第35卷第2期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 35 No. 2
2012年6月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) June,2012

渐近正线性 Duffing 方程的非平凡解

王卫勤[1,2]

(1. 泰州师范高等专科学校数理信息学院,江苏 泰州 225300)
(2. 南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210046)

[摘要] 主要研究渐近正线性 Duffing 方程

$$x''+f(t,x)=0,$$
$$x(0)\cos\alpha-x'(0)\sin\alpha=0,$$
$$x(1)\cos\beta-x'(1)\sin\beta=0$$

非平凡解的存在性. 首先介绍了满足 Sturm-Liouville 边值条件正齐次 Duffing 方程

$$x''+q^{+}(t)x^{+}-q^{-}(t)x^{-}=0,$$
$$x(0)\cos\alpha-p(0)x'(0)\sin\alpha=0,$$
$$x(1)\cos\beta-p(1)x'(1)\sin\beta=0$$

的分类理论,在此基础上讨论了渐近正线性 Duffing 方程非平凡解的存在性. 在讨论时主要运用了相应的正齐次方程的分类理论及其相关的拓扑度方面的结果.

[关键词] 渐近正线性 Duffing 方程,非平凡解的存在性,正线性 Duffing 方程的分类理论,Fučk 谱,同伦连续方法

[中图分类号] O175 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)02-0029-03

Nontrivial Solutions for Asymptotically Positive Linear Duffing Equations

Wang Weiqin[1,2]

(1. Dept of Math, Taizhou Teachers College, Taizhou, 225300, China)
(2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract: In this paper we mainly study the nontrivial solutions for asymptotically positive linear Duffing equations:

$$x''+f(t,x)=0,$$
$$x(0)\cos\alpha-x'(0)\sin\alpha=0,$$
$$x(1)\cos\beta-x'(1)\sin\beta=0.$$

We first introduce the classification theory of homogenous Sturm - Liouville boundary value problem for positively linear Duffing equations:

$$(p(t)x'(t))'+q^{+}(t)x^{+}-q^{-}(t)x^{-}=0,$$
$$x(0)\cos\alpha-p(0)x'(0)\sin\alpha=0,$$
$$x(1)\cos\beta-p(1)x'(1)\sin\beta=0$$

and then investigate the existence of nontrivial solutions of asymptotically positive linear Duffing equations. The main methods in the discussion are the classification theory of linear homogenous equations and some results of the Leray-Schauder degree.

Key words: asymptotically positive linear Duffing equations, existence of nontrivial solutions, classification theory of positively linear Duffing equations, Fučk spectrum, homotopy continutation method

收稿日期: 2011-06-23.
基金项目: 泰州师范高等专科学校校级青年专项重点课题(2010-BSL-05).
通讯联系人: 王卫勤,硕士,讲师,研究方向: 微分方程、几何等. E-mail: jswwqin@163.com

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1 引言和主要结论

本文我们主要研究

$$x'' + f(t,x) = 0, \tag{1}$$
$$x(0)\cos\alpha - x'(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$
$$x(1)\cos\beta - x'(0)\sin\beta = 0 \tag{3}$$

系统的非平凡解,其中 $f: [0,1] \times R \to R$ 连续,$\alpha \in [0,\pi)$ 且 $\beta \in (0,\pi]$. 我们有下面的结论:

定理 1 设 $f: [0,1] \times R \to R$ 连续,存在两个正整数 k 和 m,使得 $(k-m)$ 是奇数且

(1) $a_\infty^+(t) \leqslant \frac{f(t,x)}{x} \leqslant b_\infty^+(t)$ 对于 $a.e.\ t \in (0,1)$, $x \geqslant r > 0$,

$a_\infty^-(t) \leqslant \frac{f(t,x)}{x} \leqslant b_\infty^-(t)$ 对于 $a.e.\ t \in (0,1)$, $x < -r$,

这里 r 是足够大的正数且 $a_\infty^\pm(t), b_\infty^\pm(t) \in F_k(\alpha,\beta)$.

(2) $a_0^+(t) \leqslant \frac{f(t,x)}{x} \leqslant b_0^+(t)$ 对于 $a.e.\ t \in (0,1)$, $0 < x < r_1$,

$a_0^-(t) \leqslant \frac{f(t,x)}{x} \leqslant b_0^-(t)$ 对于 $a.e.\ t \in (0,1)$, $-r_1 < x < 0$,

这里 r 是足够小的正数且 $a_0^\pm(t), b_0^\pm(t) \in F_m(\alpha,\beta)$. 那么(1) ~ (3) 有一个非平凡解.

这里我们引用了文 [1] 中的记号. 在文 [1] 中作者讨论了系统:

$$\begin{aligned} &x'' + q^+(t)x^+ - q^-(t)x^- = 0, t \in (0,1), \\ &x(0)\cos\alpha - x'(0)\sin\alpha = 0, \\ &x(1)\cos\beta - x'(0)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

的分类理论,其中 $x^+ = \max\{x,0\}$ 且 $x^- = \max\{-x,0\}$, $t \in (0,1)$. 用 $F_k(\alpha,\beta)$ 定义 $L^1(0,1)^2$ 中的一些子集. 这些子集有助于我们研究(1) ~ (3) 非平凡解的存在性. 关于线性凸的哈密顿系统及其辛矩阵道路的分类理论可参看文 [2,3].

下一节我们将解释这些子集. 定理 1 的一些特殊情况已被讨论过了(参看 [1,4,5]),但大多数只讨论解的存在性. 我们主要讨论还没有被充分研究过的非平凡解的存在性问题,并且使用 Leray-Schauder 度理论给出证明. 关于变分方法在微分方程解的存在性及其多重性方面的应用可参看 [2,3,6-8].

2 广义 *Fučk* 谱

我们先回顾 [1] 中的一些定义. 设 $x(t)$ 是(4) 的一个非平凡解,定义 $x(t) = \rho(t)\sin\varphi(t)$, $x'(t) = \rho(t)\cos\varphi(t)$,我们得到

$$\varphi' = \cos^2\varphi + q^+(t)\sin^2\varphi^+ + q^-(t)\sin^2\varphi^-, \tag{5}$$

这里若 $\varphi - 2m\pi \in (0,\pi)$,则 $\varphi = \varphi^+$; 若 $\varphi - 2m\pi \in (\pi,2\pi)$,则 $\varphi = \varphi^-$. 记(5) 满足初始条件 $\varphi(0) = \theta$ 的惟一解为 $\varphi(t,q^\pm,\theta)$,这个函数有很多有用的价值,下面列举一些本文需要的结论.

定义 1 (参看 [1,定义 2]) 定义

$q^\pm \in F_0(\alpha,\beta)$ 当且仅当 $\varphi(1,q^\pm,\alpha) < \beta$ 且 $\varphi(1,q^\pm,\pi+\alpha) - \pi < \beta$;

$q^\pm \in F_k(\alpha,\beta)$ $(k \in \mathbf{N})$ 当且仅当 $\varphi(1,q^\pm,\alpha) \in (k\pi+\beta,(k+1)\pi+\beta)$.

例 1 假设对于常数 μ 和 γ,系统

$$x'' + \mu x^+ - \gamma x^- = 0, \tag{6}$$
$$x(0) = 0 = x(1), \tag{7}$$

有一个非平凡解.

我们首先获得满足 μ 和 γ 的公式. 设 $x(t)$ 是 $x'(0) > 0$ 和 $x''(t) + \mu x(t) = 0$ 的一个非平凡解,其中 t 是充分小的正数. 如果 $(\mu,\gamma) \in H_0^\pm(0,\pi)$,得到 $0 = x(1) = \sin\sqrt{\mu}$ 或 $0 < x(1) = \sin\sqrt{\mu}$,类似的我们得到 $\sin\sqrt{\mu} = 0$. 如果存在 $t_1 \in (0,1)$ 使得 $x(t_1) = 0$,则 $x(t) > 0, t \in (0,t_1)$; $x(t) = c\sin\sqrt{\gamma}(1-t)$, $t \to t_1^+$. 如果 $(\mu,\gamma) \in H_1^\pm(0,\pi)$,我们有 $0 = x(1) = c\sin\sqrt{\gamma}(1-t_1)$. 因而存在 $t_1 \in (0,1)$, $\sqrt{\mu}t_1 = \pi\sqrt{\gamma}(1-t_1) = \pi$. 于是有

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}=\frac{1}{\pi}.$$

下面给出定理 1 的证明.

3 定理 1 的证明

我们只介绍证明定理 1 的方法,详细的证明参看[9].

引理 1 对任何 $q^{\pm}\in F_k(\alpha,\beta)$,有 $\deg(id+G_{q^{\pm}},\Omega_r,\theta)=(-1)^k$,其中 $\Omega_r=\{x\in C[0,1]\mid \|x\|_C\leqslant r,r>0\}$,$Tx=x''-\lambda_0 x$,对很大的数 $\lambda_0>0$,使得对于任何 $\lambda\geqslant\lambda_0$,下面的系统

$$x''-\lambda x=0,t\in(0,1), \tag{8}$$

$$x(0)\cos\alpha-x'(0)\sin\alpha=0, \tag{2}$$

$$x(1)\cos\beta-x'(0)\sin\beta=0 \tag{3}$$

没有非平凡解.

证明 设 $(q^+,q^-)=\deg(id+G_{q^{\pm}},\Omega,\theta)$,

第一步,存在一个常数 q_0,$(q_0,q_0)\in F_k(\alpha,\beta)$ 使得

$$\xi(q^+,q^-)=\xi(q_0,q_0).$$

若用 (q_0,q_0) 替换 (q^+,q^-),对任意 $x\in\Omega_r$ 有 $G_{q_0}:=G(q_0,q_0):x(t)\mapsto x''(t)+q_0x(t)$.

第二步,得到 $\deg(id+G_{q_0},\Omega_r,\theta)=(-1)^k$.

下面我们运用 Leray-Schaude 度理论[7,10]给出定理 1 的证明.

定理 1 的证明 考虑系统

$$x''+(1-\lambda)(a^+(t)x^+-a^-(t)x^-)+\lambda f(t,x)=0, \tag{9}$$

$$x(0)\cos\alpha-x'(0)\sin\alpha=0, \tag{2}$$

$$x(1)\cos\beta-x'(0)\sin\beta=0, \tag{3}$$

这个系统与算子方程: $x''+(1-\lambda)K(x)+\lambda N(x)=0$ 以及(2)、(3)等价. 这里 $(Kx)(t)=G_{a^{\pm}}(x)(t)$,$(Nx)(t)=T^{-1}(\lambda_0 x(t)+f(t,x(t)))$. 我们首先证明(8)、(2)、(3)的所有可能解在 Banach 空间 $C_0^1(0,1)$ 是有先验界.

再由引理 1 得到当 $a_\infty^{\pm}\in F_k(\alpha,\beta)$ 时有

$$\deg(id+N,\Omega_r,\theta)=\deg(id+K,\Omega,\theta)=(-1)^k. \tag{10}$$

同上我们得到当 $a_0^{\pm}\in F_m(\alpha,\beta)$,$r_1\in(0,r)$ 时有

$$\deg(id+N,\Omega_{r_1},\theta)=\deg(id+G_{a_0^{\pm}},\Omega_{r_1},\theta)=(-1)^m. \tag{11}$$

结合(10)、(11)得到

$$\deg(id+N,\Omega_r\setminus\Omega_{r_1},0)=\deg(id+N,\Omega_r,0)-\deg(id+N,\Omega_{r_1},0)=(-1)^k-(-1)^m\neq 0.$$

因此,(1)~(3)有一个非平凡解. 定理 1 证毕.

参考文献

[1] Dong Y. On the solvability of asymptotically positively homogeneous equations with Sturm-Liouville boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis, 2000(42): 1 351-1 363.

[2] Ekeland I. Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics[M]. Berlin: Springer, 1990.

[3] Long Y. Index Theory for Symplectic Paths With Applications[M]. Birkhauser: Basel, 2002.

[4] Fučk S. Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems[M]. Boston: D Reidel, 1980.

[5] Lazer A C, Leach D E. On a nonlinear two point BVP[J]. J Math Anal Appl, 1969, 26: 20-27.

[6] 张恭庆. 临界点理论及其应用[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1986.

[7] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.

[8] Mawhin J, Willem M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems[M]. Berlin: Springer, 1989.

[9] 王卫勤. 渐近正线性 Duffing 的非平凡解[D]. 南京: 南京师范大学数学科学学院, 2008.

[10] Mawhin J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems[C] // CBMS Regional Conference Series in Mathematics, No. 40. Providence: Amer Math Soc, 1979.

责任编辑: 丁 蓉

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net