第 35 卷第 3 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 35 No. 3
2012 年 9 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Sept, 2012

# 几乎可加函数序列的 Gibbs 测度的存在性

王 培

(南京大学金陵学院基础部, 江苏 南京 210089)

[摘要] 本文研究了动力系统中热力学机制中的重要内容——Gibbs 测度的存在性,我们得到了关于几乎可加函数序列的 Gibbs 测度的存在性.

[关键词] Gibbs 测度,几乎可加函数序列

[中图分类号] O189 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)03-0017-08

# The Existence of the Gibbs Measure for an Almost-Additive Sequence of Functions

Wang Pei

(Basic Department, Nanjing University Jinling College, Nanjing 210089, China)

**Abstract:** In this paper, we study the important contents in thermodynamic formalism of dynamical systems——the existence of Gibbs measure, we investigate the existence of the Gibbs measure for an almost-additive sequence of functions.

**Key words:** Gibbs measure, an almost-additive sequence of functions

热力学机制是动力系统所研究的内容之一. Gibbs 测度则是热力学机制中的一个重要概念,它在动力系统维数理论和重分形分析等方面都起到了非常重要的作用. 设 $X$ 为紧度量空间,对任意的 $x \in X$,若序列 $\Phi = \{\varphi_n: X \to R\}$ 满足 $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k x)$, $n \in \mathbf{N}$,则称序列 $\Phi$ 为可加的,否则称 $\Phi$ 是非可加的. 若对于 $\forall n, m \in \mathbf{N}$, $\varphi_{m+n} \leqslant \varphi_m(x) + \varphi_n(f^n x)$,则称序列 $\Phi = \{\varphi_n: X \to R\}$ 是次可加的. 2006 年, Barrieira[1] 和 Mummert[2] 又先后提出了几乎可加序列的概念,即存在 $c > 0$,对于 $\forall n, m \in \mathbf{N}$,序列 $\Phi = \{\varphi_n\}$ 满足 $\varphi_n + \varphi_m \circ f^n - c \leqslant \varphi_{n+m} \leqslant \varphi_n + \varphi_m \circ f^n + c$. 1975 年, Bowen[3] 给出了有限型子移位空间上,集合 $\mathscr{F}_A$ 中函数的 Gibbs 测度的存在性. Falconer 是最早研究非可加系统的,1988 年, Falconer[4] 在混合排斥子上给出次可加序列的变分原理. 1992 年, Ruelle[5] 在紧度量空间上,给出了 Gibbs 测度的存在性. 2006 年, Barrieira[1] 建立了几乎可加序列在排斥子上的变分原理并讨论了平衡态及 Gibbs 测度的存在性和惟一性. Mummert[2] 在有限型子移位空间上,给出了变分原理并讨论了平衡态及 Gibbs 测度的存在性和惟一性.

本文的主要工作是将 Gibbs 测度的存在性推广到一般的紧致度量空间上.

本文的结构如下. 第 1 节介绍了一些相关的定义. 第 2 节给出一些相关问题的介绍. 在第 3 节中给出了本文的主要结果及其证明.

## 1 相关的重要概念

在本节中简单介绍一下分离集、拓扑压、Gibbs 测度等概念,为后面第 3 节进行进一步的研究做准备.

设 $X$ 是紧致度量空间, $f: X \to X$ 为 $X$ 上的连续自映射.

**定义 1**[6] 对于 $x \in X$. 若存在 $n \in \mathbf{N}$,使得 $f^n(x) = x$,则称 $x$ 是 $f$ 的周期点. 若 $f^n(x) = x$,且对任意的 $1 \leqslant k < n$, $f^k(x) \neq x$,则称 $n$ 为点 $x$ 的周期. 若 $f(x) = x$,则称 $x$ 为 $f$ 的不动点, $f$ 的所有不动点的集合记作 $Fix(x)$.

收稿日期: 2012-02-20.

通讯联系人: 王 培,硕士,研究方向: 拓扑动力系统. E-mail: wangpei408@163.com

**定义2**[7]　设$(X,\mathscr{B},\mu)$为概率空间,$f:X\to X$为映射.$M(X)$为概率测度的集合.映射$\tilde{f}:M(X)\to M(X)$满足$(\tilde{f}\mu)(B)=\mu(f^{-1}B)$,$\forall B\in\mathscr{B}(X)$,若对于测度$\mu\in M(X)$,有$\tilde{f}\mu=\mu$,则称$\mu$为对$f$不变的概率测度,这样的测度构成的集合用$M(X,f)$表示.

设$(X,d)$是度量空间,$f:X\to X$为映射,定义以$x\in X$为中心,半径为$\varepsilon$的开球$B(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\}$,$\bar{B}(x,\varepsilon)$为闭球.对于$n\geqslant 1$,记$d_n^f(x,y)=:\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}d(f^ix,f^iy)$,它是一个与$n$有关的$X$上的新度量.

**定义3**[7]　设$K$为$X$的紧致子集,给定$n\in\mathbf{N}$,$\varepsilon>0$,若对于任意$x\in K$,存在$y\in F$,使得$d_n^f(x,y)\leqslant\varepsilon$,即满足$K\subset\bigcup\limits_{y\in F}\overline{B_n}(y,\varepsilon)$,则称子集$F\subset X$是$K$关于$f$的$(n,\varepsilon)$-生成集.

**定义4**[7]　设$K$为$X$的紧致子集,给定$n\in\mathbf{N}$,$\varepsilon>0$,若$x,y\in E\subset K$且$x\neq y$,满足$d_n^f(x,y)>\varepsilon$,则称$E$是$K$关于$f$的$(n,\varepsilon)$-分离集.

**命题1**[7]　若$E$为$K$关于$f$的最大基数的$(n,\varepsilon)$-分离集,则$E$也是$K$关于$f$的$(n,\varepsilon)$-生成集.

下面用分离集来定义函数的拓扑压.

**定义5**[7,8]　设$(X,d)$是紧致度量空间,$f:X\to X$是连续映射,$\varphi:X\to R$为$X$上的实值函数,对于$x\in X$,给定$n\in\mathbf{N}$,定义$S_n\varphi(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\varphi(f^ix)$,对于$\varepsilon>0$,$n\in\mathbf{N}$,记$N_d(f,\varphi,\varepsilon,n):=\sup\{\sum\limits_{x\in E}\mathrm{e}^{S_n\varphi(x)}\mid E\subset X$是$(n,\varepsilon)$-分离集$\}$,则$P(\varphi):=P(f,\varphi):=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log N_d(f,\varphi,\varepsilon,n)$,这时我们称$P(\varphi)$为$f$关于$\varphi$的拓扑压.

**定义6**[7]　设$f$为紧致度量空间$(X,d)$上的同胚,若存在$\delta>0$,对于$x\neq y\in X$时,存在$n\in\mathbf{Z}$,使得$d(f^nx,f^ny)>\delta$,则称同胚$f$为可扩的且$\delta$为可扩常数.

**定义7**[8]　定义集合

$C^f(X)=\{\varphi:X\to R$为连续函数$\mid$存在$C,\varepsilon>0$,使得对所有的$n\in\mathbf{N}$,$d_n^f(x,y)\leqslant\varepsilon\Rightarrow|S_n\varphi(x)-S_n\varphi(y)|\leqslant C\}$.

**定义8**[9]　设$f:X\to X$为紧致度量空间$(X,d)$上的连续映射,若对于任意$\varepsilon>0$,存在整数$M=M(\varepsilon)$,使得满足下列条件:

(a) $I_1,I_2,\cdots,I_n$是整数区间且对于任意$j$,$I_j\subseteq[a,b]$,$a,b\in\mathbf{Z}$,

(b) $\mathrm{dist}(I_i,I_j)\geqslant M(\varepsilon)$,$i\neq j$,则对于任意$x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$,存在点$x\in X$,使得:

(1) $f^{b-a+M(\varepsilon)}(x)=x$,

(2) $d(f^k(x),f^k(x_i))<\varepsilon$,$k\in I_i$.

则我们称映射$f:X\to X$具有specification性质.

2006年,Barrieira[1]提出了几乎可加序列的概念并给出几乎可加函数序列的拓扑压的定义.

**定义9**[1]　设$\Phi=\{\varphi_n\}$是函数序列,若存在$c>0$,对于$\forall n,m\in\mathbf{N}$,有

$$\varphi_n+\varphi_m\circ f^n-c\leqslant\varphi_{n+m}\leqslant\varphi_n+\varphi_m\circ f^n+c,$$

则称序列$\Phi=\{\varphi_n\}$是几乎可加函数序列.

**定义10**[1]　设$X$是紧致度量空间且$f:X\to X$是同胚.$\Phi=\{\varphi_n\}$是几乎可加的连续函数序列.当$x\in X$,$n\in\mathbf{N}$时,对于$\varepsilon>0$,记

$$N_d(f,\Phi,\varepsilon,n)=\sup\{\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{\varphi_n(x)}\mid E\subset X\text{是}(n,\varepsilon)\text{-分离集}\}.$$

**注1**　若$\varepsilon_1<\varepsilon_2$,则$N_d(f,\Phi,\varepsilon_1,n)\geqslant N_d(f,\Phi,\varepsilon_2,n)$.

**定义11**[1]　设$X$是紧致度量空间且$f:X\to X$是同胚.$\Phi=\{\varphi_n\}$是几乎可加连续函数序列,当$\varepsilon>0$,记$P(f,\Phi,\varepsilon)=\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log N_d(f,\Phi,\varepsilon,n)$.

**注2**　若$\varepsilon_1<\varepsilon_2$,则$P(f,\Phi,\varepsilon_1)\geqslant P(f,\Phi,\varepsilon_2)$.

**定义12**[1]　设$X$是紧致度量空间且$f:X\to X$是同胚.$\Phi=\{\varphi_n\}$是几乎可加连续函数序列,由注2,当$\varepsilon\to 0$时,$P(f,\Phi,\varepsilon)$的极限存在,记$P(\Phi)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}P(f,\Phi,\varepsilon)$.这时我们称$P(\Phi)$为$f$关于$\Phi$的拓扑压.

**定义 13**[1]　设 $X$ 是紧致度量空间且 $f: X \to X$ 是同胚，$\Phi = \{\varphi_n\}$ 是连续函数序列. 若其满足：存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $K$，$\sup \mathrm{var}_m(\Phi, f, \varepsilon_0) = K$，其中 $\mathrm{var}_m(\Phi, f, \varepsilon_0) = \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| : d(f^k(x), f^k(y)) \leqslant \varepsilon_0, 0 \leqslant k \leqslant m-1, \forall n \geqslant 1\}$，我们称该序列为有界变差的连续函数序列.

**注 3**　设 $X$ 是紧致度量空间，同胚 $f: X \to X$ 是可扩的且可扩常数为 $\delta_0$，$\varepsilon < \delta_0/2$，若几乎可加函数序列 $\Phi = \{\varphi_n\}$ 是有界变差的，则 $P(\Phi) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \log N_d(f, \Phi, \varepsilon, n)$.

**证明**　可参见[7]中定理 9.6 的证明，证明方法与其类似.

## 2　相关问题的介绍

设 $A$ 是一个取值为 0 或 1 的 $n \times n$ 的矩阵，$\Sigma_n = \{1, 2, \cdots, n\}^N$，在集合 $\Sigma_A = \{\underline{x} = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in \Sigma_n : A_{x_i x_{i+1}} = 1$，对于每个 $i \in \mathbf{Z}\}$ 上定义相应的拓扑 Markov 链 $\sigma: \Sigma_A \to \Sigma_A$. 设 $(\Sigma_A, \sigma)$ 为有限型子移位空间，对于连续函数 $\varphi: \Sigma_A \to \mathbf{R}$，定义 $\mathrm{var}_k \varphi = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| : x_i = y_i, \forall |i| \leqslant k\}$，$\forall k \geqslant 0$. 设 $\mathscr{F}_A$ 为满足条件 $\mathrm{var}_k \varphi \leqslant b\alpha^k$，$b > 0$，$\alpha \in (0,1)$，$\forall k \geqslant 0$ 的函数构成的集合. 若 $U, V$ 是 $\Sigma_A$ 的两个非空开子集，存在 $N > 0$，使得对于 $\forall n \geqslant N$，$\sigma^n U \cap V \neq \varnothing$，则称 $\sigma$ 是拓扑混合的.

1975 年，Bowen[3] 给出了有限型子移位空间上，集合 $\mathscr{F}_A$ 中函数的 Gibbs 测度的存在性.

**定理 1**[3]　设 $\Sigma_A$ 是拓扑混合的且 $\varphi \in \mathscr{F}_A$，可以找到常数 $c_1, c_2$，对于每个 $\underline{x} \in \Sigma_A$ 且 $n \geqslant 0$，存在一个惟一的 $\sigma$ - 不变的 Borel 概率测度，满足

$$c_1 \leqslant \frac{\mu\{\underline{y}: y_i = x_i, \forall i \in (0, n)\}}{\exp\left(-Pn + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \varphi(\sigma^k(\underline{x}))\right)} \leqslant c_2,$$

这时，我们称 $\mu$ 为函数 $\varphi$ 的 Gibbs 测度.

1992 年，Ruelle[5] 在紧度量空间上，给出了 Gibbs 测度的存在性（可参见[8]）. 定义测度 $\mu$：

记 $P_Y(f, \varphi, n) := \sum\limits_{x \in Fix(f^n) \cap Y} \mathrm{e}^{S_n\varphi(x)}$，$Y$ 为 $X$ 的子集.

序列 $\mu_n = \dfrac{1}{P_X(f, \varphi, n)} \sum\limits_{x \in Fix(f^n)} \mathrm{e}^{S_n\varphi(x)} \delta_x$，由 $M(X)$ 的紧致性，序列 $\mu_n$ 存在极限点

$$\mu = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k} \in M(X, f), \tag{1}$$

且 $\mu_n(Y) = P_Y(f, \varphi, n) / P_X(f, \varphi, n)$.

**定理 2**[5,8]　设 $(X, d)$ 是紧致度量空间，$f: X \to X$ 是具有 specification 性质的可扩同胚，测度 $\mu$ 如式 (1) 定义，$\varphi \in C^f(X)$，$\varepsilon > 0$ 同定义 7，则存在 $A_\varepsilon, B_\varepsilon > 0$，对于 $y \in X, n \in \mathbf{N}$，使得测度 $\mu$ 满足：

$$A_\varepsilon \leqslant \frac{\mu(B_n(y, \varepsilon))}{\exp(-nP(\varphi) + S_n\varphi(y))} \leqslant B_\varepsilon.$$

2006 年，Barrieira[1] 给出了排斥子上几乎可加函数序列 Gibbs 测度的存在性. 设 $f: M \to M$ 是可微映射，$\Lambda$ 是 $f$ 的排斥子，称闭集 $R_1, R_2, \cdots, R_p \subset \Lambda$ 是排斥子 $\Lambda$ 的 Markov 分割. 定义一个 $p \times p$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (\tau_{ij})$ 且

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若} f(\mathrm{int} R_i) \cap R_j \neq \varnothing, \\ 0, & \text{若} f(\mathrm{int} R_i) \cap R_j = \varnothing. \end{cases}$$

我们可以在集合

$$\Sigma_A = \{(i_1 i_2 \cdots) \in \{1, 2, \cdots, p\}^N : \tau_{i_k i_{k+1}} = 1, \text{对于每个 } k \in \mathbf{N}\}$$

上定义相应的拓扑 Markov 链 $\sigma: \Sigma_A \to \Sigma_A$，移位映射 $\sigma(i_1 i_2 \cdots) = (i_2 i_3 \cdots)$. 定义 $\Sigma_{A,n} = \{(i_1 i_2 \cdots i_n) \mid i_l = j_l, l = 1, 2, \cdots, n, (j_1 j_2 \cdots j_n) \in \Sigma_A\}$，且对于每个 $(i_1 i_2 \cdots i_n) \in \Sigma_{A,n}$，定义

$$\Delta_{i_1 \cdots i_n} = \bigcap_{l=1}^{n} f^{-l+1} R_{i_l}.$$

**定理 3**[1]　设 $\Lambda$ 是一个可微映射的一个排斥子，$\Phi = \{\varphi_n\}$ 是几乎可加且满足有界变差条件的连续函数序列，存在常数 $C > 0$，使得对于每个 $n \in \mathbf{N}$，$(i_1 i_2 \cdots i_n) \in \Sigma_{A,n}$ 且 $x \in \Delta_{i_1 \cdots i_n}$，存在 $\Lambda$ 上的 Borel 概率测度

$\mu$ 满足

$$C^{-1} \leqslant \frac{\mu(\Delta_{i_1 \cdots i_n})}{\exp(-nP(\Phi) + \varphi_n(x))} \leqslant C.$$

2006年,Mummert[2] 在有限型子移位空间上给出 Gibbs 测度的存在性.

## 3　主要结果及其证明

我们所做的工作是给出紧致度量空间上几乎可加函数序列的 Gibbs 测度的存在性. 为了得到我们所要的结论,先给出下面几个引理.

**引理1**　设$(X,d)$是紧度量空间,若$f: X \to X$是可扩同胚且具有 specification 性质,可扩常数为$\delta_0$,则对于几乎可加且具有有界变差的连续函数序列$\Phi = \{\varphi_n\}$,$\varepsilon_0$满足定义13,记$\delta_1 = \min\{\delta_0/2, \varepsilon_0\}$,$\varepsilon \in (0, \delta_1)$,当$\delta > 0$时,存在$C_{\delta,\varepsilon}$,使得$N_d(f, \Phi, \delta, n) \leqslant C_{\delta,\varepsilon} N_d(f, \Phi, \varepsilon, n)$.

**证明**　当$\delta \geqslant \varepsilon$时,我们取$C_{\delta,\varepsilon} = 1$,即得到了引理的结果. 下面考虑$\delta < \varepsilon$的情况,设$E$是任意一个$(n, \delta)$-分离集且$F$是一个极大的$(n, \varepsilon)$-分离集. 定义映射$g: E \to F$,对于每个$x \in E$,有$z = g(x) \in F$且满足$d(f^k(x), f^k(z)) \leqslant \varepsilon, 0 \leqslant k \leqslant n-1$. 记$E_z = \{x \in E: d(f^k(x), f^k(z)) \leqslant \varepsilon, 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$. 对于$x \in E_z$,有界变差的函数序列$\Phi = \{\varphi_n\}$,满足$|\varphi_n(x) - \varphi_n(z)| < K$,$\sum_{x \in E} \mathrm{e}^{\varphi_n(x)} \leqslant \sum_{z \in F} (\mathrm{card} E_z) \mathrm{e}^K \mathrm{e}^{\varphi_n(z)} \leqslant M\mathrm{e}^K N_d(f, \Phi, \varepsilon, n)$.

取$C_{\delta,\varepsilon} = M\mathrm{e}^K$,得证.

**引理2**　设$(X,d)$是紧致度量空间,$f: X \to X$是具有 specification 性质的可扩同胚,可扩常数为$\delta_0$,$\Phi = \{\varphi_n\}$是几乎可加的且满足有界变差条件的连续函数序列,$\varepsilon_0$满足定义13,记$\delta_2 = \min\{\delta_0/3, \varepsilon_0\}$,对于$\varepsilon \in (0, \delta_2)$,存在$k_\varepsilon, K_\varepsilon > 0$,使得

$$\prod_{j=1}^{m} (k_\varepsilon N_d(f, \Phi, \varepsilon, n_j)) \leqslant N_d(f, \Phi, \varepsilon, \sum_{j=1}^{m} n_j) \leqslant \prod_{j=1}^{m} (K_\varepsilon N_d(f, \Phi, \varepsilon, n_j)),$$

这里$n_1, n_2, \cdots, n_m \in \mathbf{N}$.

**证明**　(i) 若$E$是$(\sum_{j=1}^{m} n_j, \varepsilon)$-分离集,$F_j$是一个极大$(n_j, \varepsilon/2)$-分离集,定义映射$z: E \to F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m$,则对于$x \in E$,存在$z(x) = (z_1(x), z_2(x), \cdots, z_m(x)) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m$,使得$d_{n_j}^f(f^{n_1+n_2+\cdots+n_{j-1}}(x), z_j(x)) \leqslant \varepsilon/2$且$z(\cdot)$是单射,因为$\{\varphi_n\}$是几乎可加函数序列,所以有

$$\varphi_{\sum_{j=1}^{m} n_j}(x) \leqslant \varphi_{n_1}(x) + \varphi_{n_2}(f^{n_1}(x)) + \cdots + \varphi_{n_m}(f^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}}(x)) + (m-1)c.$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi_{\sum_{j=1}^{m} n_j}(x) - \sum_{j=1}^{m} \varphi_{n_j}(z_j(x)) \leqslant{}& (\varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_1}(z_1(x))) + (\varphi_{n_2}(f^{n_1}(x)) - \varphi_{n_2}(z_2(x))) + \cdots + \\ &(\varphi_{n_m}(f^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}}(x)) - \varphi_{n_m}(z_m(x))) + (m-1)c \leqslant mK + mc.\end{aligned}$$

从而得到

$$\exp\left(\varphi_{\sum_{j=1}^{m} n_j}(x)\right) \leqslant \exp\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_{n_j}(z_j(x))\right) \exp(m(K+c)),$$

即

$$\exp\left(\varphi_{\sum_{j=1}^{m} n_j}(x)\right) \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\exp(\varphi_{n_j}(z_j(x))) \exp(K+c)),$$

所以得到

$$\sum_{x \in E} \exp\left(\varphi_{\sum_{j=1}^{m} n_j}(x)\right) \leqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{z_j(x) \in F_j} \exp(\varphi_{n_j}(z_j(x))) \exp(K+c)\right).$$

由引理1得到

$$\sum_{x \in E} \exp\left(\varphi_{\sum_{j=1}^{m} n_j}(x)\right) \leqslant \prod_{j=1}^{m} (\exp(K+c) N_d(f, \Phi, \varepsilon/2, n_j)) \leqslant$$

$$\prod_{j=1}^{m}\left(C_{\varepsilon/2,\varepsilon}\exp(K+c)N_d(f,\Phi,\varepsilon,n_j)\right).$$

取

$$K_\varepsilon = C_{\varepsilon/2,\varepsilon}\exp(K+c),$$

得到

$$N_d(f,\Phi,\varepsilon,\sum_{j=1}^{m}n_j)\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(K_\varepsilon N_d(f,\Phi,\varepsilon,n_j)\right).$$

所以得到引理中右边的不等式成立，在证明左边的不等式成立之前，先证明下面这个不等式成立.

记 $a_j = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1)M_\varepsilon, 1\leqslant j\leqslant m$. 这里 $M_\varepsilon$ 由定义 8 给出，所以

$$a_m + n_m = n_1 + n_2 + \cdots + n_m + (m-1)M_\varepsilon.$$

$$\varphi_{a_m+n_m}(x) = \varphi_{n_1+n_2+\cdots+n_m+(m-1)M_\varepsilon}(x)\geqslant\varphi_{n_1}(x)+\varphi_{n_2}(f^{n_1+M_\varepsilon})(x)+\cdots+\varphi_{n_m}(f^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}+(m-1)M_\varepsilon}(x))-mc_0. \tag{2}$$

这里 $c_0 = (M_\varepsilon+1)c+M_\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty$. ($\|\varphi_1\|_\infty = \sup|\varphi_1(x)|, x\in X$)

下面证明(2)式

$$\begin{aligned}
\varphi_{a_m+n_m}(x) &= \varphi_{n_1+n_2+\cdots+n_m+(m-1)M_\varepsilon}(x)\geqslant\varphi_{n_1+M_\varepsilon}(x)+\varphi_{n_2+n_3+\cdots+n_m+(m-2)M_\varepsilon}\circ f^{n_1+M_\varepsilon}(x)-c\geqslant\\
&\varphi_{n_1+M_\varepsilon}(x)+(\varphi_{n_2+M_\varepsilon}+\varphi_{n_3+\cdots+n_m+(m-3)M_\varepsilon}\circ f^{n_2+M_\varepsilon}-c)\circ f^{n_1+M\varepsilon}(x)-c=\\
&\varphi_{n_1+M_\varepsilon}(x)+\varphi_{n_2+M_\varepsilon}\circ f^{n_1+M_\varepsilon}(x)+\varphi_{n_3+\cdots+n_m+(m-3)M_\varepsilon}\circ f^{n_1+n_2+2M_\varepsilon}(x)-2c\geqslant\cdots\geqslant\\
&\varphi_{n_1+M_\varepsilon}(x)+\varphi_{n_2+M_\varepsilon}\circ f^{n_1+M_\varepsilon}(x)+\varphi_{n_3+M_\varepsilon}\circ f^{n_1+n_2+2M_\varepsilon}(x)+\cdots+\\
&\varphi_{n_{m-1}+M_\varepsilon}\circ f^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-2}+(m-2)M_\varepsilon}(x)+\varphi_{n_m}\circ f^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}+(m-1)M_\varepsilon}(x)-(m-1)c\geqslant\\
&(\varphi_{n_1}(x)+\varphi_{M_\varepsilon}\circ f^{n_1}(x)-c)+(\varphi_{n_2}+\varphi_{M_\varepsilon}\circ f^{n_2}-c)\circ f^{n_1+M_\varepsilon}(x)+\cdots+\\
&(\varphi_{n_{m-1}}+\varphi_{M_\varepsilon}\circ f^{n_{m-1}}-c)\circ f^{n_1+\cdots+n_{m-2}+(m-2)M_\varepsilon}(x)+\varphi_{n_m}\circ f^{n_1+\cdots+n_{m-1}+(m-1)M_\varepsilon}(x)-(m-1)c=\\
&\varphi_{n_1}(x)+\varphi_{n_2}\circ f^{n_1+M_\varepsilon}(x)+\cdots+\varphi_{n_m}\circ f^{n_1+\cdots+n_{m-1}+(m-1)M_\varepsilon}(x)+\varphi_{M_\varepsilon}\circ f^{n_1}(x)+\\
&\varphi_{M_\varepsilon}\circ f^{n_1+n_2+M_\varepsilon}(x)+\cdots+\varphi_{M_\varepsilon}\circ f^{n_1+\cdots+n_{m-1}+(m-2)M_\varepsilon}(x)-(m-1)2c\geqslant\\
&\varphi_{n_1}(x)+\varphi_{n_2}\circ f^{n_1+M_\varepsilon}(x)+\cdots+\varphi_{n_m}\circ f^{n_1+\cdots+n_{m-1}+(m-1)M_\varepsilon}(x)-(m-1)(M_\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty+(M_\varepsilon-1)c)-\\
&(m-1)2c\geqslant\varphi_{n_1}(x)+\varphi_{n_2}\circ f^{n_1+M_\varepsilon}(x)+\cdots+\varphi_{n_m}\circ f^{n_1+\cdots+n_{m-1}+(m-1)M_\varepsilon}(x)-mc_0,
\end{aligned}$$

这里 $c_0 = (M_\varepsilon+1)c+M_\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty$.

下面证明引理中左边的不等式成立.

(ii) 设 $E_j$ 是$(n_j,3\varepsilon)$－分离集，$a_j = n_1+n_2+\cdots+n_{j-1}+(j-1)M_\varepsilon$，这里 $M_\varepsilon$ 由定义 8 给出，$I_j = [a_j, a_j+n_j-1]$，由 specificaion 性质，若 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_m$，则存在 $z(x)$，使得 $d_{n_j}^{f}(f^{a_j}(z), x_j)<\varepsilon$，$E=\{z(x)\mid x\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_m\}$ 是$(a_m+n_m,\varepsilon)$－分离集.

因为序列 $\Phi$ 是有界变差的，所以有

$$|\varphi_{n_1}(z(x))-\varphi_{n_1}(x_1)|<K, |\varphi_{n_2}(f^{n_1+M_\varepsilon}z(x))-\varphi_{n_2}(x_2)|<K,\cdots,$$
$$|\varphi_{n_m}(f^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}+(m-1)M_\varepsilon}z(x))-\varphi_{n_m}(x_m)|<K.$$

又因为(2)式成立，即

$$\varphi_{a_m+n_m}(x) = \varphi_{n_1+n_2+\cdots+n_m+(m-1)M_\varepsilon}(x)\geqslant\varphi_{n_1}(x)+\varphi_{n_2}(f^{n_1+M_\varepsilon}(x))+\cdots+\varphi_{n_m}(f^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}+(m-1)M_\varepsilon}(x))-mc_0,$$

这里 $c_0 = (M_\varepsilon+1)c+M_\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty$，因此

$$\begin{aligned}
\varphi_{a_m+n_m}(z(x))-\sum_{j=1}^{m}\varphi_{n_j}(x_j)&\geqslant(\varphi_{n_1}(z(x))-\varphi_{n_1}(x_1))+(\varphi_{n_2}(f^{n_1+M_\varepsilon}(z(x)))-\varphi_{n_2}(x_2))+\cdots+\\
&(\varphi_{n_m}(f^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}+(m-1)M_\varepsilon}(z(x)))-\varphi_{n_m}(x_m))-mc_0\geqslant -mK-mc_0.
\end{aligned}$$

从而有

$$\varphi_{a_m+n_m}(z(x))\geqslant -m(c_0+K)+\sum_{j=1}^{m}\varphi_{n_j}(x_j),$$

所以得到

$$\exp(\varphi_{a_m+n_m}(z(x))) \geqslant \exp(-m(c_0+K))\exp(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{n_j}(x_j)).$$

由定义10,

$$N_d(f,\Phi,\varepsilon,a_m+n_m) \geqslant \exp(-m(c_0+K))\prod_{j=1}^{m}N_d(f,\Phi,3\varepsilon,n_j). \tag{3}$$

因为 $a_m+n_m=(m-1)M_\varepsilon+\sum_{j=1}^{m}n_j$,由(1)得到

$$N_d(f,\Phi,\varepsilon,a_m+n_m) \leqslant K_\varepsilon^m N_d(f,\Phi,\varepsilon,\sum_{j=1}^{m}n_j)N_d(f,\Phi,\varepsilon,M_\varepsilon)^{m-1}.$$

由引理1和(3)式得到

$$N_d(f,\Phi,\varepsilon,\sum_{j=1}^{m}n_j) \geqslant K_\varepsilon^{-m}N_d(f,\Phi,\varepsilon,M_\varepsilon)^{1-m}N_d(f,\Phi,\varepsilon,a_m+n_m) \geqslant$$

$$K_\varepsilon^{-m}N_d(f,\Phi,\varepsilon,M_\varepsilon)^{1-m}\mathrm{e}^{-m(c_0+K)}\prod_{j=1}^{m}N_d(f,\Phi,3\varepsilon,n_j) \geqslant \prod_{j=1}^{m}(\frac{\mathrm{e}^{-(c_0+K)}}{C_{\varepsilon,3\varepsilon}K_\varepsilon N_d(f,\Phi,\varepsilon,M_\varepsilon)}N_d(f,\Phi,\varepsilon,n_j)),$$

这里取

$$k_\varepsilon=\frac{\mathrm{e}^{-(c_0+K)}}{C_{\varepsilon,3\varepsilon}K_\varepsilon N_d(f,\Phi,\varepsilon,M_\varepsilon)},$$

得到

$$N_d(f,\Phi,\varepsilon,\sum_{j=1}^{n}n_j) \geqslant \prod_{j=1}^{m}(k_\varepsilon N_d(f,\Phi,\varepsilon,n_j)).$$

**引理3** 设$(X,d)$是紧致度量空间,$f:X\to X$是可扩同胚且具有specification性质,可扩常数为$\delta_0$,$\Phi=\{\varphi_n\}$是几乎可加的且具有有界变差的连续函数序列,若$\varepsilon\in(0,\delta_2)$,$\delta_2=\min\{\delta_0/3,\varepsilon_0\}$,这里$\varepsilon_0$满足定义13,$n\in\mathbf{N}$,$k_\varepsilon$,$K_\varepsilon$如引理2中所定义,则

$$\frac{1}{K_\varepsilon}\mathrm{e}^{nP(\Phi)} \leqslant N_d(f,\Phi,\varepsilon,n) \leqslant \frac{1}{k_\varepsilon}\mathrm{e}^{nP(\Phi)}.$$

**证明** 由定义11,定义12及注3,

$$P(\Phi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_d(f,\Phi,\varepsilon,n).$$

由引理2得到

$$\frac{\log k_\varepsilon N_d(f,\Phi,\varepsilon,n)}{n} \leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{\log N_d(f,\Phi,\varepsilon,kn)}{kn}=P(\Phi) \leqslant \frac{\log K_\varepsilon N_d(f,\Phi,\varepsilon,n)}{n}.$$

由右边不等式得:

$$N_d(f,\Phi,\varepsilon,n) \geqslant \frac{1}{K_\varepsilon}\mathrm{e}^{nP(\Phi)}.$$

同理,由左边不等式得:

$$N_d(f,\Phi,\varepsilon,n) \leqslant \frac{1}{k_\varepsilon}\mathrm{e}^{nP(\Phi)}.$$

记

$$P_Y(f,\Phi,n)=\sum_{x\in Fix(f^n)\cap Y}\mathrm{e}^{\varphi_n(x)}, \ Y\subset X. \tag{4}$$

**引理4** 设$(X,d)$是紧致度量空间,$f:X\to X$是可扩同胚且具有specification性质,可扩常数为$\delta_0$,$\Phi=\{\varphi_n\}$是一个几乎可加的连续函数序列且满足有界变差的条件,则存在$c_1,c_2>0$,使得对于充分大的$n\in\mathbf{N}$,有

$$c_1\mathrm{e}^{nP(\Phi)} \leqslant P_X(f,\Phi,n) \leqslant c_2\mathrm{e}^{nP(\Phi)}.$$

**证明** 因为$Fix(f^n)$是$(n,\delta_0)$-分离集,由(4)式得到

$$P_X(f,\Phi,n)=\sum_{x\in Fix(f^n)}\mathrm{e}^{\varphi_n(x)} \leqslant N_d(f,\Phi,\delta_0,n) \leqslant \frac{1}{k_{\delta_0}}\mathrm{e}^{nP(\Phi)}.$$

取 $c_2 = 1/k_{\delta_0}$，就得到所要证的右边的不等式.

另一方面，对于 $n \geqslant M_\varepsilon$，$E$ 是$(n - M_\varepsilon, 3\varepsilon)$ −分离集，定义映射 $z: E \to Fix(f^n)$，对于 $x \in E$，存在 $z = z(x) \in Fix(f^n)$ 且 $d^f_{n-M_\varepsilon}(x, z) \leqslant \varepsilon$. $z(\cdot)$ 是单射且

$$\varphi_n(z) - \varphi_{n-M_\varepsilon}(x) \geqslant \varphi_{n-M_\varepsilon}(z) + \varphi_{M_\varepsilon}(f^{n-M_\varepsilon}(z)) - c - \varphi_{n-M_\varepsilon}(x) \geqslant -K - M_\varepsilon \|\varphi_1\|_\infty - M_\varepsilon c,$$

所以有

$$\varphi_n(z) \geqslant \varphi_{n-M_\varepsilon}(x) - M_\varepsilon(\|\varphi_1\|_\infty + c) - K.$$

由引理 3 得到

$$P_X(f, \Phi, n) = \sum_{z(x) \in Fix(f^n)} \exp(\varphi_n(z)) \geqslant \exp(-K - M_\varepsilon(\|\varphi_1\|_\infty + c)) N_d(f, \Phi, 3\varepsilon, n - M_\varepsilon) \geqslant$$
$$\frac{\exp(-K - M_\varepsilon(\|\varphi_1\|_\infty + c))}{K_{3\varepsilon}\exp(M_\varepsilon P(\Phi))}\exp(nP(\Phi)),$$

取

$$c_1 = \frac{\exp(-K - M_\varepsilon(\|\varphi_1\|_\infty + c))}{K_{3\varepsilon}\exp(M_\varepsilon P(\Phi))},$$

该引理得证.

我们定义测度 $\mu$ 如下:

序列 $\mu_n = \dfrac{1}{P_X(f, \Phi, n)} \sum\limits_{x \in Fix(f^n)} e^{\varphi_n(x)} \delta_x$.

由 $M(X)$ 的紧致性，存在极限点

$$\mu = \lim_{k \to \infty} \mu_{n_k} \in M(X, f), \tag{5}$$

且

$$\mu_n(Y) = P_Y(f, \Phi, n)/P_X(f, \Phi, n). \tag{6}$$

下面给出关于几乎可加函数序列的 Gibbs 测度的存在性.

**定理 4**　设$(X, d)$ 是紧致度量空间，$f: X \to X$ 是具有 specification 性质的可扩同胚，可扩常数为 $\delta_0$，若测度 $\mu$ 如(5) 式定义，$\Phi = \{\varphi_n\}$ 是几乎可加的且满足有界变差条件的连续函数序列，$\varepsilon \in (0, \delta_2)$，这里 $\delta_2 = \min\{\delta_0/3, \varepsilon_0\}$，$\varepsilon_0$ 满足定义 13，则存在 $A_\varepsilon, B_\varepsilon > 0$，对于 $y \in X$，$n \in \mathbf{N}$，使得测度 $\mu$ 满足:

$$A_\varepsilon \leqslant \frac{\mu(B_n(y, \varepsilon))}{\exp(-nP(\Phi) + \varphi_n(y))} \leqslant B_\varepsilon.$$

**证明**　取 $r \geqslant n + 2M_\varepsilon$ 且 $m = r - n - 2M_\varepsilon$，设 $E_m$ 是一个极大$(m, 3\varepsilon)$ −分离集，对于 $x \in E_m$，由 specification 性质，存在 $z(x) \in Fix(f^r) \cap B_n(y, \varepsilon)$ 且 $d^f_m(f^{n+M_\varepsilon}(z(x)), x) < \varepsilon$，$z(\cdot)$ 是单射，从而有

$$\varphi_r(z(x)) - \varphi_n(y) - \varphi_m(x) \geqslant \varphi_{n+M_\varepsilon}(z) + \varphi_{m+M_\varepsilon}(f^{n+M_\varepsilon}(z)) - c - \varphi_n(y) - \varphi_m(x) \geqslant$$
$$\varphi_n(z) + \varphi_m(f^{n+M_\varepsilon}(z)) + \varphi_{M_\varepsilon}(f^n(z)) + \varphi_{M_\varepsilon}(f^{n+M_\varepsilon+m}(z)) - 3c - \varphi_n(y) - \varphi_m(x) \geqslant$$
$$-2K - 2M_\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty - 2(M_\varepsilon - 1)c - 3c = -2K - 2M_\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty - 2(M_\varepsilon + 1)c.$$

所以由(6) 式，

$$\mu_r(B_n(y, \varepsilon)) = \frac{P_{B_n}(y, \varepsilon)(f, \Phi, r)}{P_X(f, \Phi, r)} = \frac{1}{P_X(f, \Phi, r)} \sum_{x \in Fix(f^r) \cap B_n(y, \varepsilon)} e^{\varphi_r(z)} \geqslant$$
$$\frac{1}{P_X(f, \Phi, r)} e^{\varphi_n(y) - 2M_\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty - 2(M_\varepsilon + 1)c - 2K} \sum_{x \in E_m} e^{\varphi_m(x)}.$$

因为

$$N_d(f, \Phi, 3\varepsilon, m) = \sup\{\sum_{x \in E_m} e^{\varphi_m(x)} \mid E_m \text{ 是}(m, 3\varepsilon) - \text{分离集}\}.$$

由引理 3 和引理 4,

$$\mu_r(B_n(y, \varepsilon)) \geqslant \frac{\exp(-2(M_\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty + (M_\varepsilon + 1)c + K))}{P_X(f, \Phi, r)} N_d(f, \Phi, 3\varepsilon, m) e^{\varphi_n(y)} >$$
$$\frac{1}{c_2}\exp(-rP(\Phi))\exp(-2(M_\varepsilon\|\varphi_1\|_\infty + (M_\varepsilon + 1)c + K)) \cdot \frac{1}{K_{3\varepsilon}}\exp(mP(\Phi))\exp(\varphi_n(y)) \geqslant$$

$$A_\varepsilon \exp(\varphi_n(y) - nP(\Phi)).$$

而 $A_\varepsilon = \exp(-2(M_\varepsilon \|\varphi_1\|_\infty + (M_\varepsilon + 1)c + K))/c_2 K_{3\varepsilon}$.

设 $n_k = r \geqslant n + 2M_\varepsilon$ 且当 $k \to \infty$ 时可得到下界.

下面估计上界:

对于 $x \in Fix(f^r) \cap B_n(y,\varepsilon)$,有

$$\varphi_r(x) - \varphi_n(y) - \varphi_{r-n}(f^n(x)) \leqslant \varphi_n(x) + \varphi_{r-n}(f^n(x)) + c - \varphi_n(y) - \varphi_{r-n}(f^n(x)) \leqslant K + c,$$

而 $f^n(Fix(f^r) \cap B_n(y,\varepsilon))$ 是 $(r-n,\delta_0)$ - 分离集,$\varepsilon < \delta_0$,所以由引理3和引理4,

$$\mu_r(B_n(y,\varepsilon)) = \frac{P_{B_n(y,\varepsilon)}(f,\Phi,r)}{P_X(f,\Phi,r)} = \frac{1}{P_X(f,\Phi,r)} \sum_{x \in Fix(f^r) \cap B_n(y,\varepsilon)} e^{\varphi_r(x)} \leqslant$$

$$\frac{1}{P_X(f,\Phi,r)} \sum_{x \in Fix(f^r) \cap B_n(y,\varepsilon)} e^{\varphi_n(y) + \varphi_{r-n}(f^n(x)) + K + c} \leqslant \frac{e^{K+c}}{c_1} e^{-rP(\Phi)} e^{\varphi_n(y)} N_d(f,\Phi,\delta_0,r-n) \leqslant$$

$$\frac{e^{K+c}}{c_1 k_{\delta_0}} e^{\varphi_n(y) - rP(\Phi) + (r-n)P(\Phi)} = \frac{e^{K+c}}{c_1 k_{\delta_0}} e^{\varphi_n(y) - nP(\Phi)}.$$

取

$$B_\varepsilon = e^{K+c}/c_1 k_{\delta_0},$$

得到

$$A_\varepsilon \leqslant \frac{\mu(B_n(y,\varepsilon))}{\exp(-nP(\Phi) + \varphi_n(y))} \leqslant B_\varepsilon.$$

定理得证.

## [参考文献]

[1] Barrieira L. Nonadditive thermodynamic formalism: equlibrium and Gibbs measures [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2006, 16(2): 279-305.

[2] Mummert A. The thermodynamic formalism for almost-additive sequences [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2006, 16(2): 435-454.

[3] Bowen R. Equlibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms [M]. New York: Springer-Verlag, 1975.

[4] Falconer K J. A subadditive thermodynamic formalism for mixing repellers [J]. J Phys A, 1988, 21: L737-L742.

[5] Haydn N T A, Ruelle D. Equivalence of Gibbs and equlibrium states for homeomorphisms satisfying expansiveness and specification [J]. Commun Math Phys, 1992, 148: 155-167.

[6] 张筑生. 微分动力系统原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[7] Walters P. An Introduction to Ergodic Theory [M]. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1981.

[8] Katok A, Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theroy of Dynamical Systems [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[9] Takens F, Verbitskiy E. Multifractal analysis of local entropies for expansive homeomorphisms with specification [J]. Commun Math Phys, 1999, 203: 593-612.

[责任编辑: 丁　蓉]