslant 2x - a_r + 1 = 2x\left(1 - \frac{a_r}{2x}\right) + 1 \leqslant 2x\left(1 - \frac{a_r}{a_{r+1}}\right) + 1.$$

因为 $\beta \geqslant a_{n+1}/a_n$,这与

$$|A| + |B| > 2x\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + 2 \geqslant 2x\left(1 - \frac{a_r}{a_{r+1}}\right) + 2$$

矛盾. 所以 $(a_r - A_1) \cap B_1 \neq \varnothing$. 即 $a_r \in A + B$.

情形 2 $a_{r+1}/2 < x < a_{r+1}$. 令 $A_1 = A \cap [0,a_{r+1} - x)$,$A_2 = A \cap [a_{r+1} - x,x]$,$B_1 = B \cap [0,a_{r+1} - x)$,$B_2 = B \cap [a_{r+1} - x,x]$. 则 $a_{r+1} - A_2 \subseteq [a_{r+1} - x,x]$ 并且与 B_2 互不相交;否则,$a_{r+1} \in A + B$. 因此 $|A_2| + |B_2| \leqslant 2x - a_{r+1} + 1$.

令 $\Delta = 2/\beta \cdot [a_1/2] + 2$. 因 $a_{r+1} - x < x$,由归纳假设,若 $|A_1| + |B_1| > 2(1 - 1/\beta)(a_{r+1} - x - 1) + \Delta$,则 $A + B$ 包含序列 $\{a_n\}$ 的元素. 因此 $|A_1| + |B_1| \leqslant 2(1 - 1/\beta)(a_{r+1} - x - 1) + \Delta$,且由 $\beta \geqslant 2$,

$$|A| + |B| = |A_1| + |A_2| + |B_1| + |B_2| \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)(a_{r+1} - x - 1) + \Delta + (2x - a_{r+1} + 1) \leqslant$$

$$2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)(a_{r+1} - x - 1) + \Delta + 2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)(2x - a_{r+1} + 1) = 2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)x + \Delta.$$

这与 $|A| + |B| > 2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)x + \Delta$ 矛盾. 因此,$A + B$ 包含序列 $\{a_n\}$ 的元素.

定理 2 得证.

类似于 [1],我们可以由定理 2 证明定理 1. (下转第 28 页)

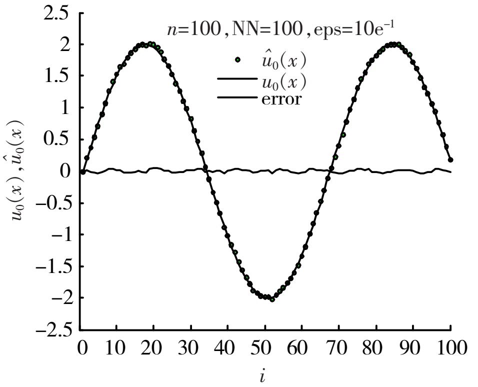

图1 $\hat{u}_0(x)$与$u_0(x)$

Fig.1 $\hat{u}_0(x)$ and $u_0(x)$

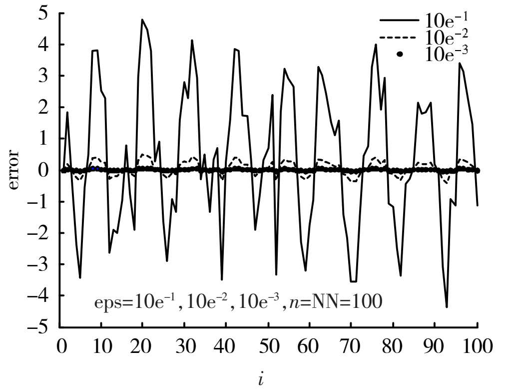

图2 初值的误差

Fig.2 Initial value error

[参考文献]

[1] Gazenave T, Weissler F B. The Cauchy problem for critical nonlinear Schrödinger equation in H^s [J]. Nonlinear Analysis, TMA, 1990, 14: 807-836.

[2] Wang Baoxiang. On the initial-boundary value problems for nonlinear Schrödinger equations [J]. Advances in Mathematics, 2000, 29(5): 421-424.

[3] Navon I M. Practical and theoretical aspects of adjoint parameter estimation and identifiablity in meteorology and oceanography [J]. Dyn Atmos Oceans, 1997, 27: 55-79.

[4] 张瑰. 一维扩散方程整体观测资料下的初值变分同化反演 [J]. 海洋预报, 2006, 23(21): 34-41.

[5] 张瑰, 黄思训. 一类on-off问题的变分同化方法的误差估计 [J]. 工程数学学报, 2009, 26(1): 37-42.

[6] Teng Jiajun, Zhang Gui. Huang Sixun. Some theoretical problems on variational data assimilation [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(5): 651-663.

[7] 方涵先, 黄思训. 二维下投式探空仪反演的理论分析与数值试验 [J]. 自然科学进展, 2004, 14(11): 1257-1264.

[8] Zhang Gui, Li Zhenxing, Zhu Shouxian. The error estimates of predicted value of variational assimilation method for a class of Schrödinger equations [C]. Manchester: The Second International Conference on Information and Computing Science, 2009: 304-307.

[9] Huang Sixun, Du Huadong, Han Wei. Generalized variational data assimilation method and numerical experiment for non-differential system [J]. Appl Math Mech, 2004, 25(10): 1160-1165.

[10] 张瑰, 张梅. 人口模型变分同化方法的理论分析 [J]. 大学数学, 2004, 20(5): 30-33.

[责任编辑: 丁 蓉]

(上接第23页)

[参考文献]

[1] Erdös P. Some problems and results on combinatorial number theory [J]. Ann New York Acad Sci, 1989(576): 132-145.

[2] Erdös P, Freiman G. On two additive problems [J]. J Number Theory, 1990(34): 1-12.

[3] Nathanson M B, Sárközy A. Sumsets containing long arithmetic progressions and powers of 2 [J]. Acta Arith, 1989(54): 147-154.

[4] Lev V F. Representing powers of 2 by a sum of four integers [J]. Combinatorica, 1996(16): 413-416.

[5] Pan Hao. Note on integer powers in sumsets [J]. J Number Theory, 2006(117): 216-221.

[6] Abe T. Sumsets containing powers of an integer [J]. Combinatorica, 2004(24): 1-4.

[7] Alon N. Subset sums [J]. J Number Theory, 1987(27): 196-205.

[8] Nathanson M B. Additive Number Theory: Inverse Problems and the Geometry of Sumsets. Volume 165 of Graduate Texts in Mathematics [M]. New York: Springer-Verlag, 1996.

[9] Kapoor V. Sets whose sumsets avoids a thin sequence [J]. J Number Theory, 2010(130): 534-538.

[责任编辑: 丁 蓉]