

# 周期受击简谐振子系统的经典动力学与准能谱统计

杨双波, 韦 栋

(南京师范大学物理科学与技术学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 研究一个周期受击简谐振子系统在非谐振情况下的经典动力学与准能谱统计. 研究发现, 随着打击强度  $\kappa$  的增加, 经典相空间结构从可积(环)到完全混沌时, 准能谱按最近邻能级间距分布仍保持 Poisson 分布不变, 这与周期受击转子系统的结果相同. 谱刚度的计算表明, 除了  $\kappa = 30$  的情况外,  $\kappa = 0.13, 1.6, 2.0, 2.6$  等的谱刚度在  $L < 0.1$  的范围内随  $L$  线性变化, 呈束状; 在  $L > 0.1$  以后发散开来, 呈非线性变化, 且  $\kappa = 0.13$  的谱刚度趋于饱和. 数方差  $\Sigma^2$  及高阶矩  $\gamma_1, \gamma_2$  随  $\kappa$  的变化不敏感.

[关键词] 混沌, 准能量, 最近邻间距分布, 谱刚度, 高阶矩

[中图分类号] 0413.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)03-0037-06

## Classical Dynamics and Quasi-Energy Spectral Statistics of a Periodically Kicked Harmonic Oscillator

Yang Shuangbo, Wei Dong

(School of Physics and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

**Abstract:** This paper studies the classical dynamics and quasienergy spectral statistics for a periodically kicked Harmonic oscillator system under the nonresonance condition. It is found that as we increase the kicking strength  $\kappa$ , and the phase space structure starts from tori for integrable system to completely chaotic for nonintegrable system, the nearest neighbor spacing distribution for the quasienergy spectral keeps the Poissonian distribution, and this is similar to that of the periodically kicked free rotor. The result of spectral rigidities shows that except the case of  $\kappa = 30$ , the rigidities for  $\kappa = 0.13, 1.6, 2.0, 2.6$ , bunched, increase linearly with  $L$  for  $L < 0.1$ , and spread, increase nonlinearly with  $L$ , and the rigidity for  $\kappa = 0.13$  tends to saturation for  $L > 0.1$ . The number variance  $\Sigma^2$ , skewness  $\gamma_1$ , excess  $\gamma_2$  are not sensitive to the change of  $\kappa$ .

**Key words:** chaos, quasienergy, nearest neighbor spacing distribution, spectral rigidity, higher moment

一个经典系统根据其相空间的结构可分为 3 种类型. 1. 可积系统: 规则运动, 相空间充满了环; 2. 混沌系统: 不规则运动, 混沌充满了相空间; 3. 混合系统: 相空间中规则与混沌运动共存. 量子混沌研究一个经典混沌系统的量子表现, 即本征值与本征函数如何表现的问题, 非本征态如何随时间  $t$  演化的问题, 定态波函数的形态特征等问题. 关于这方面的问题, 文献 [1-9] 上进行了很多讨论. 如 Casati<sup>[1]</sup> 研究了周期受击转子系统, 得到了重要的经典混沌扩散的量子抑制的结论; 在能谱统计上, D. Wintgen 和 H. Marxer<sup>[2]</sup> 研究了各向异性开普勒问题, 发现能级按最近邻间距分布为 Wigner 或高斯正交系踪 (GOE) 分布; D. Kilbane 等<sup>[3]</sup> 研究了周期受击一维无限深势阱系统, 发现能谱统计随耦合常数  $k$  值的增加从 Poisson 型向 Wigner 型转化. 这些结论与无规矩阵理论 (RMT) 的结果一致. 到目前为止, 可得到的一般结论是: 可积系统的谱分布为 Poisson 型, 完全混沌系统的谱分布为 Wigner 或 GOE 型, 混合系统的谱分布介于上述二者之间; 在定态波函数的形态特征研究上, Eric Heller<sup>[4]</sup> 最早发现某些本征态波函数的强度沿混沌区域内短周期轨道分布的现象, 称疤痕态或 scar 态.

在这篇文章中我们报导对周期受击简谐振子系统非谐振情况下经典动力学与准能量谱统计研究的结果. 谐振情况下该系统的经典动力学与量子动力学研究结果已在文献 [5] 中做了报导. 我们选取该系统原

收稿日期: 2011-09-08.

通讯联系人: 杨双波, 博士, 教授, 研究方向: 量子混沌. E-mail: yangshuangbo@njnu.edu.cn

因有两个:第一,这是一个经典简并系统,KAM定理的条件不满足,文献上非KAM系统研究的很少;第二,由于该系统数值处理上较困难,本征值、本征态、能谱统计等方面的研究结果还没有看到过报导.

## 1 系统的经典动力学

一维周期受击简谐振子系统的哈密顿量被写为

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_c^2 x^2 + \kappa \cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = H_0 + \kappa \cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (1)$$

它的正则运动方程为

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\mu}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\mu\omega_c^2 x + \kappa \sin x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2)$$

对运动方程在一个周期  $[nT - 0, (n+1)T - 0]$  内积分我们得到如下的映射方程

$$\dot{x}_{n+1} = \left( \dot{x}_n + \frac{\kappa \sin x_n}{\mu} \right) \cos \omega_c T - \omega_c x_n \sin \omega_c T, \quad (3)$$

$$x_{n+1} = \left( \dot{x}_n + \frac{\kappa \sin x_n}{\mu} \right) \frac{\sin \omega_c T}{\omega_c} + x_n \cos \omega_c T, \quad (4)$$

这里  $\kappa$  是打击强度,  $\omega$  为打击频率,  $T$  为周期, 则当  $\omega_c T = 2\pi \frac{\omega_c}{\omega} \equiv 2\pi q$ ,  $q$  为简单有理数时, 为谐振打击, 此时系统称为谐振系统, 它的经典动力学已在文献 [5] 中讨论过了. 在这篇文章中, 我们取  $q$  为无理数, 即非谐振系统, 仍然采用自然单位, 即取  $\mu = 1$ ,  $\omega_c = 1$ ,  $\hbar = 1$ .

简谐振子系统是经典简并系统  $\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = 0$ , KAM定理的条件不被满足, 相空间不存在KAM不变环. 非谐振下, 相空间结构随打击强度  $\kappa$  变化. 当  $\kappa$  很小时, 同心圆或者环充满相空间. 随着  $\kappa$  增大, 越来越多的环从外面(高能量处)逐渐被破坏, 直到圆心(能量最小)处, 其破坏机制并非清楚. 图1(a-f)显示不同打击强度下一个非谐振系统的相空间结构, 其频率比为  $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ . 可以看出当  $\kappa = 0.13$  时, 相空间充满了环.

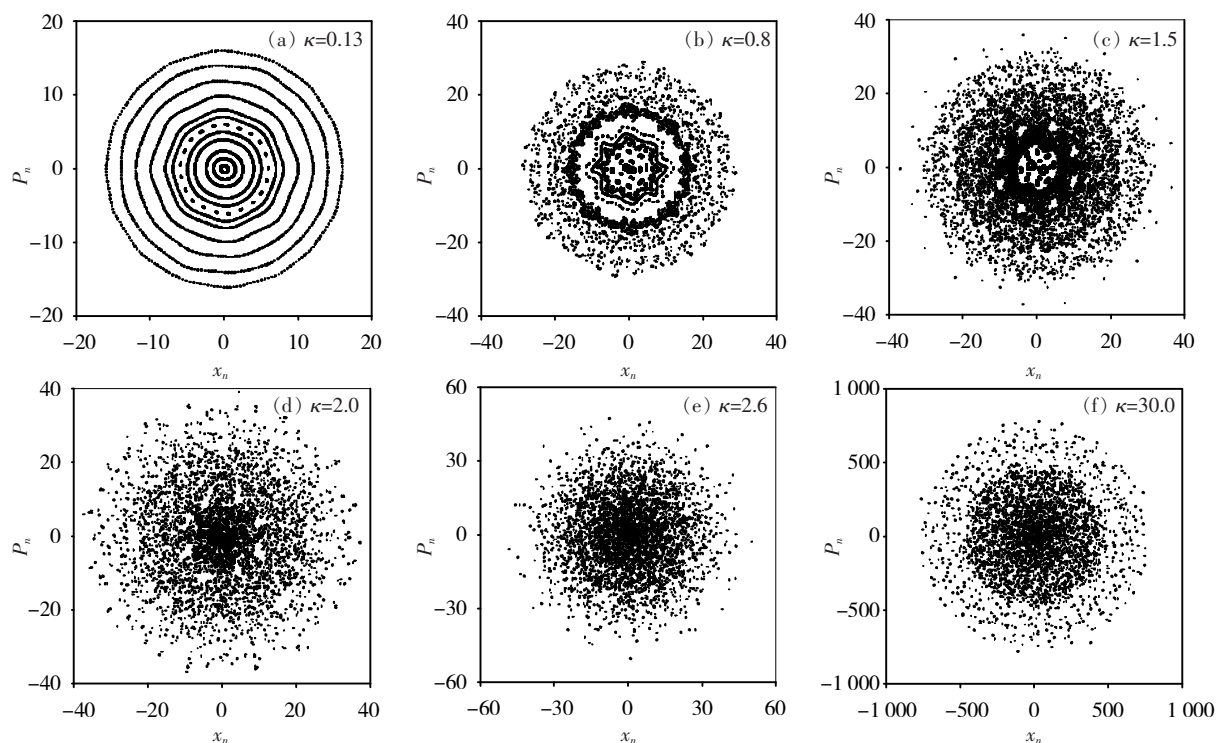


图1 不同打击强度  $\kappa$  下相空间的结构  $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

Fig.1 Phase space structure at different kicking strength  $\kappa$ .  $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

随着  $\kappa$  增大到  $\kappa = 0.8$  时,除中央区域为规则运动外,其余外部区域充满了混沌.继续增大  $\kappa$  到  $\kappa = 1.5$ ,内部规则运动将逐渐被混沌运动所取代,其中经历了周期为 8 的分岔.直到  $\kappa = 2.6$  时,几乎整个相空间被混沌占据.

## 2 系统的准能量谱获得

系统的量子动力学反映系统波函数随时间的演化,描述波函数随时间一步演化的 Floquet 算符可被表示为

$$\hat{U}(x, T) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H} dt} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 T} e^{-\frac{i}{\hbar} \kappa \cos x}, \quad (5)$$

其中  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_c^2 x^2$  为一维简谐振子哈密顿量.一个初态为  $\psi_0$  的态在 Floquet 算符  $\hat{U}(x, T)$  的作用下演化到  $\psi_T$ , 即

$$\psi_T = \hat{U}(x, T) \psi_0. \quad (6)$$

$\hat{U}(x, T)$  的本征方程为

$$\hat{U}\psi_f = \lambda_f \psi_f, \quad (7)$$

其中  $\lambda_f$  为  $\hat{U}(x, T)$  的本征值,可在谐振子本征态  $|n\rangle$  为基矢下求解.  $\hat{U}(x, T)$  的矩阵元已在文献[5]中给出.

Floquet 算符的矩阵为复矩阵,经对角化后可得到本征值谱  $\lambda_f$ . 然后利用  $\lambda_f = e^{i(\varepsilon_f + i\varepsilon_i)} = e^{-\varepsilon_i} e^{i\varepsilon_f}$  可得到系统的准能量谱  $\varepsilon_f$ .

## 3 准能量谱统计的结果及讨论

周期受击简谐振子系统中,在以谐振子本征态为基下,时间演化算符  $\hat{U}$  的矩阵元<sup>[5]</sup> 的非对角元由无限多项由阶乘函数、贝塞耳函数、幂函数、负指数函数、及连带拉盖尔多项式乘积的和组成,相当复杂,准确的数值计算由于计算机对个别函数的溢出而相当困难.经过仔细研究发现,对  $3\,000 \times 3\,000$  的矩阵取带宽 200,其他矩阵元取为 0,且单个矩阵元的求和中在第 26 项处截断就够了.在不同打击强度  $\kappa$  下,利用简谐振子的前 3 000 个本征态作为基将一步时间演化算符  $\hat{U}$  对角化,得到其本征值  $\lambda_f$ ,并进而得到准能量谱  $\varepsilon_f$  及其统计,结果如下:

### 3.1 能级的最近邻间距分布

非线性系统的准能谱通常是非均匀的,有较大的局域涨落,为了统计需要,理论上将原始能谱(实验上获得,或理论计算得到的)进行光滑化处理,称为能谱展平.展平的方法是这样的:对能级  $E_i$  作一个变换  $\varepsilon_i = f(E_i)$ ,  $f$  为某个函数,使得变换后的能级序列  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  具有均匀的态密度.函数  $f$  通常被选为  $\varepsilon_i = N(E_i)$ ,  $N(E_i)$  为能量小于  $E_i$  的能级数目.显然,对  $\varepsilon_i$  序列来说,平均能级间距为 1.在这篇文章中,我们采取一个不同形式的变换,  $\varepsilon_i = E_i(dN/dE) \approx E_i(\Delta N/\Delta E)$ . 这里  $\Delta N$  为在能量  $E_i$  附近、宽度为  $\Delta E$  的能量范围  $[E_i - \Delta E/2, E_i + \Delta E/2]$  内的能级数目.  $\Delta E$  在宏观上足够小,反映  $E_i$  邻域的情况,在微观上足够大,使之包括较多的能级,使得展平后的能谱具有光滑的态密度.这里我们取  $\Delta E = 0.01$ .下面我们对展平的能谱计算其能级最近邻间距的分布函数.

能级最近邻间距的分布函数是描述能谱涨落的一个重要统计量,它被定义为:从能谱上任取一对相邻能级  $x_n$  和  $x_{n+1}$ ,二者之间的距离落在  $(s, s + ds)$  内的概率为  $p(s)ds$ , 则  $p(s)$  为能级间距分布函数,满足归一化条件  $\int_0^\infty p(s)ds = 1$ .数值上决定  $p(s)$  的方法为:对一个有  $N$  个能级的能谱,给定  $s$  和  $ds$ ,搜索整个能谱,找出最近邻间距落在  $(s, s + ds)$  内的能级对的数目  $\Delta N$ , 则  $p(s) = \Delta N/(N\Delta s)$ .

业已发现经典可积系统的能谱中,最近邻间距的分布为 Poisson 分布,分布函数为  $P(s) = \exp(-s)$ , 表明能级间无关联,而不可积系统的混沌区域内谱统计为 Wigner 或 GOE 分布,分布函数为  $P(s) =$

$\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sexp}\left[\frac{-\pi s^2}{4}\right]$  表明能级间有某种排斥作用. 还有一些系统(如混合系统)的谱统计介于二者之间, 这些都与无规矩阵理论(RMT)的结果一致. 对周期受击简谐振子系统我们报导 根据最近邻间距分布, 它的谱统计为 Poisson 分布. 在图2(a-f)中我们给出了打击强度分别为  $\kappa = 0.13, 0.7, 1.6, 2.0, 2.6, 30.0$  等情况下的最近邻间距分布, 它们都为 Poisson 类分布, 与经典相空间的运动是规则或混沌无关, 如图1所示. 这与周期受击转子系统的结果<sup>[6]</sup>相同. 在那里为了与经典比较, 必须把它映射到一个环上. 在图2中附加的粗的实线代表 Poisson 分布, 细的实线代表 Wigner 或 GOE 分布.

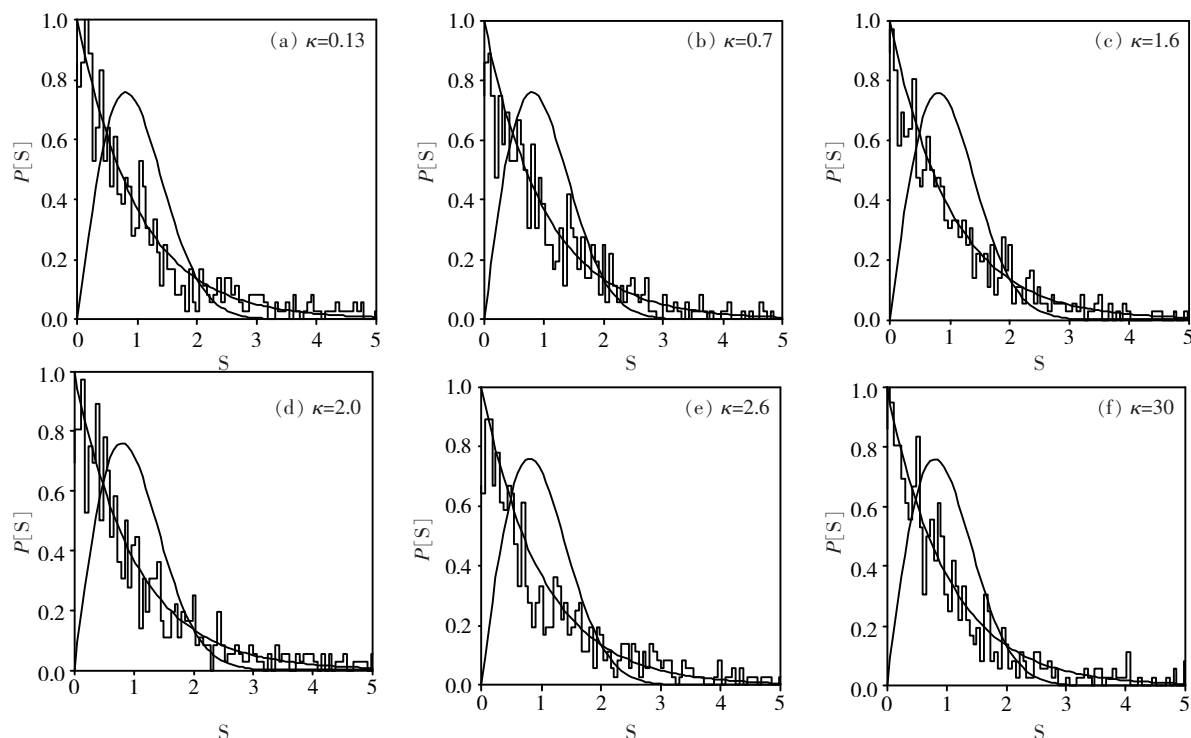


图2 (a-f) 不同打击强度  $\kappa$  下非谐振系统的最近邻能级间距分布  $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

Fig.2 (a-f) The nearest neighbor spacing distribution for the nonresonant system at different kicking strength  $\kappa$   $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

### 3.2 谱刚度

对于谱的能级序列  $\{E_i\}$ , 考虑其中的一段  $[E, E+L]$ , 那么谱刚度被定义为

$$\Delta_3(E, L) = \frac{1}{L} \min_{A, B} \int_E^{E+L} [N(E') - AE' - B]^2 dE', \quad (8)$$

这里  $N(E')$  是能级序列  $\{E_i\}$  的态的积累数, 为一阶梯函数.  $A, B$  的选择是使直线  $AE' + B$  在  $E < E' < E+L$  区间内给出阶梯函数的最佳拟合(最小二乘拟合).  $\Delta_3(E, L)$  的值是  $E$  的函数, 即谱中不同区间的谱刚度是不同的. 整个能级序列的平均谱刚度  $\bar{\Delta}_3(L)$  是对谱求系综平均或对能量取算术平均的结果, 只是  $L$  的函数.

与谱的最近邻能级间距分布  $P(s)$  反映近程关联相反, 谱刚度  $\bar{\Delta}_3(L)$  反映谱的能级间的长程关联. 对于一个规则的量子系统, 能级是无规分布的, 彼此之间无关联, 即 Poisson 最近邻间距分布, 谱刚度线性依赖于  $L$ . 对简谐振子系统, 由于  $E = j$ , 谱刚度为常数  $\bar{\Delta}_3(L) = 1/12$ . 对于混沌量子系统, 能级显示出较强的关联, 由于能级之间排斥作用的缘故, 其最近邻能级间距分布为 Wigner 或 GOE 分布, 谱刚度  $\bar{\Delta}_3(L)$  对  $L$  对数依赖, 介于 Poisson 与谐振子谱刚度之间. 对一般系统, 其谱刚度通常由数值计算得到, 方法为: 如果  $E_i < E + L < E_{i+1}$ , 那么有

$$\Delta_3(E, L) = \frac{1}{L} \min_{A, B} \int_E^{E+L} [N(E') - AE' - B]^2 dE' =$$

$$\frac{1}{L} \min_{A, B} \left[ \int_E^{E_i} [N(E') - AE' - B]^2 dE' + \int_{E_i}^{E+L} [N(E') - AE' - B]^2 dE' \right] = \frac{1}{L} \sum_{j=j_E}^{j_i} \int_{E_j}^{E_{j+1}} (j - aE' - b)^2 dE' + \frac{1}{L} \int_{E_i}^{E+L} (j_i - aE' - b)^2 dE' , \quad (9)$$

其中  $a, b$  为最佳拟合参数. 平均谱刚度是对  $E$  求平均的结果, 即  $\bar{\Delta}_3(L) = \langle \Delta_3(E, L) \rangle_E$ .

对周期受击的简谐振子系统, 图 3(a-f) 显示了不同打击强度  $\kappa$  下几种系统的平均谱刚度. 可以看出, 当  $\kappa = 0.13$  时  $\bar{\Delta}_3(L)$  对  $L$  的关系在起始较小范围内为近似线性, 像 Poisson 分布的情况, 然后趋于饱和, 为一常数, 像谐振子的情况. 这也与长方台球系统在  $\gamma = 1$  时平均谱刚度相同<sup>[7]</sup>, 那里系统是可积的. 类似的结果也在均匀磁场下的氢原子系统中出现过, 而这个系统是不可积的<sup>[8]</sup>. 所以, 图 1(a)、图 2(a)、图 3(a) 的结果是一致的. 当  $\kappa = 1.6$  时, 经典规则与混沌混合的相空间, 如图 1(c) 所示, 量子最近邻间距分布呈 Poisson 形, 如图 2(c) 所示, 而此时的谱刚度如图 3(b) 所示, 先随  $L$  线性增加一小段, 然后以较慢的速度非线性增加, 没有饱和. 图 1(c) 与图 3(b) 是一致的. 当  $\kappa = 2.0$  时, 经典相空间中除了周期为 8 的岛链中存在一点可积的区域外基本上都是混沌的, 如图 1(d) 所示. 这时量子最近邻间距分布仍然呈 Poisson 形, 如图 2(d) 所示. 谱刚度如图 3(c) 所示, 先随  $L$  线性增长一段, 经过一个小平台后, 继续以较快的速度增加.  $\kappa = 2.6$  和  $\kappa = 30$  的情况相似, 经典相空间充满混沌, 如图 1(e-f) 所示. 量子最近邻间距分布呈 Poisson 形, 如图 2(e-f) 所示. 谱刚度如图 3(d-e) 所示. 这几种打击强度  $\kappa$  下谱刚度的比较示于图 3(f) 中. 可以看出, 除了  $\kappa = 30$  的情况外, 近程关联 ( $L$  较小时) 相似, 远程关联不同. 这与反映谱近程关联的能级最近邻间距分布都呈 Poisson 形分布相一致.  $\kappa = 30$  的情况是, 起始的线性部分很短, 然后以更快的速度随  $L$  增加而增加, 如图 3(e-f) 所示. 这里从谱刚度所反映的远程关联看到了经典与量子混沌的对应.

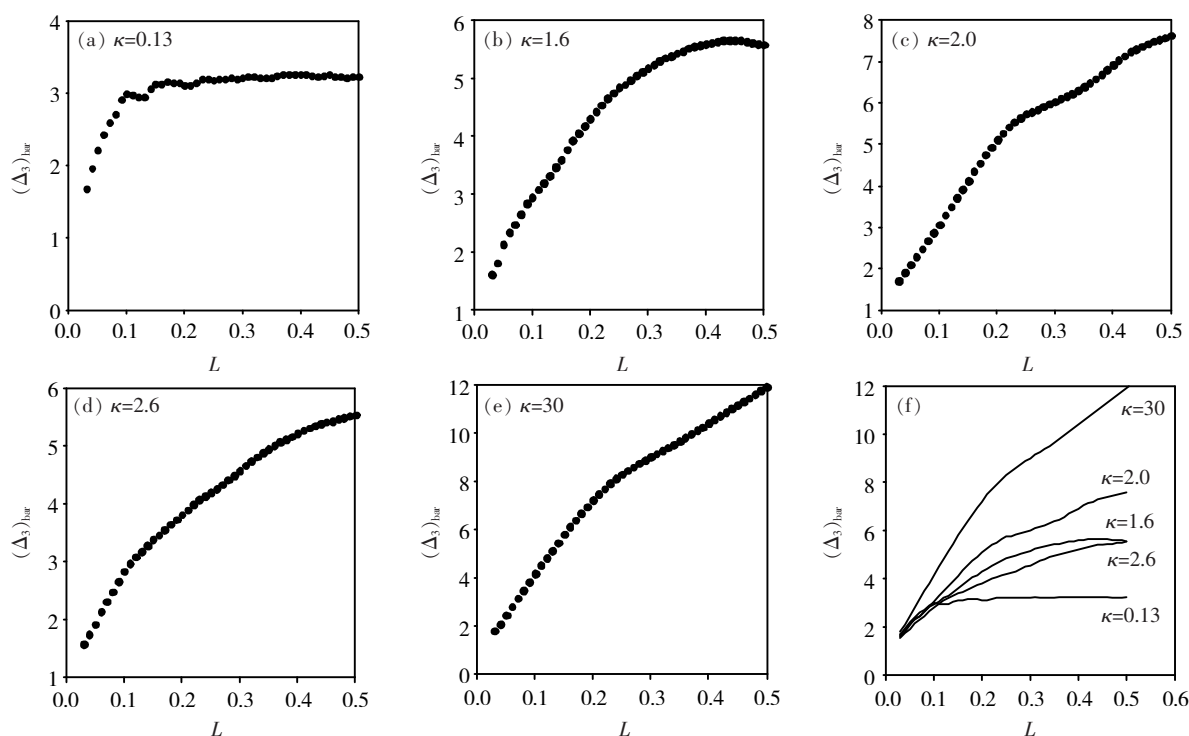


图 3 (a-f) 几种不同打击强度  $\kappa$  下非谐振系统的谱刚度及其比较  $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

Fig. 3 (a-f) Spectral rigidities for nonresonant systems with different kicking strength, and its comparison,  $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

### 3.3 能级数统计的高阶矩

在给定能级序列的谱中考虑中心在能量  $E$  宽度为  $L$  的间隔内的本征值数目  $N(E, L)$ , 对非均匀谱, 其值随  $E$  而变. 对谱中的能量  $E$  取平均 (通常为算术平均), 得到宽度为  $L$  的任意间隔内的平均能级数为  $\bar{N}(L) = \langle N(E, L) \rangle$  与  $E$  无关. 在这个范围内本征值的数方差为

$$\Sigma^2(L) = \langle [N(E, L) - \bar{N}(L)]^2 \rangle = \langle N(E, L)^2 \rangle - \bar{N}(L)^2 , \quad (10)$$

与  $E$  无关.  $\bar{N}(L)$  和  $\langle N(E, L)^2 \rangle$  可以从数值计算得到. 谱刚度  $\bar{\Delta}_3$  与数方差  $\Sigma^{(2)}$  统计仅仅反映 2 点关联, 另外 2 个反映 3 点与 4 点关联的量为 skewness  $\gamma_1$  和 excess  $\gamma_2$ , 它们分别被定义为

$$\gamma_1 = \frac{M_3}{M_2^{\frac{3}{2}}}, \tag{11}$$

和

$$\gamma_2 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3. \tag{12}$$

这里  $M_k$  是  $N(E, L)$  围绕平均值  $\bar{N}(L)$  涨落分布的第  $k$  阶矩, 即

$$M_k = \langle [N(E, L) - \bar{N}(L)]^k \rangle. \tag{13}$$

如

$$M_3 = \langle [N(E, L) - \bar{N}(L)]^3 \rangle = \langle N(E, L)^3 \rangle - 3 \langle N(E, L)^2 \rangle \bar{N}(L) + 2 \bar{N}^3(L), \tag{14}$$

$$M_4 = \langle [N(E, L) - \bar{N}(L)]^4 \rangle = \langle N(E, L)^4 \rangle - 4 \langle N(E, L)^3 \rangle \bar{N}(L) + 6 \langle N(E, L)^2 \rangle \bar{N}^2(L) - 3 \bar{N}^4(L). \tag{15}$$

像  $\bar{N}(L)$  和  $\langle N(E, L)^2 \rangle$  那样,  $\langle N(E, L)^3 \rangle$  和  $\langle N(E, L)^4 \rangle$  等都可以从数值计算得到.

对  $\kappa = 2.6$  的系统, 我们首先计算了能谱中宽度为  $L$  的间隔内的平均能级数  $\bar{N}(L)$ , 其结果示于图 4 中. 可以看出  $\bar{N}(L) \propto L$ , 即有很好的线性关系. 对  $\kappa = 0.13, 1.6, 2.6$  等 3 个系统, 我们分别计算了  $\Sigma^2, \gamma_1, \gamma_2$ , 结果如图 5 所示. 结果反映了这些量在一个大的范围内 ( $L$  的值从 0 变到 0.3 对应于  $\bar{N}(L)$  的值从 0 变到 140 个能级) 的情况, 即系统的长程关联情况.

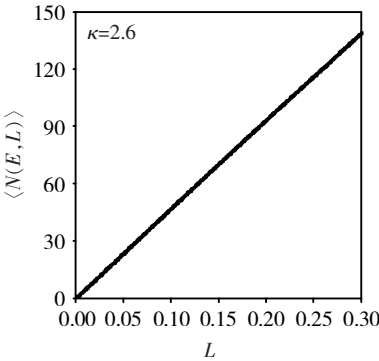


图 4 不同间隔  $L$  内的平均能级数  $\bar{N}(L) = \langle N(E, L) \rangle$  与  $L$  的关系  $\kappa = 2.6, q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$   
Fig. 4 The average value  $\bar{N}(L) = \langle N(E, L) \rangle$  versus  $L$  for  $\kappa = 2.6, q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

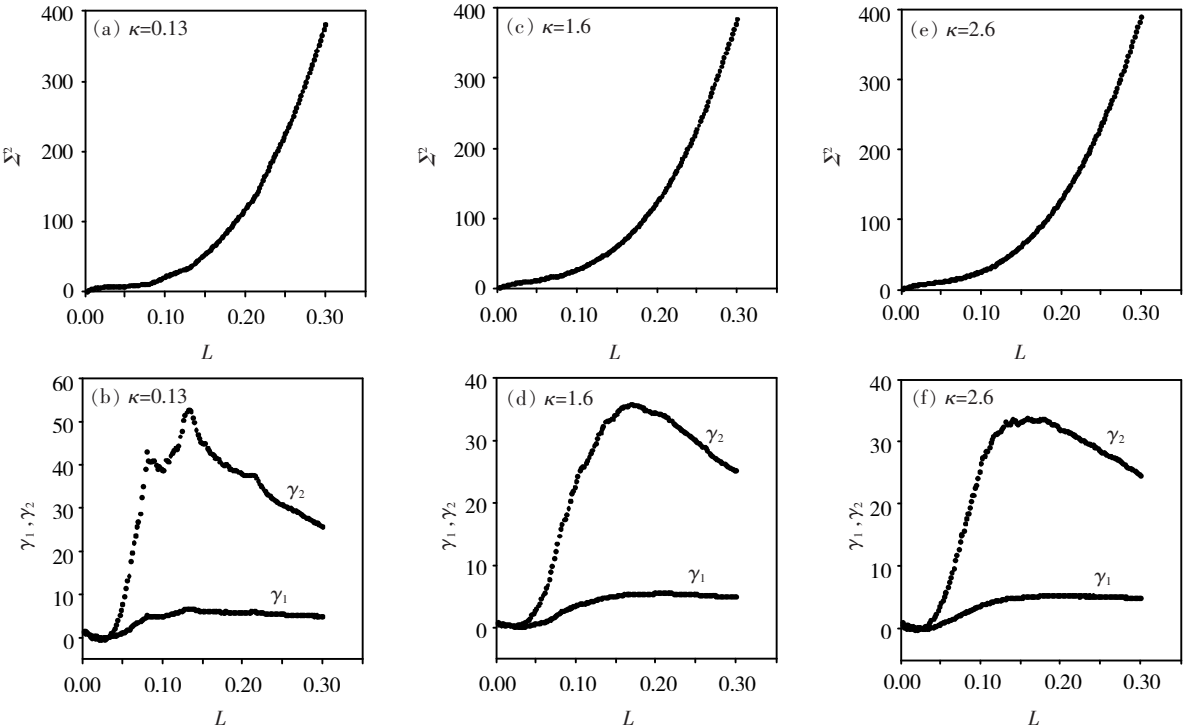


图 5 不同打击强度  $\kappa$  下非谐振系统的数方差  $\Sigma^2$  及高阶矩  $\gamma_1, \gamma_2, q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

Fig. 5 Number variance  $\Sigma^2$ , skewness  $\gamma_1$ , and excess  $\gamma_2$  for nonresonance system with different kicking strength  $\kappa, q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$

(下转第 47 页)

## [参考文献]

- [1] Bruce C E ,Golde R H. The lightning discharge[J]. J Inst Elect Pt ,1941 ,88: 487-520.
- [2] Rakov V A ,Uman M A. Review and evaluation of lightning return stroke models including some aspects of their application [J]. IEEE Trans Electromag Compat ,1998 ,40( 4) : 403-426.
- [3] Baba Y ,Rakov V A. On the transmission lines model for lightning return stroke representantion[J]. Geophysical Research Letters ,2003 ,30( 24) : 2294 ,doi: 10. 1029/2003GL 018407.
- [4] Marcos Rubinstein. An approximate formula for the calculation of the horizontal electric field from lightning at close ,intermediate , and long range [J]. IEEE Trans Electromag Compat ,1996 ,38( 3) : 531-535.
- [5] Moini R ,Kordi B ,Raif G Z ,et al. A new lightning return stroke model based on antenna theory[J]. J Geophys Res ,2000 ,105( D24) : 29 693-29 702.

[责任编辑: 顾晓天]

( 上接第 42 页)

可以看出 ,与谱刚度不同 ,高阶矩对打击强度  $\kappa$  值的变化并不敏感. 对于较小的  $L$  ( $L < 0. 05$ ) ,这些结果与强磁场中氢原子的结果<sup>[8]</sup>类似.

## [参考文献]

- [1] Casati G ,Chirikov B V ,Ford J ,et al. Stochastic behavior of a quantum pendulum under periodic perturbation [J]. Lect Notes Phys ,1979 ,93: 334-352.
- [2] Wintgen D ,Marxer H. Level statistics of a quantized cantori system [J]. Phys Rev Lett ,1988 ,60: 971-974.
- [3] Kilbane D ,Cummings A ,O' Sullivan G ,et al. Quantum statistics of a kicked particle in an infinite potential well [J]. Chaos ,Solitons and Fractals ,2006 ,30: 412-423.
- [4] Heller E J ,O' Connor P W ,Gehlen J. The eigenfunctions of classical chaostic systems [J]. Physica Scripta ,1989 ,40: 354-359.
- [5] 杨双波 ,韦栋. 周期受击简谐振子系统的经典与量子动力学 [J]. 南京师大学报: 自然科学版 ,2011 ,34( 4) : 49-54.
- [6] Izrailev F M. Simple models of quantum chaos: spectrum and eigenfunctions [J]. Phys Rep ,1990 ,196: 299-399.
- [7] Casti G ,Chirikov B V ,Guarneri I. Energy-level statistics of integrable quantum systems [J]. Phys Rev Lett ,1985 ,54: 1 350-1 353.
- [8] Honig A ,Wintgen D. Spectral properties of strongly perturbed Coulomb systems: fluctuation properties [J]. Phys Rev A ,1989 ,39: 5 642-5 656.
- [9] 汪昭 ,杨双波. 势阱中的混沌及量子对应 [J]. 南京师大学报: 自然科学版 ,2009 ,32( 3) : 31-36.

[责任编辑: 顾晓天]