

周期受击陀螺的经典动力学及准能谱统计

杨双波,刘达克

(“大规模复杂系统数值模拟”江苏省重点实验室,南京师范大学物理科学与技术学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 研究一个周期受击陀螺系统的经典动力学与准能谱统计. 发现在打击强度较弱($\lambda \leq 2.0$)时,经典相空间的运动是规则的,最近邻能级间距分布呈泊松型;当打击强度 $\lambda \geq 2.5$ 时,经典相空间的结构随着固定点 $(\pi/2, 0)$ 和 $(\pi/2, \pi)$ 的干草叉(pitchfork)分岔变得越来越复杂直至 $\lambda \geq 6$ 时的完全混沌. 这时最近邻能级间距分布也由近泊松型朝着维格那型转化. 文章中也计算了谱刚度、数方差、偏斜度、过度、数平均等统计量.

[关键词] 陀螺,准能谱统计,相空间,干草叉分岔

[中图分类号] O413.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2013)01-0048-06

Classical Dynamics and Quasienergy Spectral Statistics for a Periodically Kicked Free Top

Yang Shuangbo, Liu Dake

(Jiangsu Key Laboratory for NSLSCS, School of Physics and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

Abstract: This paper studies the classical dynamics and quasienergy spectral statistics for a periodically kicked free top. It is found that at weak kicking strength ($\lambda \leq 2.0$), the motion in classical phase space is regular, the nearest neighbor spacing distribution for the quasienergy levels is approximately Poisson type; and at $\lambda \geq 2.5$, with the pitchfork bifurcation of the fixed points $(\pi/2, 0)$ and $(\pi/2, \pi)$, the structure of the phase space becomes more and more complicate until becomes completely chaotic at $\lambda \geq 6$, and then the nearest neighbor spacing distribution for the energy levels changes from Poissonian to Wigner type gradually. We also calculated spectral rigidity, number variance, skewness, excess, and number average.

Key words: free top, quasienergy spectral statistics, phase space, pitchfork bifurcation.

最近我们对周期受击的简谐振子系统的经典与量子动力学及准能谱统计作了研究^[1,2], 有两点发现. 第一, 发现一步时间演化算符的复本征值并非分布在单位圆周上, 而是分布在环状区域, 并且随着打击强度的增加逐渐向圆心扩散; 第二, 准能量(实部)按最近邻间距分布在很大打击参数范围内呈泊松型分布, 并且相空间运动是规则的且与混沌无关. 接着, 我们检查了周期受击转子^[3]的情况, 发现其结果与简谐振子的情况相同. 除了很多不同点之外, 这两个系统的共同点是量子希尔伯特空间是无限维的. 是否正是这个原因造成了前面两个结果并不清楚. 于是我们开始了对当前这个周期受击陀螺系统的研究. 因为象自旋-脉冲系统^[4]一样, 周期受击陀螺系统的总角动量是守恒的, 即这是一个有限系统, 量子希尔伯特空间是 $(2j+1)$ 维, j 是总自旋. 研究结果发现, 一步时间演化算符的本征值谱的确分布在复本征值空间的单位圆周上, 不论打击强度如何, j 为何值, 本征值分布均不向圆心扩散. 准能量谱按最近邻间距分布, 在打击强度较小时呈泊松分布, 随着打击强度的增加, 分布逐渐偏离泊松分布, 向维格那分布过渡. 对本系统我们还计算了谱刚度、数方差、偏斜度及过度等统计量. 这篇文章将报导我们的研究成果.

这篇文章的组织如下: 在第 1 节我们研究了大量子数($j \rightarrow \infty$)极限下, 角动量的经典运动方程(映射)在不同参数下的数值解, 即经典相空间的结构. 在第 2 节, 对一步时间演化算符的本征方程求解, 得到本征值(复数)及本征向量(复向量), 进而得到准能量谱. 在第 3 节对准能量谱作统计分析. 第 4 节为总结与讨论.

1 系统经典动力学

一个周期受击陀螺的哈密顿量可被表示为

$$H = \alpha j_x + \lambda \frac{j_z^2}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad (1)$$

这里 α, λ 为常数, j_x, j_z 分别为角动量的 x 及 z 分量, j 为总角动量. 一步时间演化算符为

$$F = e^{-i\lambda j_z^2/2j} e^{-i\alpha j_x}, \text{ 及 } j^2 = j(j+1), j = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots \quad (2)$$

若 $\tau = n$ 时刻的角动量为 \vec{j}_n , 那么 $\tau = n+1$ 时刻的角动量为

$$\vec{j}_{n+1} = F^{\dagger} \vec{j}_n F = e^{i\alpha j_x} e^{i\lambda j_z^2/2j} \vec{j}_n e^{-i\lambda j_z^2/2j} e^{-i\alpha j_x}, \quad (3)$$

在 $j \rightarrow \infty$ 的极限下, 得到系统的经典运动方程为^[5]

$$\dot{X}_{n+1} = \bar{X} \cos \lambda \bar{Z} - \bar{Y} \sin \lambda \bar{Z}, \quad (4)$$

$$\dot{Y}_{n+1} = \bar{X} \sin \lambda \bar{Z} + \bar{Y} \cos \lambda \bar{Z}, \quad (5)$$

$$\dot{Z}_{n+1} = \bar{Z}, \quad (6)$$

其中

$$\bar{X} = X_n, \quad (7)$$

$$\bar{Y} = Y_n \cos \alpha - Z_n \sin \alpha, \quad (8)$$

$$\bar{Z} = Y_n \sin \alpha + Z_n \cos \alpha, \quad (9)$$

X, Y, Z 分别为 $\vec{r} = \frac{\vec{j}}{j}$ 的 3 个分量, 取半径为 1 的球面坐标 (θ, ϕ) , 则有

$$X = \sin \theta \cos \phi, Y = \sin \theta \sin \phi, Z = \cos \theta.$$

图 1 显示出单位球面上几种不同打击强度 λ 下经典相空间的运动, $\alpha = \pi/2$. 当 $0 \leq \lambda \leq 1$ 时, 经典运动主要为围绕固定点 $(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ 和 $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi)$ 的规则运动, 相空间充满了环. 以 $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pm\pi/2)$ 为固定点的规则区域很小, 如图 1(a) 所示; 当 $1 < \lambda \leq 2$ 时, 在以 $(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ 和 $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi)$ 为固定点的规则区域内出现了不同周期的岛链, 如周期为 8、6、3 的岛链等, 混沌区域仍然很小, 出现在 $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pm\pi/2)$ 为中心的岛附近, 如图 1(b) 所示; 当 $2 < \lambda \leq 3$ 时, 固定点 $(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ 和 $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi)$ 发生干草叉 (pitchfork) 分岔, 固定点由稳定变为不稳定, 同时两个新的稳定固定点出现. 当 $\lambda = 3.0$ 时, 相空间主要为混沌运动, 规则运动分布在几个小岛内, 如图 1(c) 所示; $\lambda = 6.0$ 时, 混沌充满整个相空间, 如图 1(d) 所示.

2 一步时间演化算符 F 的本征值及本征函数

在 j^2, j_z 的共同本征态 $|jm\rangle$ 下, 算符 F 的矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle jm | F | jm' \rangle &= \langle jm | e^{-i\lambda j_z^2/2j} e^{-i\alpha j_x} | jm' \rangle = e^{-i\lambda m^2/2j} \langle jm | e^{-i\alpha j_x} | jm' \rangle = e^{-i\lambda m^2/2j} \langle jm | e^{-i\alpha j_x} | \sum_{m_x=-j}^j |jm_x\rangle \langle jm_x | jm' \rangle = \\ &= \sum_{m_x=-j}^j e^{-i(\lambda m^2/2j + \alpha m_x)} \langle jm | jm_x \rangle \langle jm_x | jm' \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

这里 $|jm_x\rangle$ 为 j^2, j_x 的共同本征态, 即 $j_x |jm_x\rangle = m_x |jm_x\rangle$. 在 j^2, j_z 共同本征态表象下求 j_x 的矩阵元表示得

$$\langle jm | j_x | jm' \rangle = \frac{1}{2} \langle jm | j_+ + j_- | jm' \rangle = \frac{1}{2} (\sqrt{(j-m')(j+m'+1)} \delta_{m, m'+1} + \sqrt{(j+m')(j-m'+1)} \delta_{m, m'-1}), \quad (11)$$

通过对角化矩阵 $(j_x)_{mm'}$, 可得到本征值 m_x 及本征向量 $|jm_x\rangle$.

一步时间演化算符 F 的本征方程为

$$F |\psi_f\rangle = \lambda_f |\psi_f\rangle = e^{i\varepsilon_f - \varepsilon_i} |\psi_f\rangle, \quad (12)$$

这里 λ_f 为 F 的本征值, 为复数, 可通过将矩阵 $F_{mm'}$ 对角化后得到; $\varepsilon_r, \varepsilon_i$ 分别为准能量的实部与虚部, 可从 λ_f 得到, $\varepsilon_i = -\ln |\lambda_f|$, $e^{i\varepsilon_f} = \lambda_f / |\lambda_f|$, 可以证明对此有限 $(2j+1)$ 维系统 $\varepsilon_i = 0$. 从与 λ_f 所对应的本征矢 \mathbf{c} 可构造对应的本征函数如下

$$|\psi_f\rangle = \sum_{m=-j}^j \mathbf{c}_m |jm\rangle = \text{Re}(|\psi_f\rangle) + i \text{Im}(|\psi_f\rangle). \quad (13)$$

图 2(a) 显示系统 $\alpha=\pi/2, \lambda=2.5, j=1 \sim 101$ 的本征值分布, 其中 x 轴表示本征值 λ_f 的实部, y 轴表示本征值 λ_f 的虚部, 可以看到系统的本征值分布在单位圆周上, 没有扩散. 这与周期受击简谐振子系统及周期受击转子系统的结果不同, 那儿量子希尔伯特空间是 ∞ 维的, 而这里是有限维的.

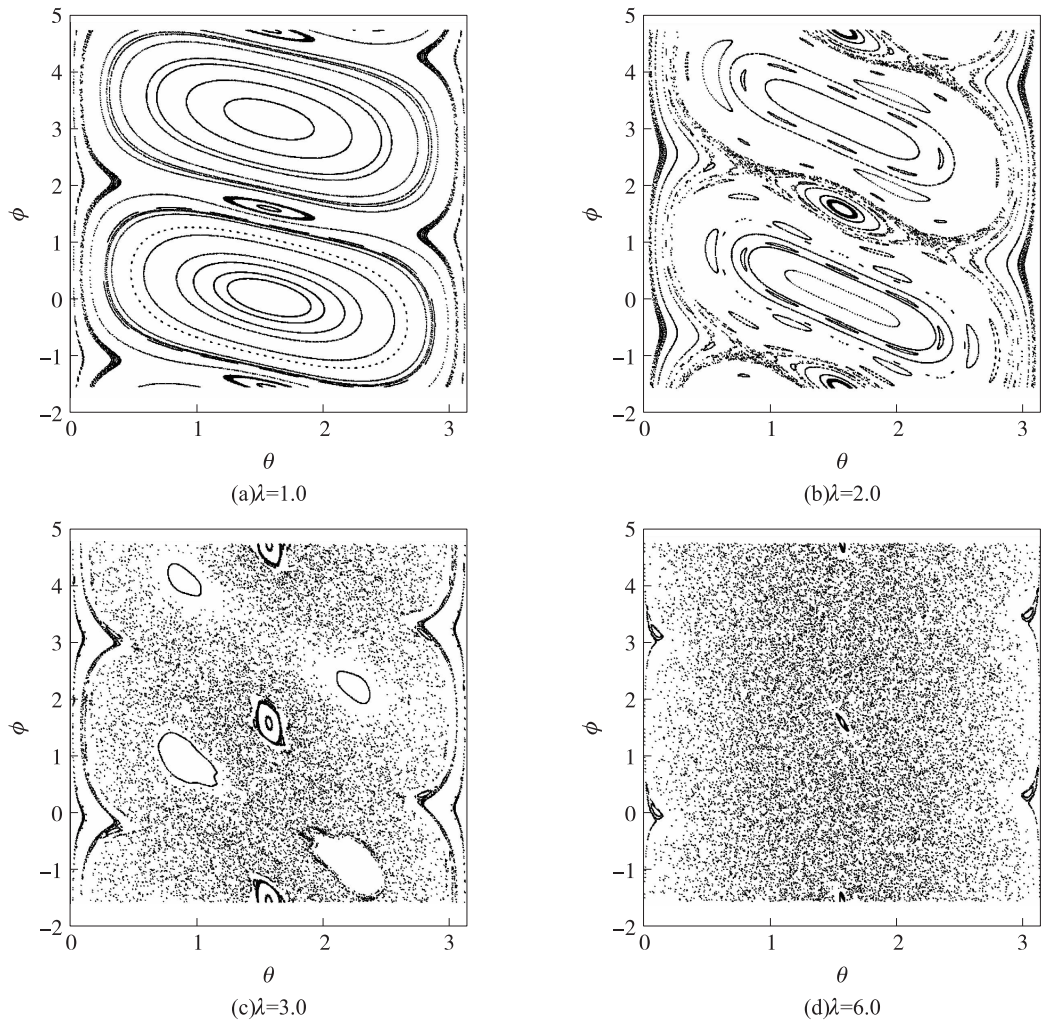


图 1 几种不同打击强度下经典相空间的结构, $\alpha=\pi/2$
Fig.1 Phase space structure at different kicking strength, $\alpha=\pi/2$

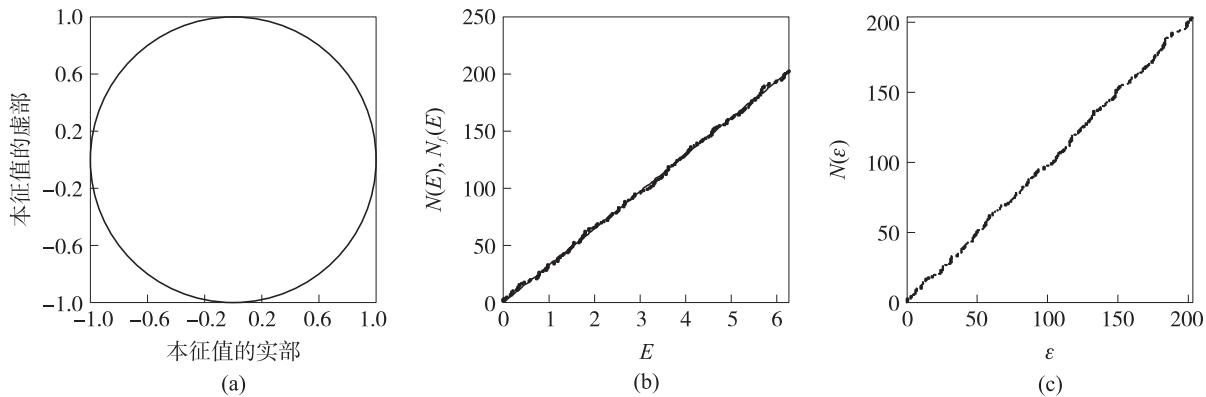


图 2 (a) Floquet 算符的本征值分布, $\alpha=\pi/2, \lambda=2.5, j=1 \sim 101$; (b) 准能级累积密度 $N(E)$ 及最小二乘拟合 $N_f(E)$ (实线); (c) 展平能谱的准能级累积密度 $N(\epsilon)$.
Fig.2 (a) Eigenvalue distribution for Floquet operator, $\alpha=\pi/2, \lambda=2.5, j=1 \sim 101$; (b) The accumulated density $N(E)$ of quasienergy levels and its the least square fit $N_f(E)$ (solid line); (c) The accumulated density $N(\epsilon)$ of the unfolded quasienergy levels.

3 准能谱统计及结果

3.1 能谱展平^[5]

设原始能级积累密度为 $N(E_i)$, 它表示能量 $E \leq E_i$ 的能级数目. 令 $N_f(E_i) = c_1 \sqrt{E_i} + c_2 E_i$, 对原始能谱的能级积累密度数据作最小二乘拟合, 确定系数 c_1, c_2 , 并令新的能谱(展平后的)为 $\varepsilon_i = N_f(E_i)$. 展平后的能谱平均最近邻间距近似为 1, 如图 2(b-c) 所示. 以下对展平后的能谱进行统计.

3.2 能级最近邻间距分布 $P(s) \sim s$

在展平后的能谱序列中任选一对最近邻能级 x_{i+1}, x_i , 二者之间的距离 $dx_i = x_{i+1} - x_i$ 处在 $(s, s+ds)$ 内的概率为 $P(s)ds$, 则 $P(s)$ 称为能级最近邻间距分布, 数值上 $P(s) = \Delta N / Nds$. 这里 ΔN 为能级对的数目, N 为能级总数. 对 $j=500$, 打击强度为 $\lambda=0.1, \alpha=2.0$ 和 $\lambda=10, \alpha=1.7$ 的两个系统, 我们分别计算了它们的能级最近邻间距分布, 其结果分别示于图 3(a) 和图 4(a) 中. 在图 3(a) 中, 光滑的实线为泊松 (Poisson) 分布. 可以看出在弱打击强度下 $P(s)$ 近似呈泊松型分布, 这与经典系统在弱打击强度下为可积系统相一致. 图 4(a) 中, 粗实线为泊松分布, 细实线为维格那 (Wigner) 分布. 结果显示, 在强打击强度下其 $P(s)$ 分布介于泊松分布与维格那分布^[6] 之间, 而此时经典相空间充满了混沌.

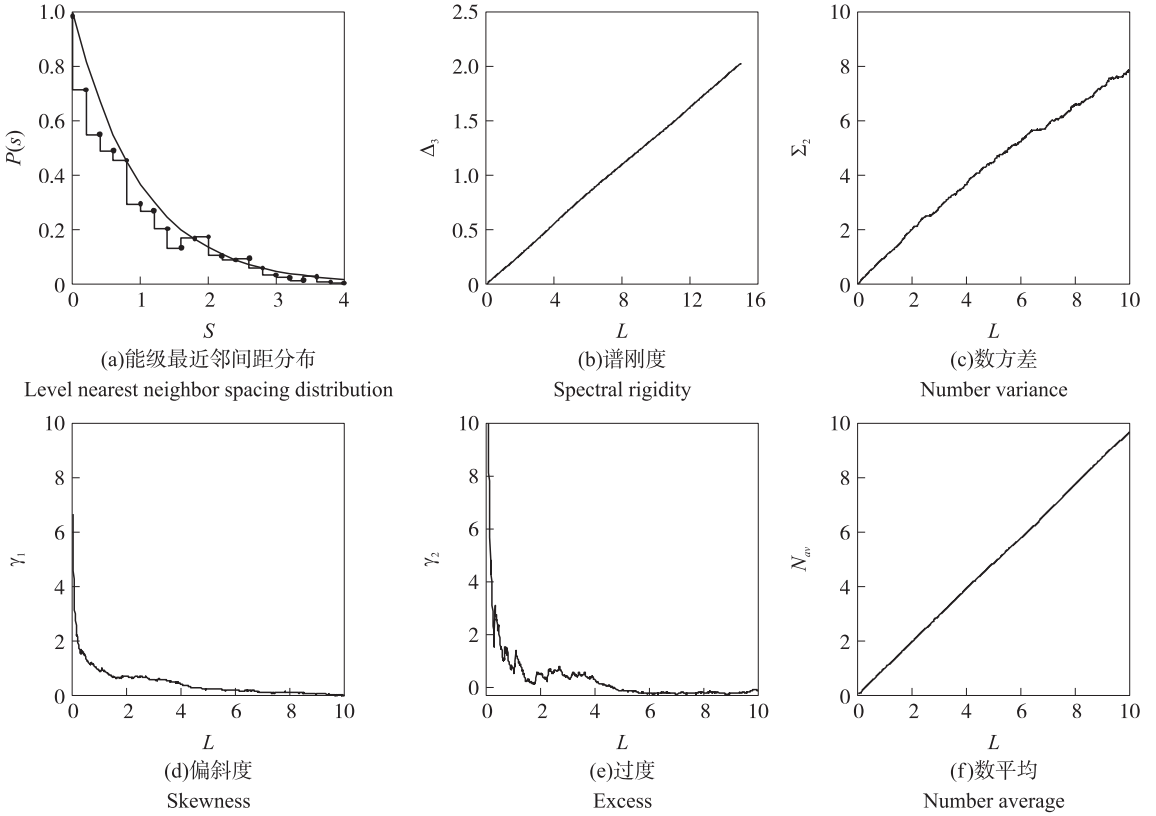


图 3 准能谱统计, $\lambda=0.1, \alpha=2.0, j=500$

Fig. 3 Quasienergy spectral statistics, $\lambda=0.1, \alpha=2.0, j=500$

3.3 谱刚度 $\Delta_3(L) \sim L$

谱刚度被定义为

$$\Delta_3(L) = \langle \min(a, b) L^{-1} \int_{-L/2}^{L/2} dx \{ N(x_0 + x) - ax - b \}^2 \rangle_{x_0}, \quad (14)$$

其中, $N(x)$ 为能级积累密度, a, b 为待定常数, 其值使得 $ax+b$ 在区间 $[x_0 - L/2, x_0 + L/2]$ 内给出 $N(x)$ 的最佳拟合.

设 $\bar{x}_i = x_i - x_0$ 在 $[-L/2, L/2]$ 内有 n 个能级, 即 $-L/2 \leq \bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_n \leq L/2$, 则^[7,8]

$$\Delta_3(L, x_0) = \frac{n^2}{16} - \frac{1}{L^2} \left[\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 \right] + \frac{3n}{2L^2} \left[\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 \right] - \frac{3}{L^4} \left[\sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 \right]^2 + \frac{1}{L} \left[\sum_{i=1}^n (n-2i+1) \bar{x}_i \right], \quad (15)$$

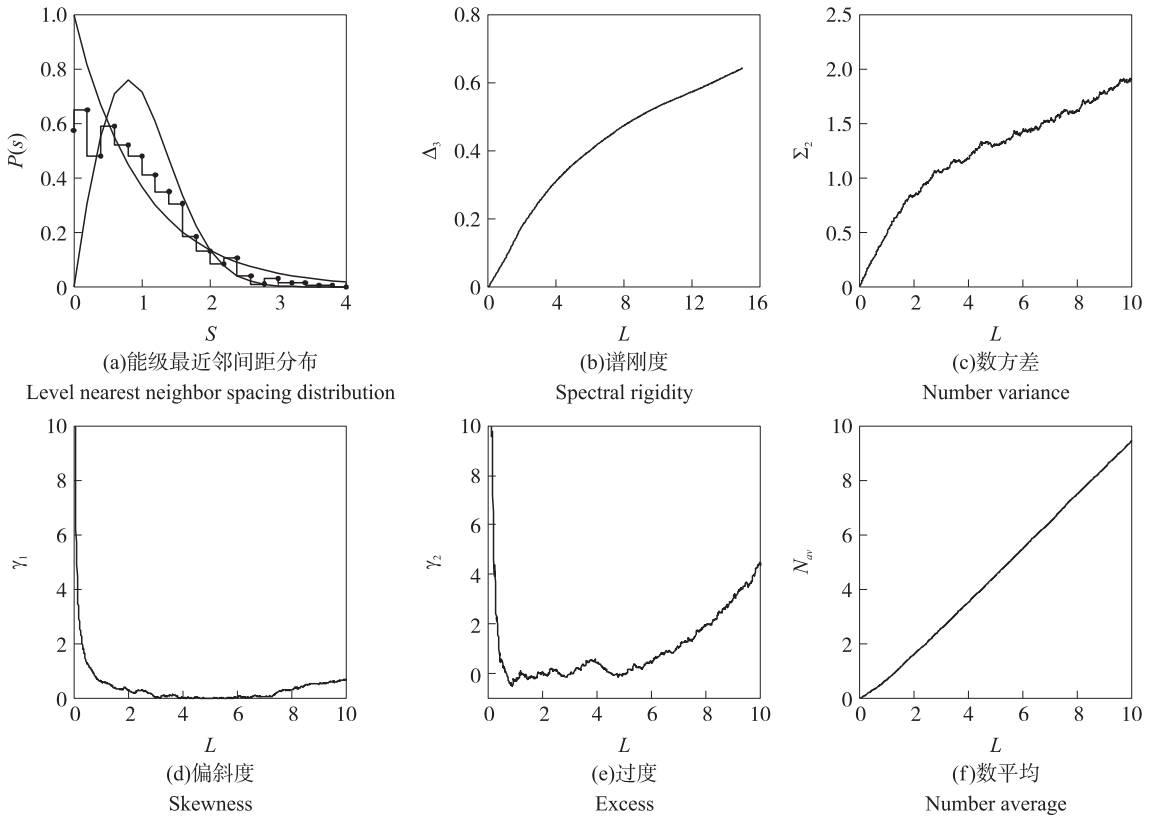


图 4 准能谱统计, $\lambda=10.0, \alpha=1.7, j=500$

Fig. 4 Quasienergy spectral statistics, $\lambda=10.0, \alpha=1.7, j=500$

对 x_0 求平均 (如算术平均) 得系统的平均谱刚度为

$$\Delta_3(L) = \langle \Delta_3(L, x_0) \rangle_{x_0}, \quad (16)$$

反映能谱的远程关联. $\Delta_3(L)$ 越小表明关联越强, $\Delta_3(L)$ 越大表明关联越弱. 对 $j=500$, 打击强度为 $\lambda=0.1$, $\alpha=2.0$ 和 $\lambda=10, \alpha=1.7$ 的两个系统我们分别计算了系统的谱刚度, 其结果示于图 3(b) 和图 4(b) 中. 可以看出对 $\lambda=0.1$ 的系统, 其谱刚度 $\Delta_3(L)$ 与 L 呈线性关系, 而 $\lambda=10$ 系统中, $\Delta_3(L)$ 在 L 值较小时与 L 呈线性关系, 在 L 较大时呈非线性变化关系. 这与反映谱近程关联的最近邻间距分布的情况在定性上是一致的. 定量上, 从图 3(b) 可以看出, 差别较大, 对可积系统无规矩阵理论的结果给出 $\Delta_3(L) \approx L/15$ [9].

3.4 数方差, 偏斜度, 过度 $\Sigma^2(L), \gamma_1(L), \gamma_2(L) \sim L$

设 $n(E_0, L)$ 代表能量在区间 (E_0, E_0+L) 内的能级数目, 如 $n(E_1, L) = n_1, n(E_2, L) = n_2, \dots, n(E_m, L) = n_m$, 那么 $\langle n(E, L) \rangle = \bar{n}(L) = (n_1 + n_2 + \dots + n_m) / m$ 为宽度为 L 内的能级数平均. 能级数方差被定义为

$$\Sigma^2(L) = \langle n(E, L)^2 \rangle - \langle n(E, L) \rangle^2 = \langle n(E, L)^2 \rangle - \langle \bar{n}(L) \rangle^2, \quad (17)$$

这里 $\langle n(E, L)^2 \rangle = (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_m^2) / m$. 与谱刚度 $\Delta_3(L)$ 类似, 能级数方差 $\Sigma^2(L)$ 反映两点的关联. 能反映 3 点与 4 点关联的函数是偏斜度 (Skewness) γ_1 和过度 (Excess) γ_2 , 它们分别被定义 [10] 为

$$\gamma_1(L) = \frac{M_3(L)}{(\Sigma^2(L))^{3/2}}, \quad (18)$$

$$\gamma_2(L) = \frac{M_4(L)}{(\Sigma^2(L))^2} - 3, \quad (19)$$

这里 $M_k = \langle [n(E, L) - \bar{n}(L)]^k \rangle$ 为 $n(E, L)$ 关于平均值 $\bar{n}(L)$ 涨落分布的第 k 阶矩. 对 $j=500$ 、打击强度为 $\lambda=0.1, \alpha=2.0$ 和 $\lambda=10, \alpha=1.7$ 的两个系统我们分别计算了它们的数方差、偏斜度和过度, 其结果分别示于图 3(c), 3(d), 3(e), 4(c), 4(d), 4(e) 中. 这些结果与外磁场中氢原子的结果 [9] 相似.

3.5 能级数平均 $\bar{n}(L) \sim L$

能级数平均 $\bar{n}(L)$, 为以任意 E 为中心, L 间隔内的能级数的平均值, 即 $\bar{n}(L) = \langle n(E, L) \rangle$, 通常为系综平

均,我们这里取算术平均,如3.4节所述,进行计算.其结果对 $j=500$,打击强度为 $\lambda=0.1, \alpha=2.0$ 和 $\lambda=10, \alpha=1.7$ 的两个系统分别示于图3(f)与4(f)中.可以看出,打击强度较弱时, $\bar{n}(L)$ 与 L 呈线性关系,而打击强度很强时, $\bar{n}(L)$ 在 $L>1$ 时也呈线性关系, $L<1$ 时成非线性关系.

4 总结与讨论

在这篇文章中我们研究了周期受击陀螺系统的经典动力学行为及准能谱统计.发现随着打击强度由小到大,经典相空间运动由规则变为混沌时,时间一步演化算符的准能谱统计中能级最近邻间距分布也由近泊松分布向维格那分布转化;谱刚度由近线性关系转向非线性关系.我们还计算了能级数平均、数方差、偏斜度、过度等统计量.发现在这个有限维量子希尔伯特空间系统中,时间一步演化算符的本征值分布在复平面的单位圆周上,这是这个工作的另外一个收获,由此我们可以确信周期受击简谐振子系统或周期受击转子系统对应的本征值分布向圆心扩散理解为由无限维量子希尔伯特空间造成的.

周期受击陀螺系统是一个典型的量子混沌系统的模型,它有多种不同的实验实现.如在对称双势阱中的双模玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)^[11],假如原子间的相互作用强度通过周期受击来调制.另一个例子是自旋-脉冲系统.在电子自旋谐振的自旋回声^[12]实验中,大量自旋 $1/2$ 系统的集合,其相干及有效行为表现为单个大的自旋系统.因此,周期受击陀螺系统的研究结果对实验及实验结果的解释具有指导意义.

[参考文献]

- [1] 杨双波,韦栋.周期受击简谐振子系统的经典与量子动力学[J].南京师大学报:自然科学版,2011,34(4):49-54.
- [2] 杨双波,韦栋.周期受击简谐振子系统的经典动力学与准能谱统计[J].南京师大学报:自然科学版,2012,35(3):37-42.
- [3] Casati D,Chirikov BV,Izrailev FM,et al. Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation[M]//Casati D,Ford J. Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag,1979,93:334-352.
- [4] Nakamura K,Okazaki Y,Bishop A R. Periodically pulsed spin dynamics: scaling behavior of semiclassical wave functions[J]. Physical Review Letters,1986,57(1):5-8.
- [5] Haak F. Quantum Signatures of Chaos[M]. Berlin,Heidelberg:Springer,1991:52,169.
- [6] Mehta M L. Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels[M]. New York:Academic,1965.
- [7] Dyson F J,Mehta M L. Statistical theory of the energy levels of complex systems[J]J Math Phys,1963,4(5):701-712.
- [8] Huang Liang,Lai Yingcheng,Grebogi Celso. Characteristics of level-spacing statistics in chaotic graphene billiards[J]. Chaos,2011,21,013102-1-013102-11.
- [9] Honig A,Wintgen D. Spectral properties of strongly perturbed Coulomb systems: fluctuation properties[J]. Physical Review A,1989,39(6):5 642-5 657.
- [10] Mehta M L. Random Matrices[M]. Second edition. San Diego:Academic Press,1991.
- [11] Strzys M P,Graefe E M,Korsch H J. Kicked bose-hubbard system and kicked tops-destruction and stimulation of tunneling[J]. New Journal of Physics,2008,10:013024-013038.
- [12] Stejskal E O,Tanner J E. Spin diffusion measurements: spin echoes in the presence of a time-dependent field gradient[J]. J Chem Phys,1965,42(1):288-293.

[责任编辑:顾晓天]