偏群缠绕模的 Maschke 型定理

陈全国,汤建钢

(伊犁师范学院数学与统计学院,伊宁 835000)

[摘要] 引入偏群缠绕结构的正规化积分,借助正规化积分证明了偏群缠绕模的 Maschke 型定理.

[关键词] 偏群缠绕模,正规化积分,Maschke 型定理

[中图分类号] O153.3 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)04-0014-04

A Maschke-Type Theorem for Partial Group-Entwined Modules

Chen Quanguo,Tang Jiangang

(School of Mathematics and Statistics,Yili Normal University,Yining 835000,China)

Abstract: The normalized integrals of partial group entwined structures are introduced. With the help of the normalized integral,we prove the Maschke-type Theorem for partial group-entwined modules.

Key words: partial group-entwined modules,normalized integral,Maschke-type theorem

Exel[1] 研究算子代数时考虑了偏群作用,其逐渐成为研究由希尔伯特空间上的偏等距生成的 C^*-代数的有效工具[2]. 用代数的方法研究偏群作用出现在诸多文献中[3,4]. Caenepeel 和 Janssen[5] 利用偏缠绕结构的概念引入了偏 Hopf 作用.

作为 Hopf 代数的推广,Hopf π-余代数被引入,并得到深入、广泛的研究[6-10]. 王栓宏[7] 在 Hopf π-余代数中引入了群缠绕结构和群缠绕模. 类似地,通过偏缠绕结构和偏缠绕模附加群的结构得到偏群缠绕结构和偏群缠绕模. 本文将致力于证明偏缠绕模的 Maschke 型定理.

文中,假设 k 为一个域,π 为一个群,其单位元为 e. 所有代数、余代数的张量积均在 k 上. 所有的映射均是 k-线性的.

下面简单介绍一些本论文中涉及到的概念和符号.

定义1 称一簇向量空间 $C=\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 是一个 π-余代数,如果存在一簇 k-线性映射 $\Delta=\{\Delta_{\alpha,\beta}:C_{\alpha\beta}\to C_\alpha\otimes C_\beta\}_{\alpha,\beta\in\pi}$ 和一个 k-线性映射 $\varepsilon_C:C_e\to k$,对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in\pi$,满足下列条件

$$(\Delta_{\alpha,\beta}\otimes\iota)\circ\Delta_{\alpha\beta,\gamma}=(\iota\otimes\Delta_{\beta,\gamma})\circ\Delta_{\alpha,\beta\gamma},$$
$$(\iota\otimes\varepsilon_C)\circ\Delta_{\alpha,e}=\iota=(\varepsilon_C\otimes\iota)\circ\Delta_{e,\alpha}.$$

这里 ι 表示恒等映射.

采用 Sweedler 记号,对任意 $\alpha,\beta\in\pi$,$c\in C_{\alpha\beta}$,记

$$\Delta_{\alpha,\beta}(c)=\sum c_{(1,\alpha)}\otimes c_{(2,\beta)}.$$

定义2 设 $C=\{C_\alpha,\Delta,\varepsilon_C\}_{\alpha\in\pi}$ 是一个 π-余代数,$A=\{A_\alpha,m_\alpha,1_{A_\alpha}\}_{\alpha\in\pi}$ 是一簇 k-代数,$\psi=\{\psi_{\alpha,\beta}:C_\alpha\otimes A_{\beta\alpha}\to A_\beta\otimes C_\alpha\}_{\alpha,\beta\in\pi}$ 是一簇 k-线性映射. 一个偏 π-缠绕结构 $(A,C)_{\pi-\psi}$ 是一个三元组 (A,C,ψ),满足如下条件

(1) 对任意 $a,b\in A_{\beta\alpha}$,$c\in C_\alpha$,

$$(ab)_{\psi_{\alpha,\beta}}\otimes c^{\psi_{\alpha,\beta}}=a_{\psi_{\alpha,\beta}}b_{\psi'_{\alpha,\beta}}\otimes c^{\psi_{\alpha,\beta}\psi'_{\alpha,\beta}},$$

(2) 对任意 $a,b\in A_{\gamma\alpha\beta}$,$d\in C_{\alpha\beta}$,

收稿日期:2012-01-08.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11161050、11261063)、新疆维吾尔自治区普通高等学校重点学科经费资助(2012ZDXK03).
通讯联系人:陈全国,博士,讲师,研究方向:Hopf 代数. E-mail:cqg211@163.com

$$\sum a_{\psi_{\alpha\beta,\gamma}} 1_{A_{\gamma\alpha}\psi_{\alpha,\gamma}} \otimes d^{\psi_{\alpha\beta,\gamma}\psi_{\alpha,\gamma}}_{(1,\alpha)} \otimes d^{\psi_{\alpha\beta,\gamma}}_{(2,\beta)} = \sum a_{\psi_{\beta,\gamma\alpha}\psi_{\alpha,\gamma}} \otimes d^{\psi_{\alpha,\gamma}}_{(1,\alpha)} \otimes d^{\psi_{\beta,\gamma\alpha}}_{(2,\beta)},$$

(3) **对任意** $a \in A_\alpha, c \in C_e$,

$$\sum \varepsilon_C(c^{\psi_{e,\alpha}}) a_{\psi_{e,\alpha}} = \varepsilon_C(c) a.$$

这里

$$\psi_{\alpha,\beta}(c \otimes a) = a_{\psi_{\alpha,\beta}} \otimes c^{\psi_{\alpha,\beta}}, \quad \forall a \in A_{\beta\alpha}, \quad c \in C_\alpha.$$

定义 3 设 $(A,C)_{\pi-\psi}$ 是一个偏 π-缠绕结构. 称一簇向量空间 $M=\{M_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 是一个偏 π-缠绕模,如果存在一簇 k-线性映射 $\cdot: M_\alpha \otimes A_\alpha \to M_\alpha$ 和一簇 k-线性映射

$$\rho^M = \{\rho^M_{\alpha,\beta}: M_{\alpha\beta} \to M_\alpha \otimes C_\beta\}_{\alpha,\beta\in\pi},$$

满足如下条件

(1) M_α **是一个右** A_α-**模**,

(2) **对任意** $m \in M_{\alpha\beta}, a \in A_{\alpha\beta}$,

$$\rho^M_{\alpha,\beta}(m \cdot a) = \sum m_{[0,\alpha]} \cdot a_{\psi_{\beta,\alpha}} \otimes m^{\psi_{\beta,\alpha}}_{[1,\beta]},$$

(3) **对任意** $m \in M_\alpha$, $\sum \varepsilon_C(m_{[1,e]}) m_{[0,\alpha]} = m$,

(4) **对任意** $m \in M_{\alpha\beta\gamma}$,

$$\sum m_{[0,\alpha\beta][0,\alpha]} \otimes m_{[0,\alpha\beta][1,\beta]} \otimes m_{[1,\gamma]} = \sum m_{[0,\alpha]} \cdot 1_{A_{\alpha\beta\gamma}\psi_{\gamma,\alpha\beta}\psi_{\beta,\alpha}} \otimes m_{[1,\beta\gamma](1,\beta)}{}^{\psi_{\beta,\alpha}} \otimes m_{[1,\beta\gamma](2,\gamma)}{}^{\psi_{\gamma,\alpha\beta}},$$

这里

$$\rho^M_{\alpha,\beta}(m) = \sum m_{[0,\alpha]} \otimes m_{[1,\beta]}, \forall m \in M_{\alpha\beta}.$$

以下用 $U^{\pi-C}_A(\psi)$ **表示由偏** π-**缠绕模组成的范畴.**

定义 4 设 $(A,C)_{\pi-\psi}$ 是一个偏 π-缠绕结构. 固定 $\alpha\in\pi$,称一簇 k-线性映射

$$\theta^{(\alpha)} = \{\theta^{(\alpha)}_\beta: C_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1}} \otimes C_{\alpha^{-1}\beta} \to A_\beta\}_{\beta\in\pi}$$

是一个 α-**正规化积分,如果** $\theta^{(\alpha)}$ **满足如下条件**

(1) **对任意** $c \in C_{\alpha^{-1}\beta\gamma}, d \in C_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1}}$,

$$\sum d_{(1,\gamma)}{}^{\psi_{\gamma,\beta}\psi'_{\gamma,\beta}} \otimes 1_{A_\alpha\psi_{(\alpha^{-1}\beta\gamma)^{-1},\beta\gamma}\psi_{\gamma,\beta}} \theta^{(\alpha)}_{\beta\gamma}(d_{(2,(\alpha^{-1}\beta\gamma)^{-1})}{}^{\psi_{(\alpha^{-1}\beta\gamma)^{-1},\beta\gamma}} \otimes c)_{\psi'_{\gamma,\beta}} =$$
$$\sum c_{(1,\gamma)}{}^{\psi_{\gamma,\beta}} \otimes 1_{A_{\beta\gamma}\psi_{\gamma,\beta}\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}\psi_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1},\beta}} \theta^{(\alpha)}_\beta(d^{\psi_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1},\beta}} \otimes c_{(1,\alpha^{-1}\beta)}{}^{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}}),$$

(2) **对任意** $b \in C_e$,

$$\theta^{(\alpha)}_\beta\left(\sum b_{(1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1})} \otimes b_{(2,\alpha^{-1}\beta)}\right) = 1_{A_\beta}\varepsilon_C(b),$$

(3) **对任意** $a \in A_\beta, d \in C_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1}}$ **及** $b \in C_{\alpha^{-1}\beta}$,

$$a_{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}\psi_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1},\beta}} \theta^{(\alpha)}_\beta(d^{\psi_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1},\beta}} \otimes b^{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}}) = \theta^{(\alpha)}_\beta(d \otimes b) a.$$

引理 1 设 $M=\{M_\beta\}_{\beta\in\pi}, N=\{N_\beta\}_{\beta\in\pi} \in U^{\pi-C}_A(\psi)$. 固定 $\alpha\in\pi$. 假设存在 α-正规化积分 $\theta^{(\alpha)}$, $g \in Hom_{A_\alpha}(N_\alpha, M_\alpha)$,则 $\tilde{g} = \{\tilde{g}_\beta\}_{\beta\in\pi}$,

$$\tilde{g}_\beta: N_\beta \to M_\beta, \tilde{g}_\beta(n) = \sum g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta]} \cdot \theta^{(\alpha)}_\beta(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]} \otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta]})$$

是 $U^{\pi-C}_A(\psi)$ **的态射.**

证明 首先,我们验证下面的图可交换

$$\begin{array}{ccc} N_{\beta\gamma} & \xrightarrow{\tilde{g}_{\beta\gamma}} & M_{\beta\gamma} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_\beta \otimes C_\gamma & \xrightarrow{\tilde{g}_\beta \otimes \iota} & M_\beta \otimes C_\gamma \end{array}$$

事实上,对任意 $n \in N_{\beta\gamma}$,**一方面**

$$\rho^M_{\beta,\gamma} \circ \tilde{g}_{\beta\gamma}(n) = \rho^M_{\beta,\gamma}\left(\sum g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta\gamma]} \cdot \theta^{(\alpha)}_{\beta\gamma}(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta\gamma)^{-1}]} \otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta\gamma]})\right) =$$

$$\sum \left(g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta\gamma]}\cdot\theta^{(\alpha)}_{\beta\gamma}\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta\gamma)^{-1}]}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta\gamma]}\right)\right)_{[0,\beta]}\otimes$$
$$\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta\gamma]}\cdot\theta^{(\alpha)}_{\beta\gamma}\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta\gamma)^{-1}]}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta\gamma]}\right)\right)_{[1,\gamma]}=$$
$$\sum g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta\gamma][0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_{\beta\gamma}\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta\gamma)^{-1}]}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta\gamma]}\right)_{\psi_{\gamma,\beta}}\otimes g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta\gamma][1,\gamma]}{}^{\psi_{\gamma,\beta}}=$$
$$\sum g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta]}\cdot 1_{A_\alpha\psi_{(\alpha^{-1}\beta\gamma)^{-1},\beta\gamma}\psi_{\gamma,\beta}}\theta^{(\alpha)}_{\beta\gamma}\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}](2,(\alpha^{-1}\beta\gamma)^{-1})}{}^{\psi_{(\alpha^{-1}\beta\gamma)^{-1},\beta\gamma}}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta\gamma]}\right)_{\psi'_{\gamma,\beta}}\otimes$$
$$g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}](1,\gamma)}{}^{\psi_{\gamma,\beta}\psi'_{\gamma,\beta}}=$$
$$\sum g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta]}\cdot 1_{A_{\beta\gamma}\psi_{\gamma,\beta}\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}\psi_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1},\beta}}\theta^{(\alpha)}_{\beta}\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}{}^{\psi_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1},\beta}}\otimes\right.$$
$$\left.n_{[1,\alpha^{-1}\beta\gamma](1,\alpha^{-1}\beta)}{}^{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}}\right)\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta\gamma](2,\gamma)}{}^{\psi_{\gamma,\beta}},$$

另一方面

$$(\tilde{g}_\beta\otimes\iota)\circ\rho^N_{\beta,\gamma}(n)=\tilde{g}_\beta(n_{[0,\beta]})\otimes n_{[1,\gamma]}=$$
$$\sum g(n_{[0,\beta][0,\alpha]})_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g(n_{[0,\beta][0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes n_{[0,\beta][1,\alpha^{-1}\beta]}\right)\otimes n_{[1,\gamma]}=$$
$$\sum g(n_{[0,\alpha]}\cdot 1_{A_{\beta\gamma}\psi_{\gamma,\beta}\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}})_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g(n_{[0,\alpha]}\cdot 1_{A_{\beta\gamma}\psi_{\gamma,\beta}\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes n_{[0,\alpha^{-1}\beta\gamma](1,\alpha^{-1}\beta)}{}^{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}}\right)\otimes$$
$$n_{[0,\alpha^{-1}\beta\gamma](2,\gamma)}{}^{\psi_{\gamma,\beta}}=\sum g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta]}\cdot 1_{A_{\beta\gamma}\psi_{\gamma,\beta}\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}\psi_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1},\beta}}\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}{}^{\psi_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1},\beta}}\otimes\right.$$
$$\left.n_{[1,\alpha^{-1}\beta\gamma](1,\alpha^{-1}\beta)}{}^{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}}\right)\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta\gamma](2,\gamma)}{}^{\psi_{\gamma,\beta}},$$

从而可得 $\rho^M_{\beta,\gamma}\circ\tilde{g}_{\beta\gamma}=(\tilde{g}_\beta\otimes\iota)\circ\rho^N_{\beta,\gamma}$.

下面验证 $\tilde{g}=\{\tilde{g}_\beta\}_{\beta\in\pi}$**是右** A-**线性，即对任意** $\beta\in\pi$，$\tilde{g}_\beta$ **是右** A_β-**线性. 事实上，对任意** $n\in N_\beta$，$a\in A_\beta$，**我们有**

$$\tilde{g}_\beta(n\cdot a)=\sum g((n\cdot a)_{[0,\alpha]})_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g((n\cdot a)_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes(n\cdot a)_{[1,\alpha^{-1}\beta]}\right)=$$
$$\sum g(n_{[0,\alpha]}\cdot a_{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}})_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g(n_{[0,\alpha]}\cdot a_{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta]}{}^{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}}\right)=$$
$$\sum g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta]}\cdot a_{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}\psi_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1},\beta}}\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}{}^{\psi_{(\alpha^{-1}\beta)^{-1},\beta}}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta]}{}^{\psi_{\alpha^{-1}\beta,\alpha}}\right)=$$
$$\sum g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta]}\right)a=\tilde{g}_\beta(n)\cdot a.$$

定理 1　**设** $(A,C)_{\pi-\psi}$**是一个偏** π-**缠绕结构**，$M=\{M_\beta\}_{\beta\in\pi}$，$N=\{N_\beta\}_{\beta\in\pi}\in U^{\pi-C}_A(\psi)$.

固定 $\alpha\in\pi$. **假设存在** α-**正规化积分** $\theta^{(\alpha)}$. **对** $U^{\pi-C}_A(\psi)$ **中单(满)态射** $f=\{f_\beta: M_\beta\to N_\beta\}_{\beta\in\pi}$，**当单(满)态射** f_α **作为** A_α-**模可分裂时，必有** f **在** $U^{\pi-C}_A(\psi)$ **中可分裂.**

证明　**假设单态射** f_α **作为** A_α-**模可分，那么存在** $g: N_\alpha\to M_\alpha$，**使得** $g\circ f_\alpha=\iota$.

定义 $\tilde{g}=\{\tilde{g}_\beta\}_{\beta\in\pi}$，

$$\tilde{g}_\beta: N_\beta\to M_\beta,\ \tilde{g}_\beta(n)=\sum g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta]}\right).$$

由引理 1 可知，$\tilde{g}=\{\tilde{g}_\beta\}_{\beta\in\pi}$**是** $U^{\pi-C}_A(\psi)$ **的态射. 对任意** $m\in M_\beta$，**我们有**

$$\tilde{g}_\beta\circ f_\beta(m)=\sum g((f_\beta(m))_{[0,\alpha]})_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g((f_\beta(m))_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes(f_\beta(m))_{[1,\alpha^{-1}\beta]}\right)=$$
$$\sum g(f_\alpha(m_{[0,\alpha]}))_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g(f_\alpha(m_{[0,\alpha]}))_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes m_{[1,\alpha^{-1}\beta]}\right)=$$
$$\sum m_{[0,\alpha][0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(m_{[0,\alpha][1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes m_{[1,\alpha^{-1}\beta]}\right)=$$
$$\sum m_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(m_{[1,e](1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1})}\otimes m_{[1,e][2,\alpha^{-1}\beta]}\right)=\sum m_{[0,\beta]}\varepsilon_C(m_{[1,e]})=m.$$

即证明了 $\tilde{g}\circ f=\iota$.

假设满态射 f_α **作为** A_α-**模可分，那么存在** $g: N_\alpha\to M_\alpha$，**使得** $f_\alpha\circ g=\iota$.

定义 $\tilde{g}=\{\tilde{g}_\beta\}_{\beta\in\pi}$**如上. 对任意** $n\in N_\beta$，**我们有**

$$f_\beta\circ\tilde{g}_\beta(n)=\sum f_\beta\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[0,\beta]}\right)\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(g(n_{[0,\alpha]})_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta]}\right)=$$
$$\sum f_\alpha(g(n_{[0,\alpha]}))_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(f_\alpha(g(n_{[0,\alpha]}))_{[1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta]}\right)=$$
$$\sum n_{[0,\alpha][0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(n_{[0,\alpha][1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1}]}\otimes n_{[1,\alpha^{-1}\beta]}\right)=$$
$$\sum n_{[0,\beta]}\cdot\theta^{(\alpha)}_\beta\left(n_{[1,e](1,(\alpha^{-1}\beta)^{-1})}\otimes n_{[1,e][2,\alpha^{-1}\beta]}\right)=\sum n_{[0,\beta]}\varepsilon_C(n_{[1,e]})=n.$$

即证明了 $f\circ\tilde{g}=\iota$. 证毕.

下面考虑定理 1 的应用. 如果 π 是一个平凡群,那么 $(A,C)_\psi$ 是一个偏缠绕结构. α-正规化积分 $\theta^{(\alpha)}$ 表述为 k-线性映射 θ: $C\otimes C\to A$ 满足如下条件: 对任意的 $c,b,d\in C$,

$$\sum d_{(1)}^{\psi''\psi'}\otimes 1_{A\psi\psi''}\theta(d_{(2)}^{\psi}\otimes c)_{\psi'}=\sum c_{(1)}^{\psi'}\otimes 1_{A\psi'\psi''\psi'''}\theta_{\beta}^{(\alpha)}(d^{\psi'''}\otimes c_{(1,\alpha^{-1}\beta)}^{\psi''}),$$

$$\theta\left(\sum b_{(1)}\otimes b_{(2)}\right)=1_A\varepsilon_C(b),$$

$$a_{\psi\psi'}\theta(d^{\psi'}\otimes b^{\psi})=\theta(d\otimes b)a.$$

定理 2 设 $(A,C)_\psi$ 是一个偏缠绕结构,$M,N\in U_A^C(\psi)$. 假设存在正规化积分 θ,对 $U_A^C(\psi)$ 中单(满)态射 f: $M\to N$,当单(满)态射 f 作为 A-模可分裂时,必有 f 在 $U_A^C(\psi)$ 中可分裂.

参考文献

[1] Exel R. Twisted partial actions: a classfication of regular C^*-algebraic bundels [J]. Proc London Math Soc, 1997, 74(2): 417-443.

[2] Dokuchaev M, Exel R, Piccione P. Partial representations and partial group algebras [J]. J Algebra, 2000, 226(1): 251-268.

[3] Dokuchaev M, Ferrero M, Pacques A. Partial galois theory of commutative rings [J]. J Pure Appl Algebra, 2007, 208(1): 77-87.

[4] Dokuchaev M, Zhukavets N. On finite degree partial representations of groups [J]. J Algebra, 2004, 274(1): 309-334.

[5] Caenepeel S, Janssen K. Partial (Co) actions of hopf algebras and partial hopf-galois theory [J]. Comm Algebra, 2008, 36(8): 2 923-2 946.

[6] Virelizier A. Hopf group-coalgebras [J]. J Pure Appl Algebra, 2002, 171(1): 75-122.

[7] Wang S H. Group entwining structures and group coalgebra Galois extensions [J]. Comm Algebra, 2004, 32(9): 3 417-3 436.

[8] Wang S H. Group twisted smash products and Doi-Hopf modules for T-coalgebras [J]. Comm Algebra, 2004, 32(9): 3 437-3 458.

[9] Zunino M. Double construction for crossed Hopf coalgebra [J]. J Algebra, 2004, 278(1): 43-75.

[10] Zunino M. Yetter-drinfeld modules for turaev crossed structures [J]. J Pure Appl Algebra, 2004, 193(1/3): 313-343.

[责任编辑: 丁　蓉]