第35卷第3期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 35 No. 3
2012年9月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Sept,2012

分数布朗运动环境下降低权利金的权证定价研究

赵 巍

(淮海工学院商学院,江苏 连云港 222001)

[摘要] 证券市场分形特征的存在,否定了布朗运动作为期权定价模型初始假定的合理性.本文从标的资产服从分数布朗运动假定出发,构建分数风险测度下的拟鞅定价策略,简化了分数 Black-Scholes 模型的求解过程;以此为基础,研究支付型和抵付型两类降低权利金的权证定价问题,得到了分数布朗运动驱动的降低权利金权证定价公式.

[关键词] 分数布朗运动,拟鞅,分数 Black-Scholes 模型,降低权利金

[中图分类号] F830.9 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)03-0011-06

Research on Pricing of Depressed Option Stock Under Fractional Brownian Motion Environment

Zhao Wei

(School of Business, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang 222001, China)

Abstract: Considering of fractional character, Brownian motion is non-reasonable for basic assumption to option pricing model. This paper sets the assert price followed fractional Brownian motion to construct quasi-martingale method under the risk neutral measure, which can simplify the proceeding of solving fractional Black-Scholes. Furthermore, this paper solves two kinds of depressed option by the same way and gets the pricing equation driven by FBM.

Key words: fractional Brownian motion, quasi-martingale, fractional Black-Scholes model, depressed option

期权定价理论是现代金融理论的核心内容之一,Black 和 Scholes[1] 假定股票价格服从几何布朗运动,得出了著名的 Black-Scholes 公式.以布朗运动描述股票价格行为最早要追述到 Bachelier 关于债券价格运动的研究[2].随后,Osborne 也建议用正态分布随机变量来建模对数股票价格[3].然而大量实证研究表明金融资产的对数收益率并非服从正态分布,而是服从一种“尖峰厚尾”的分布,而且金融资产价格之间也并非随机游走,而是存在着长期相关性[4].Mandelbrot 和 Van Ness[5] 提出的分数布朗运动能够有效描述金融资产的长期相关特征,成为修正传统定价模型的合适工具.但分数布朗运动既不是马氏过程,又不是半鞅,故无法用通常定义的随机积分进行分析,从而众多学者试图寻找一种新的积分来避免套利的存在[6-8].Hu 和 ϕksendal 通过定义分数伊藤积分,证明在该积分意义下分数 Black-Scholes 市场无套利且完备[9].Necula 根据 Hu 和 ϕksendal 的研究结果,通过随机积分计算得到了分数期权定价模型的解析解[10].我国学者在分数期权定价领域也开展了丰富的研究[11-21].

基于 Necula 的研究方法,本文在传统鞅定价研究框架下,通过构建拟鞅定价方法,在分数风险中性测度下以简单积分变换得到了分数 Black-Scholes 公式,进而研究了降低权利金的权证定价模型,最后对分数期权价格和标准期权价格进行了比较.

1 预备知识

1.1 分数布朗运动

设 $B_H(t)$ 是定义在完全概率空间(Ω,F,P)上的分数布朗运动,满足:

收稿日期:2012-05-07.

通讯联系人:赵 巍,博士,副教授,研究方向:金融工程与金融复杂性. E-mail:njzhaow@126.com

(1) $B_H(t)$ 以概率1连续,且 $B_H(0)=0$;

(2) 对任何 $t\geqslant 0$

$$P_r^Q(B_H(t)-B_H(0)\leqslant x)=(2\pi)^{-1/2}t^{-H}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\left(-\frac{s^2}{2t^{2H}}\right)}\mathrm{d}s,$$

其中,$0<H<1$.

上面的性质表明 $B_H(t)$ 是增量平稳的连续 Gaussian 过程,且 $H=1/2$ 时恰为标准布朗运动,即 $B_H(t)\sim N(0,t^{2H})$,则有 $E[B_H(t)]=0$,$E[B_H(t)]^2=t^{2H}$.

1.2　分数 *Itô* 过程和拟鞅测度

比分数布朗运动更为复杂的随机过程 $X(t)$ 称为分数 Itô 过程,如果满足:

$$\mathrm{d}X(t)=\mu(x,t)+\sigma(x,t)\mathrm{d}B_H(t),$$

其中,$\mu(x,t)$ 为 $X(t)$ 的时变均值,$\sigma(x,t)$ 为 $X(t)$ 的时变方差.

引理1[9] (几何分数布朗运动)　考虑分数差分方程

$$\mathrm{d}X(t)=\mu X(t)+\sigma X(t)\mathrm{d}B_H(t),$$

则有

$$X(t)=x\exp(\sigma B_H(t)+\mu t-1/2\sigma^2t^{2H}),$$

其中,μ,σ 为常数,$x=X(0)$.

设$\{F_t^H,0<t<T\}$ 表示由 $B_H(t)$ 产生的 $F_t^H=\sigma(B_H(u),0\leqslant u\leqslant t)$ 关于 P 完备的 $\sigma-$流.

引理2[10] (分数风险中性定价)　任意自然 $\sigma-$流 F_T^H 上的可测未定权益 F 在任意时刻 $t\in[0,T]$ 时的价格为

$$F(t)=\mathrm{e}^{-(T-t)}\tilde{E}_t^P[F],$$

其中,$\tilde{E}_t^P[\cdot]$ 为概率测度 P 下的拟条件数学期望.

根据文献[10]中拟鞅的定义,有下面的分数 Girsanov 定理成立.

引理3[10] (分数 Girsanov 定理)　若 $f\in L^2(R)$,并令

$$\xi(t)=\exp\left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}B_H(\tau)-1/2E\left[\left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}B_H(\tau)\right)\right]^2\right),$$

则在风险中性测度 Q 下,相对于一个自然分数布朗集 F_t^H,$\xi(t)$ 是拟鞅,即相对于信息集合 F_t^H,$\xi(t)$ 的最好预测是 $\xi(s)$.

考虑另一风险中性测度 R,若

$$B_H^R(t)=B_H^Q(t)+\theta t^{2H}=B_H^Q(t)+\int_0^t 2H\theta\tau^{2H-1}\mathrm{d}\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

其中,$B_H^Q(t)$ 为风险中性测度 Q 下的分数布朗运动,$\theta\in L^2(R)$,由文献[9]中的引理1.7,$B_H^R(t)$ 为风险中性测度 R 下的分数布朗运动.

引理4[10]　若函数 f 满足 $\tilde{E}_t[f(B_H(T))]<\infty$,则对任意 $t\leqslant T$,有下面的对等关系:

$$\tilde{E}_t^R[f(B_H(T))]=\frac{1}{Z(t)}\tilde{E}_t^Q[f(B_H(T))Z(T)],$$

其中,

$$Z(t)=\exp\left(\theta B_H(t)-\frac{\theta^2}{2}t^{2H}\right),$$

$\tilde{E}_t^Q[\cdot]$,$\tilde{E}_t^R[\cdot]$ 分别为风险中性测度 Q 和 R 下的拟条件数学期望.

2　分数 *Black-Scholes* 期权定价模型

考虑标的资产如股票价格 $S(t)$ 满足几何分数布朗运动:

$$\mathrm{d}S(t)=\mu S(t)+\sigma S(t)\mathrm{d}B_H(t).$$

若保持其余 Black-Scholes 模型条件不变,则此时的市场为 Itô 型分数 Black-Scholes 市场. Hu 和 φksendal 证明[9],分数 Black-Scholes 市场不存在套利且是完全市场.

分数 Black-Scholes 市场如同通常的 Black-Scholes 市场,存在两种投资可能性. 一种是无风险资产如

债券,满足:

$$\mathrm{d}M(t)=rM(t)\mathrm{d}t,$$

其中,r 为无风险利率;另一种风险标的资产如股票,满足上述的几何分数布朗运动,且在风险中性测度 Q 下,有

$$\mathrm{d}S(t)=rS(t)+\sigma S(t)\mathrm{d}B_H(t).$$

由引理1,有

$$S(t)=S\exp\left(rt-\frac{1}{2}\sigma^2t^{2H}+\sigma B_H(t)\right).$$

定理1 (分数Black-Scholes公式) 标的资产 S,到期日为 T,执行价为 K 的欧式买权在任意 $t\in[0,T]$ 时刻的价格为

$$C(t,S(t))=S(t)N(d_1)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2),$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}},$$

$$d_2=\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right)+r(T-t)-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}.$$

证明　由引理2,

$$C(t,S(t))=\tilde{E}_t^Q[\mathrm{e}^{-r(T-t)}\max((S(T)-K),0)]=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{E}_t^Q[S(T)I_{\{S(T)>K\}}]-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{E}_t^Q[I_{\{S(T)>K\}}].$$

显然,

$$\tilde{E}_t^Q[I_{\{S(T)>K\}}]=P_r^Q(\ln S(T)>\ln K),$$

而

$$\ln S(T)=\ln S(t)+r(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(B_H^Q(T)-B_H^Q(t))>\ln K,$$

由 $B_H^Q(T)\sim N(0,T^{2H})$,$B_H^Q(t)\sim N(0,t^{2H})$,可得

$$B_H^Q(T)-B_H^Q(t)>\frac{\ln\left(\frac{K}{S(t)}\right)-r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma},$$

也即

$$-\frac{B_H^Q(T)-B_H^Q(t)}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}\leqslant\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right)+r(T-t)-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}},$$

所以

$$\tilde{E}_t^Q[I_{\{S(T)>K\}}]=P_r^Q(\ln S(T)>\ln K)=N(d_2).$$

另一方面,考虑随机过程

$$B_H^R(t)=B_H^Q(t)-\sigma t^{2H},$$

定义

$$Z(t)=\exp\left(\sigma B_H(t)-\frac{\sigma^2}{2}t^{2H}\right),$$

由引理4,

$$\tilde{E}_t^Q[S(T)I_{\{S(T)>K\}}]=\mathrm{e}^{rT}\tilde{E}_t^Q[Z(T)I_{\{S(T)>K\}}]=Z(t)\mathrm{e}^{rT}\tilde{E}_t^R[I_{\{S(T)>K\}}],$$

而

$$\ln S(T)=\ln S+rT-\frac{1}{2}\sigma^2T^{2H}+\sigma B_H^Q(T)=\ln S+rT+\frac{1}{2}\sigma^2T^{2H}+\sigma B_H^R(T),$$

$$\tilde{E}_t^R[I_{\{S(T)>K\}}]=P_r^R(\ln S(T)>\ln K)=P_r^R(\ln S(t)+r(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+$$

$$\sigma\Delta B_H^R(T)>\ln K)=P_r^R\left(-\frac{\Delta B_H^R(T)}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}\leqslant\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}\right),$$

即

$$\tilde{E}_t^Q[S(T)I_{\{S(T)>K\}}]=S(t)e^{-rt}e^{rT}N(d_1)=S(t)e^{r(T-t)}N(d_1).$$

所以,欧式买权的评价模型为

$$C(t,S(t))=S(t)N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

定理得证.

3　降低权利金的权证定价模型

降低权利金权证是广受投资人欢迎的一种期权,而其中最基本的便是上限型买权和抵付型买权,此类权证因其定价模型的简单和避险操作的简易也受到发行券商的推崇.因此,应用拟鞅定价的思想来研究降低权利金的期权定价模型有着重要的意义.

3.1　上限型买权

上限型买权(Capped Calls)到期日现金流量 C_T 为[22]:

$$C_T=\begin{cases}0, & S(T)\leqslant K_1,\\ S(T)-K_1, & K_1<S(T)<K_2,\\ K_2-K_1, & S(T)\geqslant K_2.\end{cases}$$

当标的价格 $S(T)$ 小于履约价格 K_1 或介于 K_1 及 K_2 之间,该期权价格与一般买权相同;但若 $S(T)$ 大于履约价格 K_2,则要受到上限(K_2-K_1)的限制,因此权利金得以降低.在风险中性条件下,由引理2,

$$C_t=e^{-r(T-t)}\tilde{E}_t^Q[(S(T)-K_1)I_{\{K_1<S(T)<K_2\}}]+e^{-r(T-t)}\tilde{E}_t^Q[(K_2-K_1)I_{\{S(T)\geqslant K\}}].$$

而

$$\tilde{E}_t^Q[S(T)I_{\{K_1<S(T)<K_2\}}]=\tilde{E}_t^Q\left[S\exp\left(rT-\frac{\sigma^2}{2}T^{2H}+\sigma B_H^Q(T)\right)I_{\{K_1<S(T)<K_2\}}\right]=$$
$$Se^{rT}\tilde{E}_t^Q[Z(T)I_{\{K_1<S(T)<K_2\}}]=Se^{rT}Z(t)\tilde{E}_t^R[I_{\{K_1<S(T)<K_2\}}]=$$
$$e^{r(T-t)}S(t)P_r^R\left[\ln K_1<\ln S(t)+r(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(B_H^R(T)-B_H^R(t))<\ln K_2\right]=$$
$$e^{r(T-t)}S(t)[N(d_1^*)-N(d_1^{**})],$$

其中,

$$d_1^*=\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K_1}\right)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}},$$

$$d_1^{**}=\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K_2}\right)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}.$$

同样

$$\tilde{E}_t^Q[I_{\{K_1<S(T)<K_2\}}]=P_r^Q(K_1<S(T)<K_2)=N(d_2^*)-N(d_2^{**}),$$

其中,$d_2^*=d_1^*-\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}$,$d_2^{**}=d_1^{**}-\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}$.

根据定理1结果,有

$$\tilde{E}_t^Q[(K_2-K_1)I_{\{S(T)\geqslant K\}}]=(K_2-K_1)\tilde{E}_t^Q[I_{\{S(T)\geqslant K_2\}}]=(K_2-K_1)N(d_2^{**}),$$

因此,上限型买权的定价公式为

$$C_t=e^{-r(T-t)}\{S(t)e^{r(T-t)}[N(d_1^*)-N(d_1^{**})]-K_1[N(d_2^*)-N(d_2^{**})]\}+$$
$$e^{-r(T-t)}[(K_2-K_1)N(d_2^{**})]=$$
$$S(t)[N(d_1^*)-N(d_1^{**})]+e^{-r(T-t)}[K_2N(d_2^{**})-K_1N(d_2^*)].$$

3.2　抵付型买权

抵付型买权(Deductible Calls)到期日现金流量 DC_T 为[22]：

$$DC_T=\begin{cases}0, & S(T)<K,\\ 0, & K\leqslant S(T)\leqslant L,\\ S(T)-K, & L<S(T).\end{cases}$$

当标的价格 $S(T)$ 小于履约价格 K，该期权价格与一般买权相同. 但当介于 K 及 L 之间，此权证不支付任何现金. 这不同于一般买权，一般买权的现金流量为 $S(T)-K$. 因为在初步获利阶段该权证不支付任何现金，只有 $S(T)$ 高于 L，才开始支付现金，因此权利金得以降低.

根据抵付型买权的到期价值知，权利金的决定是 BS 模型价格减去最初支付部分的权利金，即有

$$DC_t=S(t)N(d_1)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)-\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{E}^Q\left[(S(T)-K)I_{\{K\leqslant S(T)\geqslant L\}}\right],$$

其中，d_1，d_2 为定理 1 给出. 而

$$\tilde{E}_t^Q\left[(S(T)-K)I_{\{K\leqslant S(T)\leqslant L\}}\right]=\tilde{E}_t^Q\left[S(T)I_{\{K\leqslant S(T)\leqslant L\}}\right]-K\tilde{E}^Q\left[I_{\{K\leqslant S(T)\leqslant L\}}\right]=$$
$$S(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}\left[N(d_1)-N(d_1^L)\right]-K\left[N(d_2)-N(d_2^L)\right],$$

其中，

$$d_1^L=\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{L}\right)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}},$$
$$d_2^L=d_1^L-\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}.$$

故

$$DC_t=S(t)N(d_1)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)-S(t)\left[N(d_1)-N(d_1^L)\right]+$$
$$K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[N(d_2)-N(d_2^L)\right]=S(t)N(d_1^L)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2^L).$$

4　结论

分数布朗运动的出现，导致基于布朗运动假设及鞅定价方法建立的期权定价模型需要改进. Hu 和 Øksendal 已证明分数金融市场是完备无套利市场[9]. 本文采用拟鞅定价的方法求解了分数 Black-Scholes 公式，进而对分数布朗运动驱动的降低权力金期权进行了定价. 从得到的结果看出，分数期权价格不仅与到期时间有关，还取决于长记忆参数 H. 考虑到期日均为 T，签约日分别为 t_1 和 t_2 的两种期权($t_1\leqslant t_2\leqslant t\leqslant T$)，对通常的 Black-Scholes 模型而言，两者在时刻 t 的期权价格相同；而对分数 Black-Scholes 模型，前者的价格还受到标的资产价格在时间区间 $[t_1,t_2]$ 的影响，这正是分数布朗运动中长记忆性驱动的结果.

参考文献

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Political Economy, 1973, 81(3): 637-659.

[2] Bachelier L. Theory of Speculation [M] //Cootner P. The Random Character of Stock Market Prices. Cambridge: MIT Press, 17-78.

[3] Osborne M F M. Brownian Motion in the stock market [J]. Operations Research, 1959, 7(2): 145-173.

[4] Fama E. The behavior of stoek market price [J]. The Journal of Business, 1965, 38(1): 34-105.

[5] Mandelbrot B B, Van Ness J W. Fractional Brownian motion, fractional noises and application [J]. SIAM Review, 1968, 10(4): 422-437.

[6] Lin S J. Stochastic analysis of fractional Brownian motion [J]. Stochastics and Stochastics Report, 1995, 55(1): 121-140.

[7] Roger L C G. Arbitrage with fractional Brownian motion [J]. Mathematical Finance, 1997, 7: 95-105

[8] Decreusefond L, Ustunel A S. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion [J]. Potential Analysis, 1999, 10: 177-214.

[9] Hu Yaozhong, Øksendal B. Fractional white noise calculus and application to Finance [J]. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2000, 1(6): 1-32.

[10] Necula C. Option pricing in a fractional Brownian motion environment [J]. Working Paper of the Academy of Economic

Studies, 2002, 27: 8 079-8 089.
[11] 曹宏铎. 证券市场复杂分形行为标度分析与机会决策研究[J]. 金融研究, 2005, 1: 138-145
[12] 刘海媛, 周圣武, 索新丽. 标的资产价格服从分数布朗运动的几种新型期权定价[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(15): 54-59.
[13] 肖艳清, 邹捷中. 分数布朗运动环境下的期权定价与测度变换[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(20): 58-62.
[14] 张卫国, 肖炜麟, 徐维军, 等. 跳跃分形过程下欧式汇率期权的定价[J]. 中国管理科学, 2008, 16(3): 57-61.
[15] 何成洁, 沈明轩, 杜雪樵. 分数布朗运动环境下幂型支付的期权定价公式[J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2009, 32(6): 924-926.
[16] 孙琳. 分数布朗运动下带交易费用的期权定价[J]. 系统工程, 2009, 27(9): 36-40.
[17] 张卫国, 肖炜麟, 徐维军, 等. 分数布朗运动下欧式汇率期权的定价[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(6): 68-76.
[18] 马超群, 刘超. 分数商品期货期权定价模型及其实证研究[J]. 系统工程, 2009, 27(2): 23-27.
[19] 赵巍. 股价受分数布朗运动驱动混合的期权定价模型[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2010, 33(1): 6-10.
[20] 周银, 杜雪樵. 分数布朗运动下的亚式期权定价[J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2011, 34(2): 317-320.
[21] 方知, 何传江, 王艳. 服从分数跳-扩散过程的复合期权定价[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(12): 6-14.
[22] 陈松男. 金融工程学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2002.

[责任编辑: 丁　蓉]