一类 p-Laplacian 椭圆型方程边值问题的解

陈　莉,袁俊丽

(南通大学理学院,江苏 南通 226007)

[摘要]　本文研究了一类 p-Laplacian 椭圆型方程 $-\Delta_p u = a(x)h(u) - b(x)f(u)$ 齐次边值问题和奇性边值问题解的存在性,其中 $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$,$p>1$,$h(u)/u^{p-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 非增,$f(u)/u^{p-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 非减.

[关键词]　p-Laplacian 方程,边界爆破,存在性

[中图分类号]　O175.26　[文献标志码]　A　[文章编号]　1001-4616(2012)03-0031-06

Solutions for a Class of p-Laplacian Elliptic Boundary Value Problem

Chen Li,Yuan Junli

(School of Science, Nantong University, Nantong 226007, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of solutions for a class of p-Laplacian elliptic homogenous and singular boundary value problem $-\Delta_p u = a(x)h(u) - b(x)f(u)$, where $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p>1$, $h(u)/u^{p-1}$ is nonincreasing in $(0,+\infty)$, $f(u)/u^{p-1}$ is nondecreasing in $(0,+\infty)$.

Key words: p-Laplacian equations, boundary blow-up, existence

本文我们考虑如下拟线性椭圆型方程齐次边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(x)h(u) - b(x)f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

和与之对应的边界爆破问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(x)h(u) - b(x)f(u), & x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u = \infty, & x \in \partial\Omega_0 \end{cases} \tag{2}$$

解的存在性,其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^N(N \geqslant 2)$ 具有光滑边界,$\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$,$p>1$. 整篇文章中,我们假设 $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ 非负,$h \in C([0,\infty))$ 是非负非减函数,$h(0)=0$,$f \in C^1([0,\infty))$,$f(0)=0$,$u>0$ 时 $f(u)>0$,$b(x) \in C^\mu(\overline{\Omega})$,$0<\mu<1$,$b(x) \geqslant 0$ 且 $b(x) \not\equiv 0$,$x \in \Omega$. 设

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega: b(x) = 0\},$$

假设 $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ 且 $b(x)>0$,$x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_0$.

我们称 u 是(1)的一个非负解,如果 $u \in C^1(\Omega)$ 在分布的意义下满足方程(1),其中 $u \geqslant 0$,$x \in \Omega$. 在(2)中,$u=\infty$,$x \in \partial\Omega_0$ 是指当 $d(x,\partial\Omega_0) \to 0$,$x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_0$ 时,$u(x) \to \infty$. 此时的解称为(2)的一个大解(爆破解). 以下,我们总假定 $d(x) = d(x,\partial\Omega_0)$.

许多作者研究过如下问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(x)u^m - b(x)f(u), & x \in \Omega, \\ u = \infty, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

当 $p=2$,$m=1$ 时解的存在性、解在边界附近的渐近性和惟一性[1-4]. 当 $p \neq 2$ 时,与(3)有关的解的存在

收稿日期: 2011-12-20.

基金项目: 国家自然科学基金(11071049)、南通市应用研究项目(K2010042).

通讯联系人: 陈　莉,讲师,研究方向: 偏微分方程. E-mail: sandc2001@ntu.edu.cn

性、惟一性及正解在边界附近的爆破率已经由 Diaz 和 Letelier[15]、Matero[16]、Mohammed[17] 等人研究. 在文[18]中,Du 和 Guo 讨论了下述问题的正解:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = au^{p-1} - b(x)u^q, & x \in \Omega\setminus\overline{\Omega}_0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u = \infty, & x \in \partial\Omega_0, \end{cases}$$

其中 $q > p-1$,a 是一个常数,$b(x) > 0$,$x \in \overline{\Omega}\setminus\overline{\Omega}_0$,$\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$.

本文将把上述方程推广到更一般的情形. 为此,得到如下的存在性结论.

定理1　设对某个适当的正的常数 k,$\sup_{\Omega} a(x) < ka_0$,$f$ 满足

(F_1) 函数 $s \mapsto s^{-(p-1)}f(s)$ 在 $(0,\infty)$ 上递增,

(F_2) $\int_1^{\infty} F^{-1/p}(t)\mathrm{d}t < \infty$,其中 $F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$,

h 满足 (H_1) $h(s)/s^{p-1}$ 在 $(0,\infty)$ 上非增. 则边值问题(1)有惟一非负解. 其中 $a_0 := \lambda_1(\Omega_0)$ 是如下 Dirichlet 问题的主特征值,

$$-\Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u, x \in \Omega_0;\ u = 0, x \in \partial\Omega_0.$$

定理2　若 h 和 f 满足定理1的条件,则问题(2)有一个最大正解和一个最小正解.

1　比较原理

在这里证明一类拟线性方程的比较原理,它对处理边界爆破问题非常有用.

命题1(比较原理)　假设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界区域,$\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是 D 中的连续函数,$\alpha(x) \geqslant 0$,$\|\alpha\|_{L^\infty(D)} < \infty$ 且 $\beta(x) \geqslant 0$,$\beta(x) \not\equiv 0$,$x \in D$. 设 $u_1, u_2 \in C^1(D)$ 在 D 中是正的,且在分布的意义下满足

$$-\Delta_p u_1 - \alpha(x)h(u_1) + \beta(x)g(u_1) \geqslant 0 \geqslant -\Delta_p u_2 - \alpha(x)h(u_2) + \beta(x)g(u_2) \tag{4}$$

及

$$\limsup_{d(x,\partial D)\to 0}(u_2 - u_1) \leqslant 0, \tag{5}$$

其中非负函数 $h \in C^0([0,\infty))$,$g \in C^0([0,\infty))$. 如果进一步假设 $s \in (\inf_D\{u_1,u_2\}, \sup_D\{u_1,u_2\})$ 时,有 $h(s)/s^{p-1}$ 非增,$g(s)/s^{p-1}$ 递增,则 $u_1 \geqslant u_2$,$x \in D$.

证明　证明方法类似于文[18],因此我们仅给出简略证明. 设 φ_1, φ_2 是定义在 $C_0^\infty(D)$ 上的两个非负函数. 将(4)分项积分可得

$$\int_D [|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla\varphi_2 - |\nabla u_1|^{p-1}\nabla u_1 \cdot \nabla\varphi_1]\mathrm{d}x + \int_D \beta(x)[g(u_2)\varphi_2 - g(u_1)\varphi_1]\mathrm{d}x \leqslant \int_D \alpha(x)[h(u_2)\varphi_2 - h(u_1)\varphi_1]\mathrm{d}x. \tag{6}$$

对任意的 $0 < \varepsilon < 1$,记 $\varepsilon_1 = \varepsilon$,$\varepsilon_2 = \varepsilon/2$,设

$$v_i = \frac{[(u_2+\varepsilon_2)^p - (u_1+\varepsilon_1)^p]_+}{(u_i+\varepsilon_i)^{p-1}}, \quad i = 1,2,$$

其中 $u_+ := \max\{u, 0\}$. 因此,对 $D_\varepsilon \subset\subset D$,$v_i$ 可以在 $W^{1,p}(D_\varepsilon)$ 中被 $C_0^\infty(D_\varepsilon)$ 函数任意逼近. 从而用 v_i,$i = 1,2$ 代替 φ_i,(6)式仍然成立.

记

$$D(\varepsilon) := \{x \in D: u_2(x) + \varepsilon_2 > u_1(x) + \varepsilon_1\},$$

注意到(6)$(\varphi_i = v_i)$中的被积函数在 $D(\varepsilon)$ 的外部为0,故

$$\int_{D(\varepsilon)} [|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \nabla v_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \cdot \nabla v_1]\mathrm{d}x + \int_{D(\varepsilon)} \beta(x)\left(\frac{g(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^{p-1}} - \frac{g(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^{p-1}}\right)[(u_2+\varepsilon_2)^p - (u_1+\varepsilon_1)^p]\mathrm{d}x \leqslant \int_{D(\varepsilon)} \alpha(x)\left(\frac{h(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^{p-1}} - \frac{h(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^{p-1}}\right)[(u_2+\varepsilon_2)^p - (u_1+\varepsilon_1)^p]\mathrm{d}x. \tag{7}$$

同文[8]，我们有

$$|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\cdot\nabla v_2-|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\cdot\nabla v_1\geqslant c(p)(w_1^p+w_2^p)\frac{|V_1-V_2|^{p+(2-p)_+}}{(|V_1|+|V_2|)^{(2-p)_+}},\quad\forall p>1,$$

其中

$$w_i=u_i+\varepsilon_i,V_i=\nabla\log w_i=\frac{\nabla u_i}{u_i+\varepsilon_i},i=1,2,$$

及

$$c(p)=\begin{cases}1/(2^{p-1}-1), & 1<p<2,\\3p(p-1)/16, & p\geqslant 2.\end{cases}$$

因此，(7) 式即为

$$c(p)\int_{D(\varepsilon)}(w_1^p+w_2^p)\frac{|V_1-V_2|^{p+(2-p)_+}}{(|V_1|+|V_2|)^{(2-p)_+}}\mathrm{d}x+$$
$$\int_{D(\varepsilon)}\beta(x)\left[\frac{g(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^{p-1}}-\frac{g(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^{p-1}}\right](w_2^p-w_1^p)\,\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_{D(\varepsilon)}\alpha(x)\left[\frac{h(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^{p-1}}-\frac{h(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^{p-1}}\right](w_2^p-w_1^p)\,\mathrm{d}x=:J_\varepsilon.\tag{8}$$

同样，(8) 式左边的两项是非负的. 所以，对一切 $\varepsilon>0$，$J_\varepsilon\geqslant 0$.

我们断言 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon=0$. 事实上，对于任意给定的 $\delta>0$，设 $D_\delta(\varepsilon)=D(\varepsilon)\cap\{u_2\leqslant\delta\}$，由于 $\alpha(x)\geqslant 0$，$u_i\geqslant 0$，$i=1,2$，故我们有

$$\int_{D_\delta(\varepsilon)}\alpha(x)\left[\frac{h(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^{p-1}}-\frac{h(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^{p-1}}\right](w_2^p-w_1^p)\,\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_{D_\delta(\varepsilon)}\alpha(x)(h(u_1)w_1+h(u_2)w_2)\,\mathrm{d}x\leqslant 2\|\alpha\|_{L^\infty}|D(\varepsilon)|(\delta+\varepsilon)h(\delta),\forall\varepsilon\in(0,1].\tag{9}$$

我们断言对任意的 $x\in D(\varepsilon)\setminus D_\delta(\varepsilon)$，存在 $\delta_2>0$，使得 $u_1(x)>\delta_2$. 否则，可以取 $\varepsilon_n\in(0,1]$ 及 $x_n\in D(\varepsilon)\setminus D_\delta(\varepsilon_n)$，使得 $u_1(x_n)\to 0$，因此 $d(x_n,\partial D)\to 0$. 结合(5) 式，有 $u_2(x_n)\to 0$. 另一方面，$x_n\in D(\varepsilon)\setminus D_\delta(\varepsilon_n)$，故 $u_2(x_n)>\delta$. 因为 δ 是一个与 ε_n 无关的固定的常数，从而推出矛盾.

因为 $h(u)/u^{p-1}$ 非增，且在 $D(\varepsilon)\setminus D_\delta(\varepsilon)$ 中，$u_2>u_1>\delta_2$，易得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in D(\varepsilon)\setminus D_\delta(\varepsilon)}\left(\frac{h(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^{p-1}}-\frac{h(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^{p-1}}\right)=$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in D(\varepsilon)\setminus D_\delta(\varepsilon)}\left(\frac{h(u_2)/u_2^{p-1}}{(1+\varepsilon_2/u_2)^{p-1}}-\frac{h(u_1)/u_1^{p-1}}{(1+\varepsilon_1/u_1)^{p-1}}\right)\leqslant 0.$$

所以，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D(\varepsilon)\setminus D_\delta(\varepsilon)}\alpha(x)\left(\frac{h(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^{p-1}}-\frac{h(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^{p-1}}\right)(w_2^p-w_1^p)\,\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

由于对一切 $\varepsilon\in(0,1]$，$J_\varepsilon\geqslant 0$，根据(9) 式及上述不等式，我们有

$$0\leqslant\liminf_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon\leqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{D(\varepsilon)}\alpha(x)\left(\frac{h(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^{p-1}}-\frac{h(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^{p-1}}\right)(w_2^p-w_1^p)\,\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\delta(\varepsilon)}\alpha(x)\left(\frac{h(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^{p-1}}-\frac{h(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^{p-1}}\right)(w_2^p-w_1^p)\,\mathrm{d}x\leqslant 2\|\alpha\|_{L^\infty}|D|h(\delta)\delta,$$

因此，由 $\delta>0$ 的任意性及 $h\in C^0([0,\infty))$ 可得 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon=0$.

最后，用 $J_\varepsilon\to 0$ 来证明 $D(0)=\varnothing$. 假设 $D(0)\neq\varnothing$，由 u_1,u_2 的连续性知 $D(0)$ 是一个开集. 设 $B\subset D(0)$ 是任意小的闭球，对任意小的 ε，$B\subset D(\varepsilon)$，由前面对(8) 式的讨论可知

$$c(p)(w_1^p+w_2^p)\frac{|V_1-V_2|^{p+(2-p)_+}}{(|V_1|+|V_2|)^{(2-p)_+}}\geqslant 0,$$
$$\frac{g(u_2)}{(u_2+\varepsilon_2)^{p-1}}-\frac{g(u_1)}{(u_1+\varepsilon_1)^{p-1}}>0.$$

由 $\lim J_\varepsilon \geqslant 0$,$\beta(x) \geqslant 0$,得

$$\int_B \frac{|\nabla \log u_1 - \nabla \log u_2|^{p+(2-p)_+}}{(|\nabla \log u_1| + |\nabla \log u_2|)^{(2-p)_+}}(u_2^p + u_1^p)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_B \beta(x)\left(\frac{g(u_2)}{u_2^{p-1}} - \frac{g(u_1)}{u_1^{p-1}}\right)(u_2^p - u_1^p)\,\mathrm{d}x = 0.$$

由于 $g(u)/u^{p-1}$ 单调递增,且在 B 中,$u_2 > u_1$,故 $\beta(x) \equiv 0$,$|\nabla \log u_1 - \nabla \log u_2| \equiv 0$,$\forall x \in D(0)$,因为在 D 中 $\beta(x) \not\equiv 0$,故 $D(0) \neq D$,因此 $D(0) \subseteq D$ 且 $\partial D(0) \cap D \neq \varnothing$,所以开集 $D(0)$ 具有连通分支 E 且 $\partial E \cap D \neq \varnothing$. 由 $\nabla(\log u_1 - \log u_2) \equiv 0$ 知 $\log u_1 - \log u_2 \equiv C$,所以 $u_2 = ku_1$,k 为常数且 $k > 0$. 另一方面,因为 $u_1|_{\partial E\cap D} = u_2|_{\partial E \cap D} > 0$,所以 $k = 1$. 说明在 E 中 $u_1 = u_2$,这与 $E \subset D(0)$ 矛盾. 从而 $D(0) = \varnothing$,即 $u_1 \geqslant u_2$. 从而命题 1 得证.

由命题 1 我们易得下面的推论.

推论 1　设 $\overline{D}_0 \subset\subset D$,$D$、$g$、$h$ 同命题 1,设 $\alpha(x)$,$\beta(x)$ 是定义在 $\overline{D}\backslash D_0$ 上的连续函数,$\|\alpha(x)\|_{D\backslash D_0} < \infty$,$\beta(x) > 0$,$x \in D\backslash\overline{D}_0$. 设 $u_1, u_2 \in C^1(\overline{D}\backslash\overline{D}_0)$ 在 $D\backslash\overline{D}_0$ 上都是正的,且在 $D\backslash\overline{D}_0$ 上,在分布的意义下满足(4). 假设

$$u_1 \geqslant u_2, x \in \partial D, \limsup_{d(x,\partial D_0)\to 0}(u_2 - u_1) \leqslant 0,$$

则在 $\overline{D}\backslash D_0$ 上,$u_1 \geqslant u_2$.

2　定理 1 及定理 2 的证明

在这部分,用上下解方法证明定理 1 和定理 2. 证明的思路来自于文[8]. 但由于问题的复杂性,本文运用了更多的技巧.

引理 1　设(F_1),(F_2) 和(H_1) 成立,则对任意常数 $a \leqslant ka_0$,其中 k 是某个适当的正常数,问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = ah(u) - b(x)f(u), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

有惟一非负解 $u \in C^1(\Omega)$.

证明　由命题 1,问题(10) 至多只有一个正解. 取定 $\delta > 0$,定义

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \overline{\Omega}_0) < \delta\}.$$

取 $\delta > 0$ 充分小,使得 $a < k\lambda_\delta < ka_0$,其中 λ_δ 是如下 Dirichlet 问题:

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u, x \in \Omega_\delta; u = 0, x \in \partial\Omega_\delta$$

的主特征值. 这样的 δ 总是存在的,这是因为当 $\delta \to 0$ 时,$\lambda_\delta \nearrow a_0$(见文[8]). 设 $\varphi_\delta > 0$ 是 λ_δ 相应的特征函数,由文[9],存在 $0 < \mu < 1$,$\varphi_\delta \in C^{1+\mu}(\overline{\Omega}_\delta)$. 显然,在$\overline{\Omega}_{\delta/2}$ 上,$\varphi_\delta > 0$. 定义 $U \in C^1(\overline{\Omega})$,使得当 $x \in \overline{\Omega}$ 时,$U(x) > 0$;当 $x \in \Omega_{\delta/2}$ 时,$U = \varphi_\delta$. 设 $\bar{u} = CU$,则对一切 $C > 1$,由 $h(s)/s^{p-1}$ 的单调性得

$$\frac{h(\bar{u})}{\bar{u}^{p-1}} \leqslant \frac{h(\varphi_{\min})}{\varphi_{\min}^{p-1}} := 1/k, x \in \overline{\Omega}_{\delta/2}, \tag{11}$$

其中 $\varphi_{\min} = \min_{\overline{\Omega}_{\delta/2}}\varphi_\delta$. 又 $a < k\lambda_\delta$,所以

$$-\Delta_p \bar{u} = \lambda_\delta \bar{u}^{p-1} \geqslant k\lambda_\delta h(\bar{u}) > ah(\bar{u}) - b(x)f(\bar{u}), x \in \overline{\Omega}_{\delta/2}. \tag{12}$$

而且,对 $b(x)$ 的假设表明 $b(x) \geqslant b_0 > 0$,$x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_{\delta/2}$,其中 b_0 是依赖于 δ 的一个常数. 由 $a \geqslant 0$,(H_1) 及(F_1),我们有 $a\dfrac{h(CU)}{(CU)^{p-1}} - b(x)\dfrac{f(CU)}{(CU)^{p-1}}$ 关于 C 递减. 又由(F_1) -(F_2),显然 $\lim\limits_{u\to\infty} h(u)/u^{p-1} < \infty$ 且 $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)/u^{p-1} = \infty$. 因为 $U \in C^1(\overline{\Omega})$,其中 $U > 0$,$x \in \Omega$,所以存在常数 $C > 0$ 充分大,使得

$$-\Delta_p U > \left(a\frac{h(CU)}{(CU)^{p-1}} - b(x)\frac{f(CU)}{(CU)^{p-1}}\right)U^{p-1},$$

即

$$-\Delta_p \bar{u} > ah(\bar{u}) - b(x)f(\bar{u}), x \in \Omega\backslash\Omega_{\delta/2}, \bar{u} = CU(x) > 0, x \in \partial\Omega. \tag{13}$$

根据(12) 及(13),我们知道 $\bar{u} = CU$ 是(10) 的一个严格上解,其中常数 $C > 0$ 充分大.

易知 $\underline{u}=0$ 是(10) 的一个下解. 文[20] 中的单调法则说明问题(10) 至少有一个解 u 满足 $0 \leqslant u(x) \leqslant \bar{u}(x)$，$x \in \Omega$.

注 1　由(11) 中定义的 k 可知，由于 $h(s)/s^{p-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调不增，因此 $k \leqslant 1/h(1)$. 若 $h(u)=u^{p-1}$，则 $k \equiv 1$. 另一方面，若 $\Omega_0=\varnothing$，则 $a_0=\infty$.

定理 1 的证明　设 $a^*=\sup_{\Omega} a(x)$，则 $a^*<ka_0$. 因此由引理 1，问题

$$\begin{cases} -\Delta_p w = a^* h(w) - b(x) f(w), & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

有惟一非负解 w. 显然 $\bar{u}=w$ 和 $\underline{u}=0$ 分别是(1) 的一个上解和一个下解. 余下的证明同引理 1 的证明.

引理 2　设(F_1)，(F_2) 和(H_1) 成立，对任意正的常数 c，问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(x) h(u) - b(x) f(u), & x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u = c, & x \in \partial\Omega_0 \end{cases} \tag{14}$$

有惟一非负解 u，且当 $x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_0$ 时，$u(x)>0$.

证明　首先，惟一性由命题 1 可得. 接下来，我们用上下解方法证明存在性. 设 $a^*=\sup_{\Omega} a(x)$. 取非负函数 $b^*(x) \in C^{\mu}(\bar{\Omega})$，使得 $b^*(x) \leqslant b(x)$，$x \in \Omega \setminus \Omega_0$ 且 $\Omega_0^* \equiv \{x \in \bar{\Omega}: b^*(x)=0\}$. 由文[18]，如果 Ω_0^* 的体积充分小，我们有 $\lambda_1(\Omega_0^*)>a^*$. 由引理 1，问题

$$-\Delta_p u = a^* h(u) - b^* f(u), u|_{\partial\Omega}=0$$

存在非负解 u^*. 取常数 $C>1$，使得 $Cu^*>c$，$x \in \partial\Omega_0$，则 Cu^* 是(14) 的一个上解. 显然，$u \equiv 0$ 是(14) 的一个下解. 因此，我们得到(14) 的一个非负解 $u(x)$. 又由于 $C>0$，利用文[19] 中定理 2.2 可得 $u(x)>0$，$x \in \Omega \setminus \Omega_0$.

引理 3　设(F_1)，(F_2) 和(H_1) 成立，常数 $a \geqslant 0$，$b>0$，则问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = ah(u) - bf(u), & x \in \Omega, \\ u = \infty, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

有惟一正解.

证明　设

$$g(u) = -ah(u) + bf(u) = u^{p-1}[bf(u)/u^{p-1} - ah(u)/u^{p-1}].$$

显然，由(F_1)，(F_2) 和(H_1) 可知，$g(u)$ 关于 $u>0$ 单调递增，且满足 Keller-Osserman 条件，由文[6] 直接得到结论.

定理 2 的证明　设 u_c 是(14) 的惟一正解，其中 $c>0$. 由推论 1，$c \to u_c(x)$ 递增. 如果能证明，对 $\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_0$ 的任意给定的紧子集 K，能找到常数 $M_K>0$ 使得 $u_c(x)<M_K$ 对一切 $c>0$，$x \in K$ 成立，那么由标准正规性和紧方法可以证明 $u_\infty(x)=\lim\limits_{c\to\infty} u_c(x)$ 是(2) 的一个解.

给定任意的 $x_0 \in K$，我们可以找到一个以 x_0 为球心、r 为半径的小球 B_r，使得 $\bar{B}_r \cap \bar{\Omega} \subset \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_0$. 设 $b_0=\min\limits_{B_r \cap \Omega} b(x)$，则 $b_0>0$. 由引理 3，问题

$$-\Delta_p u = a^* h(u) - b_0 f(u), x \in B_r, u|_{\partial B_r}=\infty$$

有惟一正解 u_0. 因为 $b_0<b(x)$，$x \in B_r \cap \Omega$，在 $B_r \cap \Omega$ 上应用命题 1 可证得 $u_c<u_0$，$x \in B_r \cap \Omega$. 特别地，$u_c \leqslant M_{x_0}:=\max\limits_{B_{r/2}} u_0(x)$，$x \in B_{r/2} \cap \bar{\Omega}$. 因为紧集 K 可以被有限多个这样的小球 $B_{r/2}$ 覆盖，我们可以找到 $M_K>0$ 使得 $u_c \leqslant M_K$ 对一切 $c>0$，$x \in K$ 成立. 所以，$u_\infty(x)=\lim\limits_{c\to\infty} u_c(x)$ 是(2) 的一个解. 由推论 1，(2) 的任何解 u 满足 $u \geqslant u_c$，$c>0$. 因此 $\lim\limits_{c\to\infty} u_c \leqslant u$，$\underline{U}:=u_\infty$ 是(2) 的最小正解.

为了证明(2) 的最大解的存在性，我们考虑问题

$$-\Delta_p u = ah(u) - b(x) f(u), x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_n, u|_{\partial\Omega_n}=\infty, u|_{\partial\Omega}=0,$$

其中 $\Omega_n \equiv \{x \in \Omega: d(x,\Omega_0)<1/n\}$.

类似的，我们可以更为简单地(因为 $b(x)>0$，$x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_n$) 证得这个问题有最小正解 u_n. 根据推论 1，对(2) 的任何正解 u，$u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant u$，$x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_n$. 因此，$\bar{U}(x):=\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) \geqslant u(x)$. 但易知 $\bar{U}$ 是(2) 的一个正解，所以是最大正解. 得证.

[参考文献]

[1] Bandle C, Marcus M. 'Large' solutions of semilinear elliptic equations: Existence, uniqueness, and asymptotic behaviour [J]. J Anal Math, 1992, 58: 9-24.

[2] Cano-Casanova S, López-Gómez J. Existence, uniqueness and blow-up rate of large solutions for a canonical class of one-dimensional problems on the half-line [J]. J Differential Equations, 2008, 244: 3 180-3 203.

[3] Chen Y J, Wang M X. Uniqueness results and asymptotic behavior for logistic-type porous media equations [J]. Z Angew Math Phys, 2010, 61: 277-292.

[4] Cîrstea F C, Du Y H. General uniqueness results and variation speed for blow-up solutions of elliptic equations [J]. Proc London Math Soc, 2005, 91(2): 459-482.

[5] Cîrstea F C, Rădulescu V. Uniqueness of the blow-up boundary solution of logistic equation with absorption [J]. C R Acad Sci Paris Ser I, 2002, 335: 447-452.

[6] Cîrstea F C, Rădulescu V. Boundary blow-up in nonlinear elliptic equations of Bieberach-Rademacher type [J]. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 3 275-3 286.

[7] Cîrstea F C, Rădulescu V. Nonlinear problems with boundary blow-up: a Karamata regular variation theory approach [J]. Asymptot Anal, 2006, 46: 275-298.

[8] Delgado M, López-Gómez J, Suárez A. Singular boundary value problems of a porous media logistic equation [J]. Hiroshima Math J, 2004, 34: 57-80.

[9] Du Y H, Guo Z M, Zhou F. Boundary blow-up solutions with interior layers and spikes in a bistable problem [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2007, 19(2): 271-298.

[10] García-Melián J. Uniqueness for boundary blow-up problems with continuous weights [J]. Proc Amer Math Soc, 2007, 135(9): 2 785-2 793.

[11] Guo Z, Webb J R L. Structure of boundary blow-up solutions of quasilinear elliptic problems. I: Large and small solutions [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2005, 135: 615-642.

[12] López-Gómez J. Optimal uniqueness theorems and exact blow-up rates of large solutions [J]. J Differential Equations, 2006, 224(2): 385-439.

[13] Ouyang T, Xie Z. The exact boundary blow-up rate of large solutions for semilinear elliptic problems [J]. Nonlinear Anal, 2008, 68: 2 791-2 800.

[14] Zhang Z J. Boundary behavior of solutions to some singular elliptic boundary value problems [J]. Nonlinear Anal TMA, 2008, 69: 2 293-2 302.

[15] Diaz G, Letelier R. Explosive solutions of quasilinear elliptic equations: Existence and uniqueness [J]. Nonlinear Anal, 1993, 20: 97-125.

[16] Matero J. Quasilinear elliptic euqtions with boundary blow-up [J]. J Analyse Math, 1996, 69: 229-246.

[17] Mohammed A. Boundary saymptotic and uniqueness of solutions to the p-Laplacian with infinite boundary values [J]. J Math Anal Appl, 2007, 325: 480-489.

[18] Du Y H, Guo Z M. Boundary blow-up solutions and their applications in quasilinear elliptic equations [J]. J D'Analyse Math, 2003, 89: 277-302.

[19] García-Melián J, Sabina de Lis J. Maximum and comparison principles for operators involving the p-Laplacian [J]. J Math Anal Appl, 1998, 218: 49-65.

[20] Cañada A, Drábek P, Gámez J L. Existence of positive solutions for some problems with nonlinear diffusion [J]. Trans Amer Math Soc, 1997, 349: 4 231-4 249.

[责任编辑:丁 蓉]